1. 4. 61

Digitized by Google

1.4.61 1830
VOL. II
A-I

ELEMENTI

DI

ASTRONOMIA

CON LE APPLICAZIONI

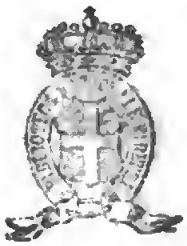
ALLA GEOGRAFIA, NAUTICA, GNOMONICA E CRONOLOGIA

DI

GIOVANNI SANTINI

PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PADOVA
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA
SOCIO DELL' ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI DI PADOVA
DELLA SOCIETA' ASTRONOMICA DI LONDRA CC. CC.

EDIZIONE SECONDA
RIVEDUTA ED AUMENTATA DALL' AUTORE



VOL. II.

PADOVA
DALLA TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO
MDCCCXXX.

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPITOLO I.

Teoria dei pianeti secondarj o satelliti di Giove.

283. Abbiamo già annunziato che Giove veduto con un mediocre cannocchiale aeromatico apparisce sempre accompagnato da quattro picciole stelle somiglianti in isplendore a quelle di sesta in settima grandezza, le quali sembrano aggirarsi intorno a lui, come intorno ad un centro comune dei loro moti. La prima scoperta di questi astri sembra dovuta al Galileo, il quale osservolli li 7 Gennajo del 1610, e nel suo opuscolo intitolato *Sydereus Nuncius*, nello stesso anno pubblicato in Padova, fece parte agli Astronomi di questa sua scoperta, chiamandoli *Sydera Medicea* in onore di Cosimo de' Medici granduca di Toscana, cui egli dedicò la sua opera. Simone Mario, astronomo dell' Elettore di Brandeburgo, pubblicò nel 1614 un libro intitolato *Mundus Jovialis detectus anno* 1609, nel quale reclama a favor suo la scoperta dei satelliti di Giove, e presenta le loro osservazioni in termini e dati a quelli del Galileo sì somiglianti da indurre il sospetto di plagio fino nelle osservazioni. Comunque però sia, a Galileo, che il primo pubblicò le sue osservazioni, che primo fece sentire l'utilità di questa scoperta nella ricerca delle longitudini geografiche, e primo determinò gli approssimati tempi delle loro rivoluzioni, se ne deve tutto l'onore e la gloria. Hodierna (*) fu il primo a pubblicare delle tavole dei loro moti, le quali vennero successivamente migliorate e corrette da Cassini e da Wargentin. Quest' ultimo si applicò con sommo ardore alla teoria dei satelliti di Giove, e, dietro il confronto di un immenso numero di osservazioni giunse a dare alle

(*) Sebbene Hodierna per il primo pubblicasse le tavole dei satelliti di Giove a Palermo nel 1656, pure sembra fuori di ogni dubbio che Galileo ed il suo discepolo il padre Vincenzo Renieri monaco olivetano, avessero calcolato tavole molto più esatte fondate sopra tutte le loro osservazioni, e le quali fino dal 1640 dovevano esistere manoscritte. Il padre Renieri si apparecchiava a pubblicarle nel 1647, allorchè mancò di vita, e malgrado tutte le ricerche non si è potuto rinvenire il manoscritto, poichè venne spogliato il suo studio di tutti gli scritti suoi e del Galileo, per quanto credesi, dall' inquisitore. Così miseramente perì il più bel monumento che le vigilie di 28 anni del Galileo e di 10 anni del suo discepolo avevano innalzato all'Astronomia. Vedansi le *Lettere inedite degli uomini illustri Italiani* del signor Fabroni, ed un interessante articolo del signor bar. di Zach, *Correspondence Astronomique etc.* Giornale dallo stesso impresso in Genova vol. I. pag. 478 e seg.

loro tavole quel grado di esattezza che dalle sole osservazioni sembravano di poter ricevere, determinando eziandio empiricamente le principali disuguaglianze dei loro movimenti. In seguito Bailly, La-Grange, e per ultimo La-Place nella sua Meccanica celeste hanno tant'oltre portato la loro teoria, calcolando le disuguaglianze prodotte dalle loro scambievoli attrazioni, che le ultime recentissime tavole del sig. De-Lambre fondate sulla teoria di La-Place a meraviglia concordano con le migliori osservazioni. La difficoltà di questa teoria ci obbliga a rimandare i nostri lettori alle citate opere per lo sviluppo della medesima, mentre, per non dipartirci dalle cose elementari, sommariamente esporremo come dietro le osservazioni ricavare si possano gli elementi delle loro orbite intorno al centro di Giove.

Fenomeni generali del moto dei satelliti.

284. Le apparenze generali del moto dei satelliti di Giove riduconsi alle seguenti: 1.° essi apparentemente cambiano continuamente di luogo rapporto al centro di Giove, ora da esso allontanandosi ed ora avvicinandoseli; 2.° le loro distanze dal centro di Giove variando continuamente, si mantengono però sempre dentro certi confini, che non oltrepassano; tali limiti essendo in ogni satellite differenti; 3.° quando un satellite è all'occidente nella sua massima digressione, apparisce stazionario, quindi comincia ad avvicinarsi al centro di Giove, il suo moto si fa di più in più rapido, ed avvicinandosi al suo lembo sembra passare dietro il medesimo. Allorchè ha oltrepassato il suo disco continua ad allontanarsi ad oriente rallentando il suo moto, finchè giunto alla sua massima digressione orientale, torna ad apparire stazionario, e quindi di bel nuovo riavvicinasi al centro di Giove, e sembra interporsi fra il suo disco e la terra, chiaramente con forti telescopj scoprendosi la sua ombra sul globo illuminato del pianeta; 4.° per ogni satellite le massime digressioni occidentali sono uguali alle massime digressioni orientali; 5.° la linea condotta per i punti delle massime digressioni passa per il centro del pianeta, ed è presso a poco paralella al piano dell'eclittica; 6.° nel passaggio dalla massima digressione occidentale alla massima digressione orientale sembrano i satelliti sortire da questa linea allontanandosene alcun poco al settentrione ed al mezzodì, descrivendo apparentemente delle ellissi, il semiasse minore delle quali è molto picciolo. Tali deviazioni essendo sempre molto picciole, possono a principio trascurarsi, e può supporsi che l'orbita apparente dei satelliti coincida colla linea delle massime digressioni, la quale d'altra parte sembra paralella alle fascie di Giove, e quindi compresa nel piano del suo equatore; 7.° in ogni rivoluzione i primi tre satelliti s'immergono nell'ombra che il corpo opaco di Giove lascia dietro di

se, e si perdono allora di vista; il quarto satellite si eclissa egli pure, ma può talvolta non eclissarsi in ogni rivoluzione, e ciò accade tutte le volte che egli si allontana dal piano dell'orbita di Giove più del semidiametro della sua ombra; 8.° le massime digressioni orientali ed occidentali dei satelliti riportate al semidiametro di Giove, o valutate in secondi nelle medie distanze del pianeta dal Sole, sono state trovate dai diversi Astronomi dietro l'osservazione come segue

Sat.	Galileo	Mario	Schirleo	Hodierna	Cassini	Newton	Pound	De-Lambre
1	6,0	6,0	6,0	7,0	5,67	5,965	1′51″,1	5,698491
2	10,0	10,0	8,0	11,0	9,00	9,494	2 56 ,8	9,066548
3	16,0	16,0	12,0	18,0	14,38	15,141	4 42 ,0	14,461895
4	24,0	26,0	20,0	29,0	25,30	26,630	8 16 ,0	25,435900

285. Se ora ben si riflette a tutte le precedenti apparenze intorno al moto dei satelliti di Giove, ci persuaderemo facilmente che essi si avvolgono in orbite circolari, o pochissimo dalle circolari aberranti intorno al suo centro, i raggi delle quali vengono rappresentati dalle stesse massime digressioni che ora abbiamo riferito. Siccome poi queste orbite sono da noi vedute in forma di strettissime ellissi quasi confondentisi con la linea delle massime digressioni, così dovranno essere al piano dell'ecclittica pochissimo inclinate, e non molto dal piano dell'equatore di Giove lontane, il che al tempo stesso rende palese la ragione per cui i primi tre satelliti in ogni rivoluzione si eclissano immergendosi nell'ombra di questo pianeta, avvegnachè questi satelliti percorrendo orbite pochissimo all'orbita di Giove inclinate, non si sollevano dal piano di questa tanto quanto è necessario per disimpegnarsi dal cono ombroso che lascia dietro di se l'opaco globo del pianeta, il cui asse è sempre nel piano dell'orbita.

286. Si rende oltremodo difficile fondare sopra le osservazioni una completa teoria dei satelliti di Giove. In fatti a motivo della loro distanza apparente da Giove sempre molto piccola, è palese che un minimo errore commesso nella stima delle loro digressioni osservate in dati tempi può indurre in notabilissimi errori, se da esse dedurre si vogliano le loro posizioni vere, quali dal centro dei loro movimenti, cioè del pianeta si osserverebbero. Avendo dunque dovuto per questa ragione gli Astronomi rinunziare alle osservazioni dirette delle varie loro digressioni, si sono applicati specialmente ad osservare gli eclissi, i quali somministrano una posizione giovicentrica con molta facilità, e d'altronde succedendo questi fenomeni con somma frequenza, danno un metodo abbastanza esatto per fondarvi la loro teoria. A vero dire le osservazioni di questi stessi fenomeni non vanno disgiunte da molta

Digitized by Google

difficoltà. In primo luogo i satelliti, a motivo della loro grandezza, non s'immergono istantaneamente nell'ombra, ma gradatamente indebolendosi di luce lasciano troppo indeterminato il vero momento dell'immersione e della loro emersione, dipendendo questo e dalla bontà dei cannocchiali, coi quali si osservano, e dallo stato dell'atmosfera, e dall'occhio dell'osservatore. In secondo luogo non attraversando essi sempre il cono ombroso per il suo centro, in grazia dell'inclinazione delle loro orbite al piano dell'orbita di Giove, la semisomma degl'istanti osservati nell'immersione ed emersione non dà il tempo della vera congiunzione dei satelliti col centro di Giove, ma un istante, da cui poi devesi dedurre la vera congiunzione mediante la elevazione del centro del satellite sopra il piano dell'orbita di Giove al cercato momento della congiunzione. Queste difficoltà sono agli ultimi tre satelliti comuni. La teoria del primo satellite è ancora congiunta con un'altra difficoltà, ed è che per la sua prossimità a Giove non possono dalla terra osservarsi in una stessa ecclisse le immersioni ed emersioni nell'ombra, come bentosto vedremo. Riunendo tutte queste circostanze alle irregolarità nel moto dei satelliti prodotte dalle loro scambievoli attrazioni, facilmente comprenderassi la ragione della difficoltà incontrata da principio nel formare le tavole dei loro movimenti, e delle differenze che esse presentavano colle osservazioni.

Per servire alla brevità noi intanto supporremo le loro orbite circolari, e trasportate paralellamente a se stesse intorno al centro di Giove nella sua orbita ellittica; di più supponendo già conosciuti i raggi e le posizioni di queste orbite, come anche i tempi delle rivoluzioni siderali e sinodiche dei satelliti, esporremo le formule, dietro le quali calcolare si dovranno i loro ecclissi, le condizioni che devono aver luogo, affinchè sieno questi visibili dalla terra; per ultimo insegneremo a dedurre dalle osservazioni degli ecclissi gli elementi delle orbite da principio supposti conosciuti.

Ecclissi dei satelliti di Giove.

287. Rappresenti (*Fig.* 1) S il centro del Sole, che al tempo stesso è centro delle orbite dei pianeti, Pp sia il diametro solare, MOD l'orbita della terra percorsa nella direzione DOM; G il centro di Giove, il cui diametro sia Tt, $HEIh$ l'orbita di un qualunque satellite intorno a Giove percorsa nella direzione hIH. Condotte ai circoli Pp, Tt le tangenti PTO', ptO', e supponendo che tutta la figura si ravvolga intorno alla linea dei centri SG, il cono generato dal triangolo $TO'G$ rappresenterà l'ombra che lascia dietro di se Giove, il cui asse è sempre compreso nel piano della sua orbita. Giunto il satellite in I, s'immerge nell'ombra, e principia l'ecclisse,

la quale non termina che allorquando in virtù del suo moto proprio perviene in E per sortire dall' ombra. Se le orbite dei satelliti fossero comprese nel piano dell'orbita di Giove, in ogni loro rivoluzione succederebbe un' eclisse, sarebbero con Giove in congiunzione, quando attraverserebbero l' asse del cono ombroso, e la durata dell' eclisse sarebbe per ogni uno presso a poco costante. Che se le orbite dei satelliti sono al piano dell'orbita di Giove inclinate, essi percorreranno dentro il cono ombroso un arco della loro orbita tanto minore, quanto maggiore sarà la loro latitudine giovicentrica; e se questa giunga a superare l' angolo che sottende la sezione del cono ombroso alla regione del satellite veduta dal centro di Giove, il satellite cessa d' immergersi nell' ombra, e l' eclisse non ha luogo. Ci dovremo pertanto, nel caso delle orbite dei satelliti inclinate al piano dell' orbita di Giove, immaginare questo pianeta trasportato nella sua ellisse intorno al Sole per modo che seco sembri condurre i piani delle orbite dei satelliti, in guisa che rimangano essi costantemente a se stessi paralelli, la linea dei nodi incontrando il cielo stellato presso a poco sempre negli stessi punti. In questa ipotesi quando Giove troverassi nella linea dei nodi, le congiunzioni dei satelliti col Sole accaderanno nella medesima linea, ed in conseguenza essi attraverseranno il cono ombroso per il centro, e le eclissi saranno della maggior durata; e quanto più Giove nella sua orbita si avvicinerà ad essere distante di 90° dalla medesima linea dei nodi, tanto maggiore sarà la latitudine dei satelliti nella congiunzione, e minore in conseguenza la loro durata. Siccome poi non da tutti i punti dell' orbita terrestre vedere si possono i satelliti, quando s' immergono nell' ombra od emergono da essa, così per porgere la teoria dei loro eclissi, quale dalla terra si può osservare, dovremo assegnare in primo luogo l' ampiezza e la figura della sezione del cono ombroso di Giove, in secondo luogo il tempo che un satellite avente una data latitudine impiega ad attraversare l'ombra, in terzo luogo in quali circostanze dalla terra vedere si possono o le immersioni o le emersioni, od amendue le fasi, alle quali ricerche soddisfaremo nelle seguenti proposizioni.

Problema I. Determinare l' angolo che sottende il raggio della sezione del cono ombroso alla regione del satellite veduto dal centro di Giove.

288. Ritenute le stesse denominazioni precedenti, sia inoltre la paralasse orizzontale del satellite, o vogliamo dire l' angolo $TEG = \pi$, il semidiametro del Sole veduto dal centro di Giove $= d$, la paralasse orizzontale del Sole rapporto allo stesso pianeta, ossia l' angolo, sotto cui vedesi Giove dal centro del Sole $= p$; la distanza di Giove dal Sole $= R$; la distanza del satellite da Giove $= r$; il semidiametro di Giove $= g$. Avremo

$$\text{sen}\,\pi = \frac{g}{r}, \quad \text{sen}\,p = \frac{g}{R}, \quad d = \frac{\text{sem. diam.}^{\circ}\,☼}{R} = \frac{961'',0}{R}.$$

Per ridurre a numeri queste quantità prenderemo per g il semidiametro di Giove veduto da una distanza $= 1$, il quale dal quadro del sistema planetario in fine del primo volume risulta $= 93'',4$, per r le massime digressioni dei satelliti osservate da Pound, e da noi riferite al § 284, le quali però essendo quali apparirebbero alla distanza media del pianeta dal Sole, dovranno moltiplicarsi per la stessa distanza media per ridurle all'unità di distanza. In fine per R rappresenteremo la distanza media di Giove, la quale è $= 5,20279$. Osservando inoltre che p è un piccolissimo arco che si confonde col suo seno, avremo $p = \frac{g}{R} = 17'',952$; $d = \frac{961''}{R} = 184'',7$; ed in seguito, ritenendo per r i numeri del § 284, avremo $\text{sen}\,\pi = \frac{g}{rR} = \frac{p}{r}$, la quale per i quattro satelliti dà $\pi' = 9^{\circ}\,17'\,55''$, $\pi'' = 5^{\circ}\,49'\,40''$, $\pi''' = 3^{\circ}\,38'\,59''$, $\pi'' = 2^{\circ}\,4'\,27''$, π', π'', π''', π'' rappresentando i valori di π per il primo, secondo ec. satellite.

Premesse queste cose si dimostrerà, come nel § 179 rapporto agli ecclissi di Luna, che la sezione del cono ombroso alla regione del satellite è $= \pi + p - d$, e quindi indicando per α', α'', α''', α'' le sezioni alla regione de' quattro satelliti, avremo $\alpha' = 9^{\circ}\,15'\,8''$, $\alpha' = 5^{\circ}\,46'\,53''$, $\alpha''' = 3^{\circ}\,36'\,12''$, $\alpha'' = 2^{\circ}\,1'\,40''$. Se si vorrà assumere il disco apparente di Giove come circolare, le sezioni dell'ombra saranno esse pure circolari, e determinate dalle precedenti quantità. Che se poi vorrassi tener conto dell'appianamento di questo pianeta, sarà la sezione sensibilmente un'ellisse simile al suo disco, il cui semiasse maggiore nel senso dell'equatore sarà determinato dai numeri precedenti, il semiasse minore poi sarà uguale al semiasse maggiore moltiplicato per la frazione $\frac{167}{177}$, che secondo le osservazioni rappresenta il rapporto dei due suoi semiassi.

289. *Scolio*. Le sezioni dell'ombra di Giove variano colla sua distanza dal Sole, e colla distanza dei satelliti. Sarebbe in vero molto facile, dietro i precetti precedenti determinare le dimensioni dell'ombra in ogni posizione di Giove e dei satelliti; se non che non potendosi vedere il primo loro ingresso nel cono ombroso, e d'altronde una picciola incertezza nel diametro di Giove portando una differenza molto rimarchevole nei valori di π, si rende tale ricerca inutile, ed è partito migliore dedurre i valori di α dalle osservazioni della massima durata delle ecclissi, sostituendosi così all'ombra vera una certa ombra fittizia, nella quale quando vengono ad immergersi i satelliti,

ha luogo l'ecclisse, e presenta il vantaggio di comprendere l'incertezza della penombra; e quell'altra incertezza dipendente dalla forza dei cannocchiali, in virtù della quale il satellite perdesi di vista prima che tutto sia immerso nell'ombra, sarà pur tolta se si osserveranno tali ecclissi con cannocchiali di forza pressochè costante.

Problema II. Determinare in quali punti dell'orbita terrestre si possano vedere gli ecclissi dei satelliti, ed in quali circostanze vedasi l'immersione o l'emersione, od ambedue le fasi al tempo stesso.

290. Rappresenti (*Fig.* 1) il circolo Pp il Sole, Tt Giove, e le tangenti PT, pt prolungate fino al loro incontro in O', come sopra, determinino il cono ombroso, in cui vada ad immergersi il satellite, che si aggira intorno a Giove nella direzione hIH. Fingiamo la terra trasportata nella sua orbita intorno al Sole nella direzione FDM; egli è palese 1.° che avanti e dopo la congiunzione di Giove col Sole, la quale ha luogo mentre la terra trovasi in F, per tutto il tempo dalla terra impiegato a descrivere l'arco bc, non potransi vedere nè le immersioni, nè le emersioni del satellite dall'ombra; 2.° per tutto il tempo che impiega la terra a descrivere l'arco cDC, mentre Giove sembra andare dalla sua congiunzione col Sole alla sua opposizione si vedranno le immersioni all'occidente del centro di Giove; 3.° invisibili saranno tanto le immersioni, quanto le emersioni verso l'opposizione in O di Giove per tutto il tempo dalla terra impiegato a percorrere l'arco BC; 4.° mentre la terra percorrerà l'arco BMb della sua orbita vedrà le emersioni del satellite in E dall'ombra all'oriente del centro di Giove; 5.° nell'arco BMb potrassi dalla terra osservare eziandio l'immersione del satellite in I, se la tangente IT incontra prolungata l'orbita terrestre; in caso diverso non potransi osservare al tempo stesso le immersioni ed emersioni. Così nella *figura* 1 potrebbonsi osservare le immersioni, mentre la terra descrive l'arco NM. Del pari nell'arco cDC si potranno osservare le emersioni in tutto l'arco dell'orbita terrestre tagliato dalla tangente che dal punto E si conduce al disco di Giove. Risulta da questa costruzione che affinchè sieno dalla terra visibili le immersioni ed emersioni in una stessa ecclisse, deve essere la perpendicolare SQ condotta sulla tangente IT minore del raggio dell'orbita terrestre. Ciò premesso, passiamo a determinare gli archi OB, Fb, e la perpendicolare SQ.

Se conduciamo il raggio SB, sarà l'angolo SBP il semidiametro apparente del Sole veduto dalla terra, che porremo $= \delta$. Ora l'angolo $BSO = SBP - SO'B$, ed essendo l'angolo $SO'B = d - p$ (§ 179), sarà $BSO = BO = \delta + p - d$. Supponendo le orbite circolari, avremo $\delta = 16' 1''$, $p = 17'',9$, $d = 3' 4'',7$. Onde $BO = 13' 14''$, e però l'intero arco BC, nel quale sono invisibili

le immersioni ed emersioni dei satelliti di Giove nelle vicinanze della sua opposizione non è che di 26′ ½ circa, il quale dalla terra viene percorso in circa 10 ore; pertanto di un qualunque satellite si potrà osservare l'immersione avanti l'opposizione, e nel prossimo eclisse vedere l'emersione dopo l'opposizione, giacchè la minima distanza fra due eclissi consecutivi ha luogo per il primo satellite, per cui trovasi $= 1^s\ 18^h\ \frac{1}{2}$ tempo prossimo della sua rivoluzione sinodica, come verrà fra poco esposto.

Per trovare l'espressione dell'arco bF si osservi che dalla geometria si sa essere $bO'F = \frac{1}{2}bF - \frac{1}{2}BO$, e però $bF = 2bO'F + BO = \delta + d - p$. Ponendo per δ, d, p i superiori valori, avremo $bF = 18'\ 48''$, e perciò nei contorni della congiunzione saranno invisibili gli eclissi per un arco di 37′ 36″ dell'orbita terrestre. Si deve però osservare che nelle congiunzioni, essendo Giove immerso nei raggi solari, tramontando cioè e nascendo col Sole, gli eclissi dei satelliti sono invisibili non soltanto per il tempo necessario alla terra a descrivere l'arco bc, ma per tutto quello che si richiede, perchè Giove si allontani dal Sole fino a tramontare dopo il crepuscolo.

Resta a trovare il valore della perpendicolare SQ, che porremo $= P$. A tale oggetto, ritenute le denominazioni del § 288, sarà l'angolo $SGI = 180 - \alpha$, e però $SI = \sqrt{(R^2 + r^2 + 2rR\cos\alpha)}$; estraendo la radice, e trascurando le potenze di r superiori alla prima, avremo $SI = R + r\cos\alpha$. Abbassando la perpendicolare hI, avremo $hI = r\,\text{sen}\,\alpha$, e l'angolo $hSI = \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R + r\cos\alpha} = \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R}$.

Quindi sarà $GIS = \alpha - GSI = \alpha - \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R}$, e però tutto l'angolo

$$QIS = QIG + GIS = \pi + \alpha - \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R} = 2\pi + p - d - \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R},$$

a motivo di $\alpha = \pi + p - d$. Per ultimo nel triangolo rettangolo SIQ, avremo $SQ = SI\,\text{sen}\,SIQ$, dalla quale equazione sostituiti i valori di SI, SIQ, otterremo, trascurando sempre le seconde potenze di r, e facendo le opportune riduzioni

$$P = R\,\text{sen}\,(2\pi + p - d) + r\,\text{sen}\,\pi.$$

Allorchè sarà P minore del raggio dell'orbita terrestre, la tangente IT entrerà dentro l'orbita stessa, e si potranno in alcuni tempi dell'anno vedere le immersioni ed emersioni del satellite. Considerando l'orbita della terra come circolare, sarà P il coseno della metà di quell'arco dell'orbita terrestre, per cui si possono vedere ambedue le fasi.

Chiamando pertanto C, C' le commutazioni di Giove (§ 214), in

cui principiano e terminano di vedersi ambedue le fasi, e ponendo l'arco $MN = 2H$, l'angolo $QSI = 90 - SIQ = G$, e riflettendo che l'angolo $GSI = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{R}$, avremo evidentemente

$$NSG = C = G - H - \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{R} = 90^\circ - H - 2\pi - p + d;$$

$$MSG = C' = G + H - \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{R} = 90^\circ + H - 2\pi - p + d;$$

le quali ci daranno le posizioni dei punti N, M rapporto alla retta SG.

291. *Coroll.* Calcolando i valori di P per i quattro satelliti di Giove, mentre egli trovasi successivamente nel suo afelio, nelle sue distanze medie e nel suo perielio, ottengonsi i seguenti risultamenti

Sat.	Giove afelio	nelle dist. medie	nel perielio	H	C	C'
1	1,7358	1,6557	1,5758	. . . .	. . . .	. . . .
2	1,0980	1,0473	0,9967	. . . .	. . . .	. . . .
3	0,6889	0,6571	0,6252	48° 55′	33° 50′	131° 40′
4	0,3908	0,3726	0,3545	68 7	17 47	154 1

Gli angoli H, C, C' sono calcolati nel supposto delle orbite circolari. Sebbene i numeri precedenti possano ricevere qualche leggero cambiamento per l'inclinazione dell'orbita di Giove all'ecclittica, e per le disuguaglianze, alle quali Giove va sottoposto massime per l'attrazione di Saturno, pure dimostrano non potersi vedere in una stessa eclisse giammai l'immersione e l'emersione del primo satellite; quanto al secondo non potersi osservare il principio e fine dei suoi eclissi che quando Giove trovasi nelle vicinanze del suo perielio; che nel terzo avrà luogo l'osservazione di questi due istanti, se la commutazione di Giove sarà maggiore di 33° o 34°, e minore di 132° circa; e nel quarto se sia questa maggiore di circa 18°, e minore di 154°.

Problema III. Data la latitudine sopra l'orbita di Giove di un satellite in congiunzione, ed il suo moto relativo intorno al centro del medesimo, si domanda la durata dell'eclisse.

292. Sia (*Fig.* 2) ADB la semisezione del cono ombroso alla regione del satellite, che per maggior esattezza supporremo ellittica, e supponiamo che l'asse maggiore AB di questa sezione sia compreso nel piano dell'orbita di Giove. Sebbene questa ipotesi non sia vera, l'errore che si commette è picciolissimo, poichè AB sta nel piano dell'equatore di Giove che al piano dell'orbita è pochissimo inclinato. $\Omega QQ'$ rappresenti una porzione dell'orbita del satellite, che immer-

gesi nell'ombra in Q, e ne sorte in Q'; C sia il centro della sezione; sarà CF tangente della latitudine del satellite in congiunzione, che porremo $= p$; la longitudine del satellite in congiunzione sia $= \varphi$ valutata nell'orbita di Giove; l'angolo percorso dal satellite fra l'immersione e la congiunzione sia $= \psi$, cosicchè la longitudine del satellite nell'immersione sarà $= \varphi - \psi$. Posta la longitudine del nodo $= \omega$, e l'inclinazione $= i$, quantità sempre molto picciola, come dalle osservazioni si farà manifesto, avremo $p = \text{tang}\, i\, \text{sen}\,(\varphi - \omega)$, e però p quantità di primo ordine. La tangente della latitudine del satellite in Q, riguardando ψ come quantità di primo ordine, e trascurando le quantità di terzo ordine, sarà $= p - \frac{dp}{d\varphi}\psi$. Supponendo ora che α sia l'angolo, sotto cui vedesi dal centro di Giove il semiasse maggiore CB, pongasi $CB = \mu\alpha$, $CD = \mu\alpha(1 - E)$, rappresentando E l'appianamento $\frac{10}{177}$; e le coordinate del punto Q saranno $CP = \mu\psi$, $PQ = \mu\left(p - \frac{dp}{d\varphi}\psi\right)$. La equazione dell'ellisse diverrà

$(\alpha^2 - \psi^2)(1 - E)^2 = \left(p - \frac{dp}{d\varphi}\psi\right)$, la quale risoluta coi metodi del secondo grado porge

$$\psi = \left[\frac{p\,dp}{d\varphi} \pm (1-E)\sqrt{\left(\alpha^2(1-E)^2 + \alpha^2\frac{dp^2}{d\varphi^2} - p^2\right)}\right] : \left[(1-E)^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}\right],$$

che al solito trascurando i termini del terzo ordine riducesi alla seguente $\psi = \frac{p\,dp}{d\varphi} \pm \frac{\sqrt{[\alpha^2(1-E)^2 - p^2]}}{1-E}$.

Il doppio segno nel valore di ψ dà l'angolo percorso dal satellite intorno a Giove dall'immersione alla congiunzione, e da questa alla emersione, e particolarmente il segno $+$ sarà relativo all'immersione, ed il segno $-$ all'emersione. L'intero angolo percorso dal satellite intorno a Giove nel piano dell'orbita durante l'ecclisse sarà dunque $= \frac{2\sqrt{[\alpha^2(1-E)^2 - p^2]}}{1-E}$. Se pertanto rappresentiamo per v il moto vero sinodico del satellite nell'unità di tempo, per 2Δ la durata dell'ecclisse, avremo $\Delta = \frac{\sqrt{[\alpha^2(1-E)^2 - p^2]}}{(1-E)v}$ . . . (1)

donde dedurremo $p = (1 - E)\sqrt{(\alpha^2 - \Delta^2 v^2)}$ . . . (2)

La prima di queste due equazioni ci darà la durata dell'ecclisse dietro la latitudine del satellite in congiunzione, ed il suo moto vero relativo intorno a Giove; la seconda viceversa ci farà conoscere la la-

titudine del satellite in congiunzione, se siasi osservato Δ, e conoscansi inoltre α, v.

293. *Coroll.* Si deduce dalle formule di questa proposizione che la longit. del satellite nell'immers. è $= \varphi - \frac{p\,dp}{d\varphi} - \frac{\sqrt{[\alpha^2(1-E)^2 - p^2]}}{1-E}$

nell'emers. $= \varphi - \frac{p\,dp}{d\varphi} + \frac{\sqrt{[\alpha^2(1-E)^2 - p^2]}}{1-E}$

onde sarà la longitudine del satellite nel mezzo dell'ecclisse $= \varphi - \frac{p\,dp}{d\varphi}$; se ora rammentiamo che $p = \text{tang}\, i\, \text{sen}\,(\varphi - \omega)$, sarà $\frac{p\,dp}{d\varphi} = \frac{1}{2}\,\text{tang}^2\, i\, \text{sen}\, 2\,(\varphi - \omega)$, quantità sempre per natura sua molto picciola per la picciolezza di i, e che sparisce nelle vicinanze del nodo. Quindi il satellite troverassi presso a poco in congiunzione nel tempo corrispondente al mezzo dell'ecclisse, ed a quest'epoca la sua longitudine giovicentrica sarà uguale alla longitudine eliocentrica di Giove sulla sua orbita, e ciò tanto più esattamente quanto più vicino al nodo accaderà l'ecclisse.

Problema IV. Esporre il metodo per determinare il moto medio sinodico dei satelliti, la posizione dei nodi, e le inclinazioni delle loro orbite al piano di quella di Giove.

294. 1.° Per determinare il moto medio sinodico dei satelliti intorno a Giove, il metodo più sicuro è di confrontare insieme due congiunzioni fra loro molto remote, e dividere lo spazio di tempo espresso in giorni per il numero delle intere rivoluzioni trascorse. Il quoziente rappresenterà la durata della rivoluzione media sinodica con precisione tanto più grande, quanto maggiore sarà lo spazio di tempo intercetto. Che se vorremo aspirare all'ultima esattezza nel determinare la durata della rivoluzione sinodica, dovremo confrontare insieme due congiunzioni del satellite osservate in uno stesso punto dell'orbita di Giove, ed in conseguenza distanti fra loro di una o più rivoluzioni del pianeta, poichè allora le ineguaglianze del moto del pianeta, che come fra poco vedremo, si trasportano sui moti del satellite, si elidono scambievolmente. Se ora indichiamo per τ il tempo della rivoluzione sinodica ottenuto cogl'indicati confronti, e per n il moto medio diurno sinodico del satellite, avremo $n = \frac{360^\circ}{\tau}$. Se al moto diurno sinodico così ottenuto aggiungasi il moto diurno periodico, siderale ec. del pianeta principale, si otterrà il moto diurno periodico, siderale ec. del satellite.

Questo metodo può agevolmente applicarsi al secondo, terzo e quarto satellite, poichè potendosi per essi dalla terra vedere di una

stessa eclisse l'immersione e l'emersione, la semisomma dei tempi osservati dà presso a poco l'istante della congiunzione (§ 293). Non così per il primo, di cui non può al tempo stesso osservarsi giammai l'immersione e l'emersione. Per questo caso si confrontano insieme due immersioni e due emersioni fra loro molto remote, ed osservate negli stessi punti dell'orbita di Giove. L'intervallo di tempo che le separa diviso per il numero delle rivoluzioni sinodiche trascorse fra le due osservazioni dà la durata di una rivoluzione sinodica. Del resto è inutile avvertire che questi metodi suppongono conosciuta già a un di presso la durata della rivoluzione sinodica, ad oggetto di riconoscere quante intere rivoluzioni sieno comprese dentro il tempo che separa le due congiunzioni, od in generale le due osservazioni confrontate. Ora questa prima nozione tosto deducesi dal confronto di due eclissi consecutivi, per i quali siasi osservata o l'immersione o l'emersione; imperciocchè la differenza dei tempi osservati sarà la cercata rivoluzione sinodica. Che anzi confrontando fra loro le rivoluzioni sinodiche dedotte dalle osservazioni fatte nelle vicinanze dell'afelio e del perielio di Giove, il medio loro darà un valore della media rivoluzione sinodica molto prossimo al vero.

2.° La posizione del piano dell'orbita del terzo e quarto satellite agevolmente deducesi dalle osservazioni; poichè potendosi dalla terra frequentemente e per gran parte dell'anno osservare le loro immersioni ed emersioni, chiaro apparisce che se avremo una lunga serie di eclissi osservati in tutti i punti dell'orbita di Giove, s'incontreranno fra queste eziandio quelli che accadono quando Giove trovasi nei nodi delle loro orbite. Essendo essi pertanto in congiunzione, ossia avendo allora una longitudine uguale a quella di Giove, saranno eziandio nel nodo, e perciò la loro latitudine sopra il piano della sua orbita sarà $= 0$, e quindi per l'equazione (1) § 292 la durata dell'eclisse sarà massima. Scegliendo adunque da una lunga serie di eclissi quelli della più lunga durata, corrisponderanno ai punti dell'orbita di Giove, nei quali cade la linea dei nodi, e quindi la longitudine eliocentrica di Giove nel mezzo dell'eclisse sarà eziandio la longitudine di uno dei nodi, il quale sarà ascendente se la linea, che il satellite sembra percorrere dopo l'emersione, si eleva sopra l'orbita di Giove dalla parte del polo boreale, discendente nel caso contrario.

Suppone questo metodo che l'eclisse della massima durata osservata nella supposta serie delle osservazioni cada precisamente sul nodo, lo che potrebbe per avventura non accadere, e quindi la posizione del nodo riuscirebbe non del tutto bene determinata. Più sicuro è il seguente metodo. Si scelgano due eclissi, i quali sieno di uguale durata, e cadano uno da una parte, l'altro dall'altra del nodo già presso a poco col precedente metodo conosciuto. Essendo di uguale

Digitized by Google

durata corrisponderanno essi dietro l'equazione (2) a due uguali valori di p, uno dei quali sarà positivo corrispondendo ad una latitudine boreale, l'altro sarà negativo, e corrispondente ad una latitudine australe. Avendo quindi il satellite eguali latitudini, si troverà all'epoca delle due osservazioni in eguali distanze dal nodo.

Perciò calcolando per il mezzo delle due ecclissi le longitudini eliocentriche di Giove, che saranno pure le longitudini giovicentriche dei satelliti, la vera posizione del nodo corrisponderà alla semisomma delle due calcolate longitudini, per lo meno fatta astrazione dal moto del nodo, il quale in un corto intervallo è trascurabile. Si potranno in tal guisa far concorrere alla ricerca del nodo tutti gli ecclissi osservati nelle sue vicinanze.

Determinata così la posizione del nodo, ed avendo d'altronde osservato il tempo della massima durata, questo ridotto in gradi col mezzo del moto sinodico darà il valore di α. Quindi per ogni altro ecclisse, di cui siasi osservato l'immersione e l'emersione, l'equazione (2) porgerà il corrispondente valore di p, ossia della tangente della latitudine sopra il piano dell'orbita di Giove. Se pertanto per l'istante della congiunzione si calcoli la longitudine eliocentrica di Giove nella sua orbita, posta questa $= \varphi$, ed appellata ω la longitudine del nodo, verrà l'inclinazione determinata dall'equazione $\text{tang}\, i = \frac{p}{\text{sen}\,(\varphi - \omega)}$, ove è da osservare che sarà i tanto meglio determinato, quanto più l'arco $\varphi - \omega$ si avvicinerà a 90° od a 270°.

Questi metodi assai semplici e spediti per determinare i valori di i e di ω non così facilmente applicare si possono al secondo satellite, per cui ben di rado accade di poter osservare l'immersione e l'emersione, ed impraticabili sono per il primo satellite, rapporto a cui giammai accade di potere fare l'osservazione completa dei suoi ecclissi. Si confrontano insieme per questi satelliti le immersioni che osservare si possono avanti l'opposizione di Giove, con le emersioni che si osservano dopo l'opposizione per dedurre in varj punti dell'orbita di questo pianeta la durata dell'ecclisse. Così quando siensi ottenuti in diversi anni molti valori di Δ, dall'equazione (2) stabilita nel § 292 si deducono le incognite α, i ed ω. In fatti riflettendo che $p = \text{tang}\, i\, \text{sen}\,(\varphi - \omega)$, l'equazione (2) si può porre sotto l'aspetto $\text{tang}\, i\, \text{sen}\,(\varphi - \omega) = (1 - E)\sqrt{(\alpha^2 - \Delta^2 \nu^2)}$, la quale ci porge un metodo abbastanza spedito per determinare α, i, ω, se tre valori di Δ siensi osservati, e d'altronde conoscasi ν, per cui potrassi in questa ricerca prendere il moto medio sinodico del satellite. Che se si avranno molti valori di Δ osservati in diversi punti dell'orbita di Giove, si faranno concorrere tutti nella ricerca di queste incognite affinchè vengano esse con più sicurezza determinate. Ecco poi come stabilire si

dovranno gl'indicati confronti per osservare i valori di Δ. Quando Giove si avvicina alla sua opposizione col Sole, la terra (*Fig.* 1) trovasi nelle vicinanze del punto O; prima pertanto che arrivi in C, ove cessano di essere visibili le immersioni, supponiamo che osservisi un' immersione del primo satellite in I. Entrata quindi in C nel cono $O'CB$, non potrà più vedere l'emersione di quella sera; ma attraversando l'arco CB in 11^h circa, la sera seguente sarà in caso di vedere l'emersione dello stesso satellite dall'ombra in E, poichè in $1^s\ 18^h$ circa egli fa una rivoluzione sinodica. Se adunque accada di osservare l'emersione del primo satellite in E, egli avrà nel tempo fra le due osservazioni intercetto percorso una rivoluzione intorno a Giove più l'arco IE, che in quei punti dell'orbita del pianeta misura l'arco nell'ombra compreso. Togliendo dunque dalla differenza dei tempi osservati in I ed in E la nota rivoluzione sinodica del satellite, si avrà il tempo impiegato a percorrere IE. Si è supposto che le due osservazioni includessero una sola rivoluzione del satellite; che se più rivoluzioni fossero trascorse, in allora dalla differenza dei tempi osservati si toglierebbe il tempo corrispondente al numero delle intere rivoluzioni intercette, ed il residuo sarebbe il tempo opportuno per descrivere IE.

Tutto questo si renderà più chiaro col seguente esempio relativo al primo satellite, la cui rivoluzione sinodica è $= 1^s\ 18^h\ 28'\ 36''$. Le osservazioni sono prese dalla numerosa serie riferita dal soprallodato signor Wargentin negli Atti dell'Accademia di Upsal per l'anno 1742.

An. 1730. Immers. del 1.° satell. osser. a Peckino 6 Gennajo $= 11^h\ 22'\ 20''$
Emersione osser. nello stesso luogo 22 Gennajo $= 11\ \ 54\ \ 15$

Differenza $= 16^s\ \ 0^h\ 31'\ 55''$
Rivoluzioni 9 formano $= 15\ \ 22\ \ 17\ \ 24$

Tempo impiegato a percorrere $IE = 2^h\ 14'\ 31''$
Semidurata dell'eclisse $= \Delta = 1\ \ \ 7\ \ 15\ ,5$

E tale, dietro questa osservazione, sarebbe il valore di Δ, il quale poi non corrisponderà nè alla posizione eliocentrica di Giove del giorno 6, nè a quella del giorno 22, ma bensì ad una posizione intermedia eliocentrica, per la quale a motivo del picciolo moto diurno di Giove senza alcun sensibile errore si potrà prendere la media corrispondente a questi due istanti. Se adunque colle tavole di Giove calcolerassi la sua longitudine eliocentrica per il medio istante di queste due osservazioni, posta questa $= \varphi$, avremo tutto noto a riserva di α, i, ω. Dopo di avere in tal guisa preparate tutte le osservazioni di tal sorta, dall'equazione (2) avremo i valori delle incognite, come sopra abbiamo indicato.

295. *Scolio*. Secondo i risultamenti del signor De-Lambre, le cui tavole presentano il miglior accordo colle osservazioni, le rivoluzioni sinodiche dei satelliti sono le seguenti:

per il primo = $1^s\,18^h\,28'\,35'',9454$; per il secondo = $3^s\,13^h\,17'\,53'',7301$
per il terzo = 7 3 59 35 ,8251; per il quarto = 16 18 5 7 ,0210.

Quanto alle inclinazioni delle orbite, ed alle posizioni dei loro nodi s'incontrò da principio molta difficoltà a determinarli con qualche precisione a motivo della incertezza delle osservazioni e della variazione continua di questi elementi. Ciò non pertanto Wargentin determinò col confronto di molte osservazioni la posizione delle orbite dei satelliti, e dimostrò che il primo satellite mantiene all'orbita di Giove un'inclinazione costante di 3° 18′ 38″; che l'inclinazione del secondo satellite era variabile, passando nel periodo di 30 anni per tutti i valori intermedj fra 3° 46′ 0″ e 2° 46′ 0″. La inclinazione del terzo satellite da Maraldi e da Wargentin fu scoperta variabile; le sue variazioni sembrarono sottoposte ad un periodo di 132 anni, nel qual tempo va oscillando fra 3° 2′ 0″ e 3° 25′ 57″, la minima inclinazione avendo avuto luogo nell'anno 1697, e nel 1763 la massima 3° 25′ 57″. L'inclinazione del quarto satellite fu riconosciuta sensibilmente costante. Bradley la stimò di 2° 42′, Wargentin nel 1750 la ritrovò = 2° 39′, e nel 1781 dal confronto delle osservazioni degli ultimi cinque anni la ritrovò fra 2° 38′ e 2° 40′. Maraldi la fissava = 2° 36′.

Le posizioni dei nodi dei satelliti sono pure sottoposte ad annui cambiamenti, e ad alcune librazioni che non isfuggirono alla sagacità degli Astronomi, e specialmente del signor Wargentin. Nelle sue ultime tavole, dal celebre La-Lande pubblicate nel 1771, egli fissava la posizione dei nodi per il 1760 come segue:

Satelliti.	I.	II.	III.	IV.
Longit. del nodo ascend. =	$10^s\,14°\,30'$	$10^s\,13°\,45'$	$10^s\,14°\,24'$	$10^s\,16°\,39'$
Moto ann. sull'orb. di Giove	0′ 0″	2′ 3″	0′ 0″	4′ 19″
Semid. degli eccl. nei nodi =	1^h 7′ 55″	$1^h\,25'\,40''$	$1^h\,47'\,0''$	$2^h\,23'\,0''$

296. Sarebbe stato molto difficile aggiungere col confronto delle sole osservazioni qualche cosa alla esattezza delle tavole, se colla teoria dell'attrazione i celebri geometri Bailly, La-Grange e La-Place non avessero rintracciato la causa delle singolari anomalie, e disuguaglianze che si osservano nei movimenti dei satelliti, nelle loro inclinazioni, e nella posizione dei loro nodi. Ma al signor de La-Place in ispecialità siamo debitori dei nuovi teoremi, e delle più felici spiegazioni delle variazioni osservate sulla posizione delle orbite dei satelliti. Giusta una tale teoria, l'orbita del primo satellite si muove con incli-

nazione costante in un piano fisso condotto costantemente fra l'equatore di Giove e l'ecclittica per la loro scambievole intersezione, ed essendo questo piano fisso inclinato all'equatore di 20″ centesimali, ossia 6″,5 sessagesimali, così si può supporre che questo satellite si aggiri intorno a Giove nel piano del suo equatore.

L'orbita del secondo satellite si muove uniformente con un'inclinazione costante in un piano fisso condotto fra l'equatore e l'orbita di Giove per la loro scambievole intersezione. Il piano fisso fa con l'equatore di Giove un angolo di 1′ 5″,1; mentre l'orbita del satellite è a questo piano fisso costantemente inclinata di 0 27′ 49″,2, ed i nodi della medesima hanno sul piano fisso un moto retrogrado, in virtù di cui compiono una rivoluzione in $29^{an},9142$. Questo moto retrogrado dei nodi serve a spiegare le variazioni dell'inclinazione all'orbita di Giove osservate dal Wargentin, e determinate con il prossimo periodo di 30 anni, e facilmente dalla Trigonometria si potrebbero determinare i limiti di queste variazioni.

L'orbita del terzo satellite si muove uniformemente con l'inclinazione costante di 0° 12′ 21″,2 sopra un piano fisso condotto fra l'equatore e l'orbita di Giove per la loro intersezione scambievole, il quale sia all'equatore inclinato di 0° 5′ 1″,7, ed i suoi nodi hanno sul piano fisso un movimento tropico, in virtù di cui compiono una rivoluzione in 141,739 anni.

In fine l'orbita del quarto satellite si muove con una inclinazione costante di 14′ 58″,2 in un piano fisso inclinato all'equatore di Giove di 0° 24′ 4″ condotto fra l'equatore e l'orbita per la loro scambievole intersezione, ed i suoi nodi hanno su questo piano un moto retrogrado, il cui periodo è di 531 anni. In virtù di questo movimento l'inclinazione dell'orbita del quarto satellite al piano dell'orbita di Giove, varia continuamente entro certi limiti, e fra il 1680 ed il 1760 trovossi nei suoi limiti, e perciò fu reputata all'incirca costante. In seguito ha principiato ad aumentare, e le osservazioni si accordano con la teoria (Vedasi La-Place *Exposition du système du monde* pag. 247 e seg., IV ediz.).

Problema V. Data l'inclinazione di un satellite all'orbita di Giove, il suo movimento periodico, e supposti conosciuti gli elementi dell'orbita di questo pianeta, si domanda il tempo della congiunzione vera rapporto alla congiunzione media.

297. Si rappresenti il moto diurno periodico di Giove per n, la sua longitudine media al principio da cui contasi il tempo sia $= \epsilon$, il moto diurno periodico del satellite per n', la sua longitudine media per l'origine del tempo sia $= \epsilon'$, τ il tempo della congiunzione media. Sarà al tempo τ la longitudine media di Giove $= \epsilon + n\tau$, e quella del satellite sarà $= \epsilon' + n'\tau$. Dovendo ora nella congiunzione

media uguagliarsi queste due quantità, avremo $\iota + n\tau = \iota' + n'\tau$, donde rilevasi $\tau = \frac{\iota - \iota'}{n' - n}$.

Sia ora v la longitudine vera di Giove nella sua orbita, π la longitudine del suo perielio, v' la longitudine vera del satellite nella sua orbita, che da principio potrassi supporre circolare, i l'inclinazione di essa al piano dell'orbita di Giove, $v_{,}$ la longitudine del satellite nel piano di quest'ultima orbita, t il tempo della congiunzione vera cercata, ω la longitudine del nodo dell'orbita del satellite, χ la somma delle disuguaglianze del moto del satellite risultanti o dalla eccentricità della sua orbita, o dalle estranee attrazioni. Se nella serie del § 89 sostituiscasi in luogo di e il suo valore relativo all'orbita di Giove, e si osservi che $z = \iota + nt - \pi$, troveremo

$$v = 1 + nt + 331',16 \operatorname{sen}(\iota + nt - \pi) + 9',97 \operatorname{sen} 2(\iota + nt - \pi) + 0',41 \operatorname{sen} 3(\iota + nt - \pi) \ldots$$

Per determinare $v_{,}$ avremo in primo luogo $v' = \iota' + n't + \chi$; quindi il triangolo sferico rettangolo che si forma abbassando dal luogo del satellite un arco perpendicolare sull'orbita di Giove darà, come nel § 149, $\operatorname{tang}(v_{,} - \omega) = \cos i \operatorname{tang}(v' - \omega)$, la quale in virtù della serie (5) (Trig. IV) diviene $v_{,} = v' - R' \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i \operatorname{sen}(2v' - 2\omega)$, ove si trascurano i termini superiori, come picciolissimi per l'esiguità delle inclinazioni, R' essendo il numero dei minuti contenuti nel raggio, ad oggetto di ridurre $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i$ a minuti di grado. Sostituendo ora in questa equazione il valore di v', e trascurando nel secondo termine del secondo membro la quantità χ, come insensibile per essere egli stesso moltiplicato per $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i$, avremo

$$v_{,} = \iota' + n't + \chi - R' \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 2(\iota' + n't - \omega).$$

Nel momento della congiunzione vera, dovendo essere $v = v_{,}$ uguagliando i loro valori, ed osservando che $\frac{\iota - \iota'}{n' - n} = \tau$, otterremo

$$\left.\begin{aligned} t = \tau &+ \frac{331',16}{n' - n} \operatorname{sen}(\iota + nt - \pi) + \frac{9',97}{n' - n} \operatorname{sen} 2(\iota + nt - \pi) \\ &+ \frac{0',41}{n' - n} \operatorname{sen} 3(\iota + nt - \pi) - \frac{\chi}{n' - n} + \frac{R' \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i}{n' - n} \operatorname{sen} 2(\iota' + n't - \pi) \end{aligned}\right\} (A)$$

dalla quale equazione dovrassi dedurre il valore di t. A tale oggetto ci serviremo del metodo del signor La-Grange da noi riferito al § 87; la serie (B) dello stesso luogo darà, non tenendo conto che del termine di primo ordine diviso per $(n' - n)^2$, e trascurando gli altri, come troppo più piccioli,

$$\left.\begin{array}{l} t=\tau+\frac{331',16}{n'-n}\operatorname{sen}(\iota+n\tau-\pi)+\frac{9',97}{n'-n}\operatorname{sen}2(\iota+n\tau-\pi)+\frac{0',41}{n'-n}\operatorname{sen}3(\iota+n\tau-\pi) \\ +\frac{n(331',16)^2}{2R'(n'-n)^2}\operatorname{sen}2(\iota+n\tau-\pi)+\frac{R'\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}i}{n'-n}\operatorname{sen}2(\iota'+n'\tau-\omega)-\frac{\chi}{n'-n} \end{array}\right\}(B)$$

Per ridurre questa formula a numeri osservo che $n'-n$ rappresenta il moto medio diurno sinodico del satellite, il quale se esprimasi in minuti di grado, indi sostituiscasi nel secondo membro della precedente equazione, porgerà i coefficienti dei seni espressi in parti di giorno, e se questi coefficienti si moltiplichino poscia per 1440, numero dei minuti contenuti in un giorno, verranno i coefficienti espressi in minuti di tempo. Dietro i tempi delle rivoluzioni sinodiche dei satelliti sopra riferiti, troveremo rispettivamente per il primo, secondo, terzo e quarto

$n'-n=12204',349$; $=6077',497$; $=3014',071$; $=1289',281$.

Assumendo il moto diurno di Giove $=4',985$, e per i la media inclinazione dei satelliti, ponendo inoltre per brevità l'anomalia media di Giove al tempo della congiunzione media $\iota+n\tau-\pi=z$, e la quantità $\iota'+n'\tau-\omega$, che rappresenta la distanza del satellite dal nodo nella stessa congiunzione media, od anche la distanza media di Giove dal nodo $=H$, eseguiti gl'indicati calcoli numerici, avremo

(1) $t=\tau+39',074\operatorname{sen}z+1',177\operatorname{sen}2z+0',048\operatorname{sen}3z+0',339\operatorname{sen}2H-0',11799\,\chi$
(2) $t=\tau+78,465\operatorname{sen}z+2,363\operatorname{sen}2z+0,097\operatorname{sen}3z+0,662\operatorname{sen}2H-0,23694\,\chi$
(3) $t=\tau+158,215\operatorname{sen}z+4,776\operatorname{sen}2z+0,196\operatorname{sen}3z+1,308\operatorname{sen}2H-0,47776\,\chi$
(4) $t=\tau+369,871\operatorname{sen}z+11,204\operatorname{sen}2z+0,458\operatorname{sen}3z+1,977\operatorname{sen}2H-1,11690\,\chi$

Queste formule danno il tempo della congiunzione vera dei satelliti, data che fosse la congiunzione media. Se invece ridurremo a numeri dietro i dati precedenti i coefficienti dell'equazione (A), ponendo l'anomalia media di Giove per l'istante della congiunzione vera $=z'$, e l'angolo $\iota'+n't-\omega$, per cui può anche prendersi la distanza vera di Giove dal nodo del satellite $=k$, otterremo per i quattro satelliti le seguenti formule numeriche, che danno il tempo della congiunzione media τ espresso per l'osservata t.

(1)' $\tau=t-39',074\operatorname{sen}z'-1',176\operatorname{sen}2z'-0',048\operatorname{sen}3z'-0',339\operatorname{sen}2k+0',11799\,\chi$
(2)' $\tau=t-78,465\operatorname{sen}z'-2,362\operatorname{sen}2z'-0,097\operatorname{sen}3z'-0,662\operatorname{sen}2k+0,23694\,\chi$
(3)' $\tau=t-158,215\operatorname{sen}z'-4,763\operatorname{sen}2z'-0,196\operatorname{sen}3z'-1,308\operatorname{sen}2k+0,47776\,\chi$
(4)' $\tau=t-369,871\operatorname{sen}z'-11,135\operatorname{sen}2z'-0,458\operatorname{sen}3z'-1,977\operatorname{sen}2k+1,11697\,\chi$

nelle quali formule il numero χ esprime l'aggregato delle disuguaglianze del movimento circolare dei satelliti espresse in minuti di grado, sia che queste dipendano da una eccentricità delle orbite dei satelliti, in virtù della quale esse piuttosto sieno altrettante ellissi che circoli, sia che dipendano dalle loro attrazioni scambievoli.

298. *Coroll.* Dalle formule esposte nella precedente proposizione deducesi il modo che si deve seguire per costruire, dietro le osservazioni, le tavole dei satelliti di Giove, le quali si possano impiegare al calcolo dei loro ecclissi, soli fenomeni che si osservino, e dai quali possa la geografia ritrarre molto vantaggio. In primo luogo, qualora da un ecclisse osservato siasi coi metodi del § 293 dedotto il tempo della congiunzione vera, si troverà il tempo della congiunzione media col mezzo delle formule (1)′, (2)′ ec. trascurando le quantità χ, che sono incognite. Presa quindi questa congiunzione media per epoca, se gli aggiungerà successivamente il tempo della rivoluzione sinodica del satellite, e si formeranno le altre congiunzioni medie per i tempi successivi, accanto ai quali scriveransi eziandio i corrispondenti valori di z e di H. Si prepareranno in seguito due tavole aventi per argomento gli angoli z ed H, dalle quali si possano prendere le correzioni che si devono fare alla congiunzione media per ottenere facilmente la congiunzione vera dietro le formule (1), (2), (3), (4) trascurando sempre il valore di χ.

Per agevolare poscia il calcolo del principio e fine dell'ecclisse si calcoli eziandio per ogni distanza di Giove dal nodo dei satelliti il valore di Δ, dietro la formula (1) del § 292, la quale, riflettendo che $p = \text{tang}\, i \,\text{sen}\, H$, e $v = \frac{n' - n}{1440'}$ prossimamente, qualora prendasi il minuto per unità dei tempi, si cangerà in

$$\Delta = \frac{1440' \sqrt{[\alpha^2 (1 - E)^2 - \text{tang}^2\, i\, \text{sen}^2\, H]}}{(1 - E)(n' - n)},$$

ove α rappresenta la sezione dell'ombra alla regione del satellite ridotta in parti di raggio, che si determina coll'osservazione, come sopra si è indicato. Aggiunto all'ottenuto valore di t, o sottratto da esso il valore di Δ, dato da questa tavola coll'argomento H, si avrà il vero istante dell'emersione o dell'immersione.

299. *Scolio.* Costruite in tal guisa le tavole dei satelliti, se gl'istanti calcolati delle immersioni e delle emersioni loro coincideranno in ogni punto coi tempi osservati, sarà confermata la teoria del loro moto circolare, e nel tempo stesso verrà dimostrato non essere essi sottoposti a notabili disuguaglianze per le straniere attrazioni. Numerosi confronti delle osservazioni con tavole stabilite all'incirca sopra i precedenti principj hanno fatto riconoscere delle forti ineguaglianze, le quali più da vicino esaminate si possono a due classi ridurre, la prima delle quali comprende quelle che sono a tutti i satelliti comuni, la seconda poi quelle che sono a ciascheduno particolari.

Quanto alle disuguaglianze proprie a ciascheduno satellite, esse sono in parte dipendenti dalla loro scambievole attrazione, la quale produce

nei loro movimenti molte equazioni che negli ecclissi si semplificano, e si rifondono in una equazione, il cui periodo fu da Wargentin dietro l'osservazione empiricamente determinato di $437^{g},659$, ed in parte dalla eccentricità delle loro orbite, che essendo insensibile nel primo e secondo satellite, produce nel terzo un'equazione dell'orbita di circa 10′, e nel quarto di 55′. Le eccentricità e le posizioni degli assi maggiori del terzo e quarto satellite sono variabili, e la sola teoria dell'attrazione può rendere ragione di queste continue oscillazioni e delle equazioni che da Wargentin vennero empiricamente scoperte. Che anzi mostrandone essa molte altre più picciole somministra il mezzo di dare alle loro tavole quella perfezione, a cui sono state ricondotte mercè le cure dell'astronomo signor De-Lambre. Noi pertanto rimandando i nostri lettori alla Meccanica celeste del signor La-Place, ci contenteremo di fare qui un cenno di quella disuguaglianza, che è al movimento di tutti i satelliti comune, e che da principio è stata scoperta mediante le osservazioni degli ecclissi del primo satellite, nel quale per la celerità del suo movimento tali fenomeni accadono più frequentemente, e le disuguaglianze più facilmente si riconoscono. Avendo pertanto formate le tavole del primo satellite, confrontando con esse le sue congiunzioni dedotte dalle osservazioni degli ecclissi che accadevano quando la terra trovavasi nelle vicinanze del punto O (*Fig.* 1) mentre Giove era in opposizione con quelle dedotte dagli ecclissi osservati verso la congiunzione in F, si riscontrò costantemente che le congiunzioni osservate verso l'opposizione differivano dalle calcolate di circa 16 minuti di tempo di meno, che verso la congiunzione di Giove col Sole. Romer nell'anno 1675 ebbe la felice idea di attribuire questa differenza osservata al moto progressivo della luce. Suppose egli che sebbene la celerità della luce fosse grandissima, pure impiegasse all'incirca 8 minuti a descrivere uno spazio uguale alla distanza della terra dal Sole. Dietro questa supposizione, se le tavole del moto dei satelliti saranno in modo disposte che coincidano con l'osservazione, essendo la terra verso il punto O, il principio di un ecclisse osservato non differirà allora dal calcolato. Ma trovandosi la terra verso il punto F, il principio dell'ecclisse osservato ritarderà sopra il calcolato del tempo opportuno alla luce per descrivere il diametro dell'orbita terrestre. In generale è facile concepire che se γ rappresenta il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza media della terra dal Sole, che porremo $= 1$, e se d rappresenta la distanza del satellite dalla terra al momento dell'immersione, sarà γd il tempo impiegato dalla luce a giungere dal satellite a noi, e perciò mentre osserviamo il principio o fine dell'ecclisse, egli ha realmente avuto luogo ad un istante anteriore di γd. Risulta da ciò, che per avere il tempo della vera congiunzione media di un satellite dedotta

dall' osservazione, dovremo toglierne la quantità γd, e se questa congiunzione prendasi poi per epoca nella costruzione delle tavole dei satelliti, dovremo poscia ad ogni fase calcolata coi precetti delle precedenti proposizioni aggiungere la quantità γd per farla coincidere con l' osservazione. *Questa quantità γd, variabile a motivo della distanza del satellite dalla terra sempre diversa, appellasi dagli Astronomi equazione della luce.* Essa riducesi in tavole dipendenti dalla posizione della terra e di Giove, e s' impiega per tutti i satelliti. Il numero γ, dietro la discussione di un immenso numero di ecclissi del primo satellite, e dietro alcune osservazioni sulle stelle fisse, di cui parleremo ben presto, viene dal signor De-Lambre stabilito $= 493'',2$. Ciò premesso, vediamo come si possa formare una tavola dell' equazione della luce.

Problema VI. Esprimere l' equazione della luce per una serie convergente.

300. Per facilitare la soluzione di questo problema noi supporremo che Giove ed i satelliti si muovano nel piano stesso dell' ecclittica, sebbene ciò non sia rigorosamente vero, pure picciola essendo l' inclinazione dell' orbita di Giove, ben si vede che in questo argomento l' errore sarà trascurabile. Posto ciò, sia la distanza di Giove dal Sole $= r$, della terra dal Sole $= R$, del satellite da Giove $= \rho$. Sia inoltre la longitudine eliocentrica di Giove $= l$, della terra $= L$, la longitudine geocentrica di Giove $= l'$, la sua distanza dalla terra $= r'$, d la distanza del satellite dalla terra in congiunzione. Sarà in primo luogo . . . $d = r' + \rho \cos(l' - l)$ . . . (1)

In fatti rappresenti (*Fig.* 4) S il centro del Sole, G quello di Giove, L quello del satellite in congiunzione, T il centro della terra, e sieno tutti questi punti nel piano dell' ecclittica. Avremo per le denominazioni stabilite $TL = d$, $TG = r'$, $GL = \rho$, $SGT = l' - l$; e però il triangolo TGL darà $d^2 = r'^2 + 2 r' \rho \cos(l' - l) + \rho^2$, dalla quale estraendo la radice quadrata, e trascurando i termini dipendenti da ρ^2, come picciolissimi, si ottiene $d = r' + \rho \cos(l' - l)$.

Se nelle formule del § 242 num. 2.° ponghiamo le latitudini $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, sostituiti i valori di P e di Q, avremo

$$\tang(l' - l) = \frac{R \operatorname{sen}(l - L)}{r - R\cos(l - L)};$$

$$r' = \frac{r - R\cos(l - L)}{\cos(l' - l)} = [r - R\cos(l - L)]\sqrt{[1 + \tang^2(l' - l)]}.$$

Io osservo ora che $l' - l$ è sempre quantità non molto grande. In fatti, ponendo le orbite circolari, sarebbe $R = 1$, $r = a = 5,2028$, e cercando in questa ipotesi il massimo valore di $\tang(l' - l)$, age-

volmente ritroverassi $\tang(l'-l)=\frac{1}{\sqrt{[(a-1)(a+1)]}}$, donde deducesi $l'-l=11^\circ\,5'$. Sebbene le orbite non sieno circolari, pochissimo allontanandosi dal circolo, il valore massimo di $l'-l$ poco si allontanerà da questo limite. Ne segue di qui che nell'equazione (1), avendo riguardo alla picciola distanza ρ dei satelliti dal centro di Giove, potremo porre $\cos(l'-l)=1$, di modo che basterà svolgere in série il valore di r'.

A tale oggetto, per brevità ponendo $l'-l=P$, $l-L=C$, avremo $r'=(r-R\cos C)(1+\frac{1}{2}\tang^2 P-\frac{1}{8}\tang^4 P+\ldots)$, ove si trascurano le potenze superiori a $\tang^4 P$, come insensibili. Se pertanto si svolge in serie $\tang P$ e le sue potenze, trascurando i termini divisi per r^4, r^5 ec., fatte le opportune riduzioni otterrassi

$$r'=r+\frac{R^2}{4r}+\frac{R^4}{64r^3}-\left(R-\frac{R^3}{8r^2}\right)\cos C-\left(\frac{R^2}{4r}-\frac{R^4}{16r^3}\right)\cos 2C$$
$$-\frac{R^3}{8r^2}\cos 3C-\frac{5R^4}{64r^3}\cos 4C \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sia ora la distanza media di Giove dal Sole $=a$, l'eccentricità della sua orbita $=e$, la distanza media della terra dal Sole $=1$, l'eccentricità della sua orbita $=e'$. Trascurando le terze potenze di e, e le seconde di e', avremo per il § 88

$$r=a(1+\tfrac{1}{2}e^2)-ae\cos z-\tfrac{1}{2}ae^2\cos 2z\ldots;\ R=1-e'\cos S,$$

z ed S rappresentando l'anomalia di Giove e della terra.

Se si sostituiscono questi valori nell'equazione (2), trascurando le quantità dell'ordine $\frac{e^2}{a^2}$, $\frac{e}{a^3}$, $\frac{e'}{a^3}$, $\frac{ee'}{a}$, come molto picciole, fatte le opportune riduzioni, si ottiene

$$r'=a+\frac{1}{4a}+\frac{ae^2}{2}+\frac{1}{64a^3}-\left(1-\frac{1}{8a^2}\right)\cos C-\left(\frac{1}{4a}-\frac{1}{16a^3}\right)\cos 2C$$
$$-\frac{1}{8a^2}\cos 3C-\frac{5}{64a^3}\cos 4C-\left(ae-\frac{e}{4a}\right)\cos z-\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^2}{4a}\right)\cos 2z-\frac{e'}{2a}\cos S$$
$$+\left(e'-\frac{3e'}{8a^2}\right)\cos S\cos C+\frac{e'}{2a}\cos S\cos 2C+\frac{3e'}{8a^2}\cos S\cos 3C$$
$$+\frac{e}{4a^2}\cos z\cos C-\frac{e}{4a}\cos z\cos 2C-\frac{e}{4a^2}\cos z\cos 3C-\frac{e^2}{4a}\cos 2z\cos 2C.$$

Moltiplicando questo valore per $493'',2$, e ponendo per a, e, e' i loro valori presi dal quadro del sistema planetario, dove si ha $a=5,20279$, $e=0,04818$, $e'=0,01678$, si troverà

$$\text{Eq. del. luc.} = 2592'',75 + 493'',2\,\rho - 122'',49 \cos z - 2'',92 \cos 2z - 0'',80 \cos S$$
$$- 490'',93 \cos C - 23'',48 \cos 2\,C - 2'',28 \cos 3\,C - 0'',27 \cos 4\,C$$
$$+ 8'',16 \cos S \cos C + 0'',80 \cos S \cos 2\,C + 0'',11 \cos S \cos 3\,C$$
$$+ 0'',22 \cos z \cos C - 1'',14 \cos z \cos 2C - 0'',22 \cos z \cos 3C - 0'',05 \cos 2z \cos 2C,$$

la quale è sotto un aspetto comodissimo per essere ridotta in tavole.

Egli è da notarsi che il termine $2592'',75 + 493'',2\,\rho$ essendo per ogni satellite costante, sarà contenuto nell'epoca delle congiunzioni medie, e non potrà essere dalle osservazioni manifestato; i due termini dipendenti da z possono riunirsi coi termini analoghi delle equazioni (1), (2), (3), (4) del § 297. Così l'equazione della luce potrà essere ridotta in tavole semplici e comuni per tutti i satelliti dipendenti da C, S, z, la forma delle quali può variarsi a piacere. Comodissima in particolare riesce la forma adottata dal signor De-Lambre, di cui può vedersi la spiegazione nella prefazione alla nuova edizione delle sue tavole fatta in Parigi nell'anno 1817.

Problema VII. Determinare ad un istante qualunque la posizione dei satelliti rapporto al centro di Giove.

301. Sebbene facilissima sia la soluzione trigonometrica di questo problema, noi a motivo della sua minore importanza qui non riferiremo se non se la seguente costruzione geometrica dovuta al signor Hodierna, e generalmente adottata dagli Astronomi. Rappresenti (*Fig.* 3) $\Upsilon\, S\, T\, \Omega$ il cielo stellato, quale sarebbe veduto dal centro di ♃, ed $\Upsilon\, \Omega$ sia la linea degli equinozj. Si divida questo in gradi secondo la direzione $\Upsilon\, T\, \Omega$ ponendo 0° in Υ, e 180° in Ω, ed il circolo $a\,h\,b$ rappresenti l'orbita di un satellite, che sarà l'orbita del primo, se il suo raggio a♃ fosse $= 5,7$ preso il raggio di Giove $= 1$. Per l'istante dato si calcolino le longitudini giovicentriche del Sole, della terra e del satellite mediante le tavole astronomiche dei loro movimenti. Sarà la longitudine giovicentrica del Sole uguale alla longitudine eliocentrica di Giove aumentata di 180°, e la longitudine giovicent. della terra = longit. geocent. di ♃ + 180°. Per trovare la longitud. giovicentrica del satellite si calcoli, mediante le tavole de' suoi eclissi il tempo della sua prossima congiunzione precedente, si noti la differenza fra esso ed il dato istante, ed esprimasi in giorni e parti di giorno, indi si moltiplichi per il moto diurno periodico del satellite. Aggiungendo il prodotto alla longitudine eliocentrica di Giove nel tempo della congiunzione, che era pure in allora la longitudine giovicentrica del satellite, avrassi la sua longitudine giovicentrica rapporto all'equinozio, per lo meno posto il suo moto uniforme. Siano $\Upsilon\, H$, $\Upsilon\, S$, $\Upsilon\, T$ le longitudini del satellite, del Sole e della terra. Condotta la linea H♃, sarà h la posizione del satellite nella sua orbita, e dal punto h abbassata la perpendicolare $h\,g$ sulla $A\,B$ normale a T♃,

sarà g la posizione apparente del satellite rapporto al centro di Giove. In fatti essendo il semicircolo $a h b$ dalla terra T situata in una grandissima distanza ortograficamente rappresentato nel diametro $a b$, sarà il punto h rappresentato nel punto g. Su questo principio è fondato l'uso del giovilabio del signor Cassini, che può vedersi descritto nell'Astronomia del signor La-Lande (Tom. III. 3054, terza ediz.).

Scolio. In questa costruzione si trascurano le latitudini dei satelliti e del pianeta sopra il piano dell'eclittica, le quali essendo sempre molto picciole, non inducono differenze sensibili nelle loro configurazioni. Se però si desiderassero con maggior precisione, si potranno esse sempre ottenere da alcune tavolette che il signor De-Lambre ha pubblicato nella *Connoissance des temps* pel 1808.

Uso degli eclissi dei satelliti di Giove nel determinare la longitudine geografica dei diversi luoghi. Loro diametri.

302. Gli eclissi dei satelliti di Giove si prestano a determinare le longitudini geografiche con quella stessa facilità, con cui si prestano gli eclissi di Luna. Imperciocchè quando un satellite perde la sua luce entrando nell'ombra, egli la perde al tempo stesso per tutti gli abitatori della terra. Se adunque due abitatori situati sotto due diversi meridiani osserveranno l'immersione o l'emersione di uno stesso satellite, la differenza dei tempi osservati ridotta in gradi a ragione di 15° per ogni ora porgerà la differenza delle loro longitudini, purchè sieno gli orologi regolati ambedue al tempo vero od al tempo sidereo. Ciò rendesi manifesto da quanto si è detto nel § 183 in proposito degli eclissi della Luna.

La facilità con cui dagli eclissi dei satelliti di Giove si ottengono le longitudini geografiche, e la loro frequenza ha impegnato gli Astronomi a prenunziare questi fenomeni nelle Effemeridi. La perfezione delle loro tavole permette che si possa ormai riguardare un eclisse calcolato con cura tanto sicuro, quanto se fosse direttamente osservato. Perciò se in un qualche luogo incognito accade di poter osservare o un'immersione od un'emersione, confrontato il tempo osservato con quello della corrispondente fase calcolata sulle tavole del signor De-Lambre costruite pel meridiano di Parigi, si otterrà direttamente la longitudine del luogo incognito rapporto a Parigi. Le eclissi del primo satellite in particolare sono di gran giovamento alla Geografia, poichè essendo egli dotato di una grande celerità, l'incertezza prodotta dalla penombra e dal diametro dei satelliti è in esso minore che negli altri. Del resto le longitudini appoggiate sulle osservazioni di questo genere non devono essere riguardate come molto esatte, in grazia della somma difficoltà che vi è ad apprezzare il giu-

Digitized by Google

sto istante, in cui i satelliti si perdono di vista, quando entrano nell'ombra, e perciò non si adoperano che in mancanza di occultazioni di stelle e di ecclissi di Sole.

303. Gli ecclissi dei satelliti hanno pure somministrato il mezzo di potere stimare il loro diametro. Con qualunque cannocchiale si osservino essi, rimangono sempre sì piccioli che non si possono direttamente misurare se non con grande difficoltà. Di tutti i tentativi fatti per ottenere la loro grandezza, quello da Bailly immaginato, e che può vedersi descritto negli Atti dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1771, conduce a risultamenti soddisfacenti. Egli applica ad un buon cannocchiale un diaframma per modo proporzionato che la luce del satellite venga indebolita a segno che per un altro minimo indebolimento si renda invisibile. Preparato così il cannocchiale, osserva l'immersione del satellite notandone il tempo. Quando il satellite si perde allora di vista non è tutto immerso nell'ombra, ma soltanto una sua porzioncella. Levato quindi il diaframma, e rivolto a Giove il cannocchiale vedesi il satellite che continuando ad avanzarsi nell'ombra diviene di più in più debole, finchè sparisca del tutto, lo che accade anche prima che tutto sia nell'ombra. Dal moto del satellite, e dal rapporto fra la quantità della luce ricevuta dal cannocchiale col diaframma e senza il diaframma deduce il signor Bailly il suo diametro. Egli ha trovato in tal guisa che i diametri dei satelliti veduti dal centro di Giove sarebbero pel 1.° = 60′ 20″, pel 2.° = 29′ 42″, pel 3.° = 22′ 28″ e pel 4.° = 9′ 39″. I seni della metà di questi angoli moltiplicati per le distanze dei satelliti dal centro di Giove in raggi del pianeta, daranno i loro raggi in parti di quello del pianeta. In questi ultimi tempi i signori Schroeter, Harding e Struwe hanno misurato in altri modi gli stessi diametri. I primi due (*Mon. Corr. XXIII. pag.* 216.) hanno trovato i diametri veduti dal centro di Giove come segue: 1.° sat. = 33′ 16″; 2.° sat. = 17′ 13″; 3.° sat. = 18′ 59″; 4.° sat. = 7′ 32″. Il signor Struwe (*Astr. Nach. VI. pag.* 392.) alla dist. media di Giove 5,20279 trova i loro diametri per ordine nel seguente modo 1″,015; 0″,911; 1″,488; 1″,273. Se questi numeri dividansi per le distanze medie osservate da Pond riferite sopra al § 284, e riducansi i quozienti in secondi, si avranno i diametri dei satelliti veduti dal centro di Giove come segue: 1.° sat. = 31′ 24″; 2.° sat. = 17′ 43″; 3.° sat. = 18′ 8″; 4.° sat. = 8′ 49″.

Satelliti di Saturno ed Urano.

304. Dopo tutto quello che abbiamo detto dei satelliti di Giove poco ci resta a dire in particolare dei satelliti di Saturno e di Urano. Intorno a Saturno aggiransi, come intorno ad un centro partico-

lare, sette satelliti in tempi e distanze da noi riferite nel quadro del sistema planetario, dei quali uno fu scoperto da Hugenio nel 1655, quattro da Cassini negli anni 1671, 1672, 1684, e i due più vicini e più difficili a vedersi furono da Herschel scoperti nel 1789. Le osservazioni di questi satelliti, a motivo della loro picciolezza, e della gran distanza di Saturno da noi, riescono molto difficili. Il primo e secondo non possono vedersi che con fortissimi telescopj, quali sono quelli dei quali era in possesso il signor Herschel. Il terzo e quarto sono appena visibili con gli ordinarj migliori telescopj e cannocchiali. Il quinto e sesto facilmente si osservano, e si riconoscono il più delle volte per l'intera loro rivoluzione. Il settimo più grande di tutti, a riserva del sesto, e più lontano dal centro di Saturno, si osserva assai bene quando è a ponente di Saturno; egli è debolissimo e per lo più invisibile mentre trovasi ad oriente del medesimo. Questa particolarità del settimo satellite sembra non potersi ad altro attribuire che alle sue macchie, le quali ce lo rendono invisibile nella parte orientale della sua orbita. In questa ipotesi dovrebbe essere dotato di un moto di rotazione intorno al suo centro di una durata uguale a quella intorno a Saturno, la qual cosa avendo luogo nella Luna, e nei satelliti di Giove, sembra dimostrare che sia legge generale dei satelliti il ruotare intorno ai loro centri in un tempo che sempre uguagli quello della loro rivoluzione periodica intorno al pianeta principale.

Quanto alla posizione delle orbite dei satelliti di Saturno, le osservazioni hanno dimostrato che i primi sei avvolgonsi da occidente in oriente in orbite sensibilmente circolari, e situate all'incirca nel prolungamento del piano dell'anello. Così vedute dalla terra devono apparire altrettante ellissi, la forma delle quali andrà variando secondo le stesse leggi dell'anello, e le formule da noi date ai §§ 280-281 per determinare la figura degli anelli di Saturno rappresenteranno eziandio la figura delle orbite dei suoi primi sei satelliti, solo che per e intendansi sostituiti i raggi delle loro orbite. Il settimo satellite poi muovesi in un piano da quello dell'anello alcun poco differente, e per avere la figura apparente della sua orbita, le osservazioni hanno mostrato che in quelle formule generali dei citati paragrafi convien porre l'inclinazione del piano dell'orbita all'ecclittica $I = 24^\circ\ 25'$, e la longitudine del suo nodo ascendente $N = 144^\circ\ 7' - 265''\ (t - 1800)$.

Qualora vorrassi intorno ad essi istituire una serie di osservazioni, è in primo luogo necessario coll'ajuto delle tavole dei loro moti calcolate da Herschel stabilire le apparenti loro configurazioni per non confonderli con le picciole stelle, vicino alle quali può talora trovarsi Saturno.

305. La teorica dei satelliti di Urano è ancora meno conosciuta di quella dei satelliti di Saturno. Herschel, il solo che finora gli ab-

bia co' suoi fortissimi telescopj osservati, persuaso dall'analogia con Giove e Saturno della loro esistenza, li ricercò più volte inutilmente, finchè nel 1787 avendo soppresso il minore specchio del suo telescopio di 20 piedi, e così procuratogli maggior quantità di luce ne riconobbe due, ed altri due ne osservò nel 1790, e due nel 1794, in tutti fino al numero di sei. Durante il corso di queste osservazioni credè Herschel di rimarcare nel globo di Urano uno schiacciamento, ed uno o forse due e più anelli, ed ha potuto eziandio sospettare il pianeta circondato da un'atmosfera molto densa. Essendosi applicato a determinare l'indole dei loro movimenti, ha stimato che i piani delle loro orbite fossero presso che perpendicolari al piano dell'eclittica, e le orbite stesse quasi circolari. A certe distanze dal pianeta spariscono, e rendonsi invisibili senza che possa dirsi se ciò accada per un contrasto colla luce del pianeta, od in virtù della sua atmosfera.

Quanto ai tempi delle rivoluzioni periodiche, Herschel ha osservato direttamente quelli del secondo e quarto satellite, ed ha dedotto gli altri dalla terza legge di Keplero, che cioè i cubi delle massime digressioni dal centro del pianeta primario stiano fra loro come i quadrati dei tempi delle rivoluzioni periodiche, la quale riscontrasi vera nei satelliti di Giove e Saturno, del pari che nei pianeti primarj.

CAPITOLO II.

Del passaggio dei pianeti inferiori sul disco del Sole.

306. Abbiamo nel cap. XVIII del vol. I indicato le regole generali che si devono seguire nel ridurre a calcolo le osservazioni dei pianeti per dedurre la loro posizione geocentrica. Vi sono però alcune circostanze, nelle quali queste regole sarebbero di difficile applicazione, e per la loro importanza meritano di essere a parte trattate. Tali sono le osservazioni che talvolta accade di fare rapporto a Venere e Mercurio, quando questi avvicinandosi alla loro congiunzione inferiore acquistano una latitudine geocentrica minore del semidiametro del Sole, e perciò sembrano passare avanti il suo disco projettandosi sul medesimo in forma di una picciola macchia nera. Avanti e dopo l'ingresso loro sul Sole sono invisibili, perchè la porzione illuminata è rivolta in parte contraria alla terra, e se accade di osservare la corda, che sembrano essi descrivere sul disco solare, si può da una tale osservazione dedurre la loro longitudine eliocentrica, non meno che la loro latitudine, e in queste circostanze si può stabilire la posizione dei nodi delle loro orbite con una precisione maggiore che con qualunque

Digitized by Google

altro genere di osservazioni. I passaggi di Venere sul disco del Sole del 1761 e del 1769 osservati in diversi punti della terra tanto nell'emisfero boreale che nell'emisfero australe, hanno somministrato una esattissima determinazione della paralasse orizzontale del Sole, e quindi ci hanno fatto conoscere la sua distanza dalla terra, alla quale tutte le altre distanze celesti sono riferite come ad unità di misura. Tali fenomeni essendo pertanto di somma importanza, noi andremo ad esporre nei seguenti problemi le regole per predire quando essi devono aver luogo, e per ridurre le fatte osservazioni a calcolo, affin di dedurne gli errori delle tavole. Egli è bene osservare che sebbene nelle cose seguenti si prendano particolarmente di vista i passaggi di Venere, pure le stesse proposizioni si potranno applicare anche a Mercurio, cambiando semplicemente i dati relativi al primo pianeta in quelli a quest'ultimo corrispondenti.

Problema I. Determinare in quali circostanze dalla terra possa vedersi Venere passare avanti il disco del Sole.

307. In primo luogo è evidente che quando Venere si avvicina alla sua congiunzione inferiore, se entra nel tronco di cono luminoso, che può fingersi descritto attorno al globo terrestre e solare, dalla terra si vedrà projettata sul disco del Sole, e si troverà nelle medesime circostanze, in cui trovasi la Luna, mentre avvicinandosi al suo novilunio entra nello stesso tronco di cono.

Quindi con ragionamenti analoghi a quelli fatti nei §§ 186-187 dimostreremo, che chiamando la paralasse orizzontale di Venere $= \pi$, quella del Sole $= p$, il semidiametro orizzontale di Venere $= \delta$, quello del Sole $= d$, la distanza dei centri di Venere e del Sole veduta dal centro della terra $= e$, il lembo di Venere principierà a toccare il lembo del Sole avanti la congiunzione, quando $e = \pi - p + \delta + d$, e dopo la congiunzione Venere sortirà dal disco solare, quando la distanza e continuamente crescendo ritorna $= \pi - p + \delta + d$.

Il lembo di Venere diverrà tangente internamente al disco solare per principiare una specie di eclisse anulare, quando sarà $e = \pi - p - \delta + d$, e dopo la congiunzione crescendo la distanza e tornerà ad essere Venere internamente tangente al Sole, quando del pari sia $e = \pi - p - \delta + d$.

Venere apparirà per qualche punto della terra projettata sul centro del Sole se divenga $e = \pi - p$. Egli è poi impossibile che il picciolo globo di Venere da noi molto lontano possa toglierci di vista l'intero disco solare, e perciò inutile si rende la condizione dell'eclisse totale.

Ciò premesso, pongasi per l'istante della congiunzione la latitudine geocentrica di Venere $= \lambda'$, il suo moto orario $= n$, la longitudine geocentrica di Venere e del Sole $= l'$, il suo moto orario $= m$,

il moto orario del Sole in longitudine sia $= m'$; e supponiamo che ad un numero di ore espresso da t la distanza geocentrica di Venere dal Sole sia $= e$. Si dimostrerà, come nel § 188, che ponendo

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{n}{m - m'}, \quad \text{sarà} \quad t = \frac{-\lambda' \,\text{sen}^2\,\alpha \pm \text{sen}\,\alpha \sqrt{(e^2 - \lambda'^2 \cos^2 \alpha)}}{n}.$$

Se ora in luogo di e si ponga $\pi - p + d + \delta$, ovvero $\pi - p + d - \delta$, e supponiamo che la congiunzione geocentrica al meridiano, per cui sono costruite le tavole, abbia luogo al tempo T, otterremo il tempo del

$$1.^{\circ}\ \text{contatto esterno} = T - \frac{\lambda' \text{sen}^2\alpha + \text{sen}\,\alpha \sqrt{[(\pi - p + d + \delta)^2 - \lambda'^2 \cos^2 \alpha]}}{n}$$

$$1.^{\circ}\ \text{contatto interno} = T - \frac{\lambda' \text{sen}^2\alpha + \text{sen}\,\alpha \sqrt{[(\pi - p + d - \delta)^2 - \lambda'^2 \cos^2 \alpha]}}{n}$$

$$2.^{\circ}\ \text{contatto interno} = T - \frac{\lambda' \text{sen}^2\alpha - \text{sen}\,\alpha \sqrt{[(\pi - p + d - \delta)^2 - \lambda'^2 \cos^2 \alpha]}}{n}$$

$$2.^{\circ}\ \text{contatto esterno} = T - \frac{\lambda' \text{sen}^2\alpha - \text{sen}\,\alpha \sqrt{[(\pi - p + d + \delta)^2 - \lambda'^2 \cos^2 \alpha]}}{n}$$

dalle quali formule apparisce che sarà impossibile il passaggio, se sia $\lambda' > (\pi - p + d + \delta) \sec \alpha$.

La posizione geografica de' luoghi, nei quali si vedranno i contatti relativi ai tempi calcolati, si determinerà cogli stessi precetti che abbiamo esposto nel calcolo degli eclissi generali del Sole nel primo volume § 190 e seg.

Se si desiderassero poi i tempi degli stessi contatti che si osserverebbero dal centro della terra, altro non si dovrà fare evidentemente che porre $\pi - p = 0$ nelle formule qui ora riferite.

Per ridurre a numeri queste formule, con ogni cura si calcoli il momento T della congiunzione, e la longitudine eliocentrica di Venere per quell' istante sia $= l$, che sarà anche $= 180^\circ + l'$, la sua latitudine eliocentrica $= \lambda$. La distanza di Venere dal Sole sia $= r$, della terra dal Sole $= R$. Sia per questo stesso istante la distanza di Venere dalla terra $= r'$, e la stessa projettata nel piano dell' ecclittica $= r' \cos \lambda' = g$. Egli è in primo luogo evidente che a motivo della picciola latitudine in congiunzione potremo assumere $\cos \lambda' = \cos \lambda = 1$, e però sarà

$$r' = g = R - r \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Quanto alle paralassi orizzontali di Venere e del Sole, supponendo quella del Sole alla distanza media $= 8'',8$, saranno date (§ 257) da

$$\pi = \frac{8'',8}{R - r}; \quad p = \frac{8'',8}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

I semidiametri δ, d di Venere e del Sole si dedurranno da quelli

dati nel quadro del sistema planetario per l'unità di distanza, osservando che essi variano in ragione inversa delle distanze (§ 80). Sarà pertanto $\delta = \frac{8'',25}{R-r}$, $d = \frac{961'',0}{R}$, ove è chiaro che se si vorranno ritenere per i diametri dei pianeti alle distanze medie altri valori, converrà invece di 8'',25, 961'',0, scrivere i semidiametri conformi alle determinazioni che piacerà di adottare.

I moti orarj geocentrici di Venere e del Sole con molta speditezza saranno dati dalle equazioni (13), (14) del § 252, osservando che nelle congiunzioni inferiori si ha $l - l' = 180$, $L - l' = 180$, L rappresentando qui, come nelle citate equazioni, la longitudine eliocentrica della terra. Chiamando poi v il moto orario eliocentrico medio di Venere, μ quello della terra (sostituendo alle quantità n, m di quelle equazioni le quantità v, μ), $\left(\frac{dl'}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right)$ diverranno i cercati moti orarj di Venere in longitudine ed in latitudine. Avremo così, ponendo $g = R - r = r'$,

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\mu \cos \Phi}{R(R-r)} - \frac{a^2 v \cos i \cos \varphi}{r(R-r)}; \quad n = \frac{a^2 v \operatorname{sen} i \cos \varphi \cos(l-\omega)}{r(R-r)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

nelle quali, come nel citato luogo, φ è l'angolo che ha per seno l'eccentricità dell'orbita di Venere, i l'inclinazione dell'orbita di Venere all'eclittica, ω la longitudine del suo nodo ascendente, a la distanza media di Venere dal Sole, Φ l'angolo che ha per seno l'eccentricità dell'orbita terrestre. Nel valore di n sonosi trascurati i termini di secondo ordine rapporto alle latitudini, inclinazioni ed eccentricità, come picciolissimi, a motivo della picciola latitudine opportuna, perchè abbiano luogo questi fenomeni. Il moto orario del Sole sarà (§ 105) dato dall'equazione . . $m' = \frac{\mu \cos \Phi}{R^2}$ . . . (4)

Ottenuti i moti orarj di Venere e del Sole, che uguaglia sempre quello della terra, si formeranno le longitudini e latitudini geocentriche di Venere, e le longitudini della terra per l'ora seguente, e per l'ora precedente la congiunzione, osservando che un moto orario negativo indica un moto retrogrado, e quindi coll'aumento del tempo tende a diminuire le relative posizioni.

Si potrà anche estendere l'uso delle stesse equazioni per trovare la posizione geocentrica di Venere e del Sole per qualche ora avanti, e dopo la congiunzione, poichè i moti orarj non variano sensibilmente da un'ora all'altra, e qualora vogliasi aspirare a maggiore esattezza in luogo di R, r scriverassi il medio loro valore fra la congiunzione e l'istante per cui si calcola. Determinati n, m, m', si avrà tosto l'angolo α, nel cui calcolo si osserveranno le solite regole dei segni.

Digitized by Google

Resta a determinare la quantità λ', cioè la latitudine di Venere in congiunzione. Si calcolerà in primo luogo la latitudine eliocentrica λ o con le tavole o con la formula $\text{tang}\,\lambda = \text{tang}\,i\,\text{sen}\,(l - \omega)$ che deducesi dalla risoluzione del triangolo lNL del § 241; quindi pel § 242 num. 2.° sostituendo per Q il suo valore avrassi

$$\text{tang}\,\lambda' = \frac{r\,\text{sen}\,\lambda\,\cos\,(l' - l)}{r\cos\lambda - R\cos\,(L - l)}.$$

Si osservi che nel caso in questione λ', λ sono sempre di pochi minuti, e però può farsi $\cos\lambda = 1$, $\text{tang}\,\lambda = \text{sen}\,\lambda = \lambda$. Di più $l' - l = 180$, ed essendo la longitudine eliocentrica L della terra uguale a quella di Venere rappresentata per l, sarà $L - l = 0$. Introdotte queste condizioni, avremo

$$\lambda' = \frac{r\,\text{tang}\,i\,\text{sen}\,(l - \omega)}{R - r} = \frac{r\lambda}{R - r} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

308. *Scolio*. I tempi relativi al primo ed ultimo contatto tanto interno che esterno determinati colla guida delle formule precedenti sono quali dall'osservatore verrebbero osservati in un orologio regolato sotto il meridiano, per cui sono costruite le tavole, se la luce dal pianeta fino a noi giungesse istantaneamente. Ora avendo la luce un moto progressivo, come già abbiamo dimostrato nel § 299, riceveranno questi tempi ancora una picciola correzione dipendente da esso. Il modo più semplice di tenerne conto si è di calcolare l'istante della congiunzione apparente avendo riguardo all'aberrazione della luce tanto nel calcolo di L, quanto di l' e λ'. Le tavole solari dando la longitudine del Sole apparente si calcolerà per Venere la sua aberrazione colle formule che a suo luogo daremo, o coi precetti del § 269. Avendo così calcolato due luoghi geocentrici apparenti l'uno di Venere e l'altro del Sole nelle vicinanze della congiunzione, corrispondenti ad un dato istante, se sono uguali corrisponderanno alla congiunzione cercata; in caso diverso da essi con facile interpolazione ricaveremo mediante i moti orarj geocentrici il momento della congiunzione, poichè nell'intervallo di poche ore non variando la correzione dovuta all'aberrazione, il moto orario ne è indipendente.

309. A maggiore intelligenza delle cose esposte nei §§ precedenti uniremo il seguente esempio numerico:

L'anno 1769 il 3 di Giugno avvicinandosi Venere alla sua congiunzione inferiore si trovò in gran vicinanza del nodo discendente; e passò effettivamente sul disco del Sole. Si domandano le circostanze generali di questo passaggio.

Con un calcolo preparatorio si può dalle tavole agevolmente riconoscere che la congiunzione di Venere col Sole ha avuto luogo il 3

di Giugno verso $10^h\ 12'\ 49'',8$ di tempo medio al meridiano di Parigi, che stabiliremo in questo esempio per primo meridiano.

Calcolando per questo istante, colle tavole del signor Carlini, la longitudine del Sole, e la sua distanza dalla terra, trovasi quella $= 73^\circ\ 27'\ 41'',4$ valutata dall'equinozio vero, e libera dall'aberrazione della luce, ed il log. di questa $= 0,0064868$. Aggiungendo alla trovata longitudine del Sole 180°, avremo la longitudine della terra $= 253^\circ\ 27'\ 41'',4$. Del pari con le recenti tavole del signor Lindenau pubblicate a Gota nel 1810 trovasi allo stesso istante la longitudine eliocentrica di Venere $= 253^\circ\ 27'\ 49'',5$, la distanza di Venere dal Sole $= 0,7261790$, la longitudine del nodo $= \omega = 74^\circ\ 37'\ 48''$, e la latitudine eliocentrica $= +\ 0^\circ\ 4'\ 6'',7$.

Si calcolino in seguito i moti orarj del Sole e di Venere, i quali saranno dati dalle formule seguenti, che deduconsi dai valori di $\left(\frac{dl}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$ del § 252. Moto orario di Venere in longitudine $= \frac{v\,a^2 \cos i \cos \varphi}{r^2}$, in latitudine $= \frac{v\,a^2 \cos \varphi \cos (l - \omega) \operatorname{sen} i}{r^2}$;

del Sole $= \frac{\mu \cos \Phi}{R^2}$ = moto eliocentrico della terra; nelle quali

v = mot. or. medio di Venere $= 240'',325$, $a = 0,723332$,
$i = 3^\circ\ 23'\ 35''$; φ = arc. sen. $0,0068530 = 0^\circ\ 23'\ 33'',8$,
μ = mot. or. med. del Sole $= 147'',847$,
Φ = arc. sen. $0,0167798 = 0^\circ\ 57'\ 40'',8$.

Con questi dati si formeranno i seguenti logaritmi costanti
log. $v\,a^2 \cos i \cos \varphi = 2,098702$; log. $a^2\, v \cos \varphi \operatorname{sen} i = 0,871679$,
log. $\mu \cos \Phi = 2,169753$.

Quindi otterremo i moti orarj eliocentrici in longitudine di Venere e della terra come segue: per Venere $= 3'\ 58'',02$; per la terra $= 2'\ 23'',47 = m'$, e però il moto orario eliocentrico relativo di Venere rapporto alla terra sarà $= 1'\ 34'',55$.

Se ora confrontiamo le longitudini eliocentriche calcolate della terra e di Venere si trova che differiscono di $8'',1$, quella di Venere essendo maggiore; donde rilevasi aver già essa passata la congiunzione. Per trovare l'istante della congiunzione stabiliremo la seguente proporzione; se in un'ora o $60'$ di tempo Venere in virtù del suo moto relativo si allontana dalla terra di $1'\ 34'',55$; in x' si sarà allontanata di $8'',1$. Donde dedurremo $x' = \frac{60'.\,8'',1}{94'',55} = 5',14 = 5'\ 8'',4$, e però l'istante della congiunzione ebbe luogo il giorno 3 Giugno a $10^h\ 12'\ 49'',8 - 5'\ 8'',4$, ossia $10^h\ 7'\ 41'',4$ T. med. di Parigi.

Calcolando ora per questo istante le longitudini eliocentriche di

Digitized by Google

Venere e della terra (le quali dalle superiori deduconsi togliendone le loro rispettive variazioni per 5′ 8″,4) si troveranno ambedue = 253° 27′ 29″,15, e quindi le longitudini geocentriche di Venere e del Sole mentre sono in congiunzione saranno = 73° 27′ 29″,15. Tale sarebbe senza l'aberrazione della luce il tempo della congiunzione geocentrica e la longitudine geocentrica di Venere secondo le tavole. Per tener conto eziandio dell'aberrazione si calcolino dietro le equazioni (3) i valori di m, n, sostituendo in esse i valori di R, r, ω dati dalle tavole per 10^h 12′ 49″,8, che dai veri in congiunzione non differiscono sensibilmente. Otterrassi così $m = -94'',20$, $n = -35'',47$, e quindi il moto orario geocentrico relativo di Venere in longitudine $m - m' = -237'',67$.

Dietro i precetti del § 269 si otterranno le longitudini geocentriche di Venere e del Sole affette dall'aberrazione colle seguenti formule

long. app. di Vener. = 73° 27′ 29″,15 + 0,1371 . 94″,20 r = 73° 27′ 32″,9
long. app. di Sole = 73 27 29 ,15 — 0,1371 . 143 ,47 R = 73 27 9 ,1
differenza = 23 ,8

Il centro di Venere sembrerà scostarsi dal Sole di 23″,8 in virtù del suo moto orario relativo e retrogrado in $\frac{60 . 23'',8}{237'',67}$ minuti di tempo, cioè in 0^h 6′ 0″,5, che sommati coll'istante della congiunzione vera calcolata di sopra daranno l'istante della congiunzione apparente a 10^h 13′ 41″,9, per il qual momento le longitudini apparenti di Venere e del Sole dalle precedenti dedotte col mezzo del moto orario si riscontrano = 73° 27′ 23″,45.

Resta a trovare la latitudine geocentrica apparente λ'. L'equazione $\lambda' = \frac{r\lambda}{R - r}$ ponendo λ = 4′ 6″,7 dà λ' = 10′ 20″,17. Ma siccome λ = 4′ 6″,7 corrispondeva al calcolo diretto fatto colle tavole per 10^h 12′ 49″,8, così aggiungendo secondo il suo segno il moto di λ' per 52″,1 che mancano per andare alla congiunzione apparente, il qual moto a ragione di — 35″,47 per 60′ è = — 0″,53, si avrà la latitudine geocentrica vera all'istante della congiunzione apparente = 10′ 19″,64, donde poi dedurrassi la latitudine affetta dall'aberrazione per la formula λ' = 10′ 19″,64 + 0,1371 . 35″,47 r = + 10′ 21″,00. In seguito otterremo per il caso attuale d = 946″,74, δ = 28″,56, π = 30″,46, p = 8″,67, e dall'equazione tang $\alpha = \frac{n}{m - m'}$, osservando che il numeratore e denominatore sono negativi, dedurremo α = 188° 29′ 17″, donde avrassi λ' cos α = — 614″,20.

Abbiamo ora i dati opportuni per calcolare il tempo dei contatti

sì esterni che interni veduti dal centro e dalla superficie della terra. Lasciando da parte questi ultimi, riferiremo soltanto il calcolo dei primi, perchè di quelli ci serviremo in appresso (*). Se per brevità ponghiamo

$$h = d + \delta + \lambda' \cos\alpha = 361'',10\,; \quad h' = d + \delta - \lambda' \cos\alpha = 1589'',50$$
$$k = d - \delta + \lambda' \cos\alpha = 303\,,98\,; \quad k' = d - \delta - \lambda' \cos\alpha = 1532\,,38$$

e chiamiamo T il tempo della congiunzione apparente, avremo il tempo dei

$$\text{contatti esterni} = T - \frac{\lambda' \operatorname{sen}^2 \alpha}{n} \mp \frac{\operatorname{sen}\alpha \sqrt{(h\,h')}}{n}$$
$$\text{contatti interni} = T - \frac{\lambda' \operatorname{sen}^2 \alpha}{n} \mp \frac{\operatorname{sen}\alpha \sqrt{(k\,k')}}{n}$$

valendo il segno superiore per i primi contatti, l'inferiore per gli ultimi.

Introducendo in queste formule i superiori valori numerici, e rammentando che l'ora è l'unità di tempo si troverà

$$-\frac{\lambda' \operatorname{sen}^2 \alpha}{n} = +\,0^h,38144 = +\,0^h\,22'\,53'',18\,;$$
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha \sqrt{(h\,h')}}{n} = +\,3^h\,9'\,9'',61\,; \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha \sqrt{(k\,k')}}{n} = +\,2^h\,50'\,24'',50.$$

Dietro ciò si avranno i seguenti risultamenti

Congiunzione apparente	T =	10^h	$13'$	$41'',90$		Tempo medio al meridiano di Parigi
1.° contatto esterno. .	τ' =	7	27	25 ,47		
1.° contatto interno. .	τ'' =	7	46	10 ,58		
2.° contatto interno. .	τ''' =	13	26	59 ,58		
2.° contatto esterno. .	τ'''' =	13	45	44 ,69		

Calcolando ora per questi tempi la differenza delle longitudini geocentriche di Venere e del Sole, la latitudine geocentrica di Venere colla longitudine ed AR del Sole, si otterranno i seguenti risultamenti, dei quali avremo bisogno nella proposizione III, ove è da osservarsi che per il calcolo delle AR del Sole si è adoperato l'obbliquità apparente dell'eclittica 23° 28′ 11″,7 data dalle tavole solari del signor Carlini.

(*) Per vedere a colpo d'occhio l'influenza delle paralassi nel far variare il tempo dei contatti, oniremo qui anche il risultamento del calcolo per quelli che hanno luogo alla superficie della terra.

1.° contatto esterno = $7^h\,20'\,28'',19$; 1.° contatto interno = $7^h\,38'\,55'',41$
2.° contatto esterno = $13\;52\;41\,,97$; 2.° contatto interno = $13\;34\;14\,,75$.

$\tau - T$	$(m-m')(\tau-T) = l-l'$	λ'	longit. di ☉ $= l'$	AR app. di ☉	$\Lambda = \frac{1}{2}(l+l')$
$-2^h\,46'\,16'',5$	$+658'',62$	$+719'',29$	$73°20'45'',9$	$71°56'17''$	$73°26'15''$
$-2\;27\;31\;,5$	$+584\;,36$	$708\;,21$	$73\;21\;30\;,7$	$71\;57\;\;5$	$73\;26\;23$
$+3\;13\;17\;,7$	$-765\;,67$	$506\;,74$	$73\;35\;\;5\;,6$	$72\;11\;40$	$73\;28\;43$
$+3\;32\;\;2\;,8$	$-839\;,94$	$495\;,65$	$73\;35\;50\;,5$	$72\;12\;28$	$73\;28\;50$

Problema II. Determinare l' istante del primo ed ultimo contatto sì interno che esterno di Venere col disco solare per un luogo particolare della superficie terrestre, del quale conoscasi la posizione geografica.

310. Egli è in primo luogo palese che se Venere ed il Sole non fossero sottoposti ad una paralasse orizzontale, un contatto qualunque avrebbe luogo allo stesso istante per tutti gli osservatori alla superficie della terra, e questo sarebbe lo stesso di quello che al centro di essa osserverebbesi; perciò il tempo cercato in un luogo qualunque della superficie terrestre differirebbe soltanto da quello veduto dal centro per la sola differenza dei meridiani. Se adunque τ esprime l' istante di un qualunque contatto calcolato per il centro della terra al meridiano delle tavole, che da ora innanzi appelleremo *primo meridiano*, ed H la differenza delle longitudini geografiche ridotte in tempo fra il primo meridiano e quello del dato luogo presa in modo che da oriente in occidente proceda da 0° fino a 360°, ponendo il luogo dato all' occidente del primo meridiano, sarebbe l' istante del corrispondente contatto $= \tau - H$. Le paralassi orizzontali del Sole e di Venere alterando le longitudini e latitudini geocentriche, alterano eziandio la loro distanza apparente, e perciò fanno variare il tempo degl' indicati contatti. Avendo riguardo alla picciolezza delle paralassi, ben si prevede che le variazioni dei tempi relativi ai diversi contatti calcolati pel centro della terra saranno dell' ordine loro, e perciò sempre di pochi minuti. Noi dunque andremo a ricercare queste picciole correzioni, avendo soltanto riguardo alle prime potenze delle paralassi orizzontali. Di più riguardando i diametri orizzontali ed i moti orarj di Venere e del Sole come quantità di primo ordine, rimarranno essi inalterati per l' effetto delle paralassi, e saranno gli stessi alla superficie ed al centro della terra. Gli aumenti dei semidiametri per le diverse elevazioni sopra l' orizzonte saranno pure quantità di secondo ordine, e perciò trascurabili § 164.

Ciò premesso prendiamo a calcolare l' istante del primo contatto, che al centro ha luogo in un tempo τ'.

Sia la longitudine del Sole per il tempo $\tau' = l'$, la longitudine geocentrica di Venere $= l$, la sua latitudine, supposta boreale, $= \lambda'$;

i moti orarj del Sole e di Venere in longitudine rappresentati da m', m; le paralassi orizzontali ed i semidiametri sieno, come sopra p, π, d, δ; la latitudine geografica del luogo del calcolo supposta boreale e diminuita dell'angolo della verticale, come negli ecclissi di Sole, $= L$; l'AR del mezzo del cielo, ossia il tempo sidereo, che contasi all'istante τ' nel dato luogo sia $= \theta$.

La longitudine e la latitudine del zenit del dato luogo corrispondenti ad un'$AR = \theta$ e ad una declinazione $= L$, vengano rappresentate, come nel § 175, per g, h.

Sia inoltre l'istante del primo contatto cercato al meridiano del dato luogo rappresentato da $\tau' - H + t'$, cosicchè t' sia la picciola correzione del tempo del contatto calcolato per il centro della terra.

Dietro le formule (a), (b) del § 177 si calcolino le paralassi in longitudine ed in latitudine tanto per il Sole, come per Venere, e sieno α', β' per il Sole; α, β per Venere.

Sarà $\alpha' = p \cos h \operatorname{sen}(l' - g)$; $\alpha = \pi \cos h \operatorname{sen}(l - g)$;
$\beta' = - p \operatorname{sen} h$; $\beta = - \pi \operatorname{sen} h$;
trascurando i termini moltiplicati per $\pi \operatorname{sen} \lambda'$, e ponendo $\cos \lambda' = 1$, perchè non influiscono che sulle quantità di secondo ordine.

Ad oggetto di preparare formule più generali, delle quali ci serviremo nel problema seguente, supponiamo che le tavole abbisognino di una picciola correzione, e sieno x', x le correzioni delle longitudini geocentriche del Sole e di Venere, y la correzione della latitudine geocentrica di Venere, di più indichiamo per k la picciola latitudine del Sole introdotta nelle tavole solari, e dipendente dalle attrazioni dei pianeti. Avremo dietro le precedenti supposizioni al tempo $\tau' - H + t'$ le seguenti

	longitudini appar.	latitudini appar.
per il Sole	$= l' + m' t' + \alpha' + x'$	$k + \beta'$
per Venere	$= l + m t' + \alpha + x$	$\lambda' + n t' + \beta + y$.

Quindi sarà il quadrato della distanza apparente dei centri
$= [l - l' + (m - m') t' + \alpha - \alpha' + x - x']^2 + (\lambda' - k + n t' + \beta - \beta' + y)^2$.

Se inoltre supponiamo che i semidiametri del Sole e di Venere abbisognino delle picciole correzioni σ', σ cosicchè i veri semidiametri sieno rappresentati da $d + \sigma'$, $\delta + \sigma$, sarà il quadrato della stessa distanza pure espresso nel contatto esterno da $(d + \delta + \sigma' + \sigma)^2$, ovvero da $(d + \delta)^2 + 2(d + \delta)(\sigma' + \sigma)$.

Uguagliando questa quantità alla precedente, ed osservando che per condizione al tempo τ' le tavole danno l'eguaglianza $(l - l')^2 + (\lambda' - k)^2 = (d + \delta)^2$, trascurando i termini superiori alle seconde dimensioni, avremo

$$(l - l')(m - m') t' + (l - l')(\alpha - \alpha' + x - x') + (\lambda' - k) n t'$$
$$+ (\lambda' - k)(\beta - \beta' + y) = (d + \delta)(\sigma' + \sigma),$$

donde deducesi, trascurando anche k, che è sempre picciolissima di sua natura, o supponendola inclusa nella quantità λ'

$$t' = \frac{(l-l')(\alpha'-\alpha+x'-x)+\lambda'(\beta'-\beta-y)+(d+\delta)(\sigma'+\sigma)}{(l-l')(m-m')+\lambda' n}.$$

Del pari se le quantità l, l', α, α', λ', β, β' ec. relative al tempo τ' corrispondente al primo contatto esterno, s'intendono calcolate per l'istante τ'' corrispondente all'ultimo contatto esterno, la quantità t' diverrà allora l'aumento del tempo τ'' per passare dal tempo del primo contatto al centro a quello della superficie nel luogo prefisso. Si vede anche facilmente che per ottenere le correzioni dei tempi relative ai contatti interni, basterà in tutte le formule precedenti sostituire le posizioni del Sole e di Venere per gl'istanti geocentrici dei medesimi, e porre $-\delta$, $-\sigma$ in luogo di δ, σ.

Si osservi inoltre che sen $(l-g)$, sen $(l'-g)$ differendo fra loro di quantità di primo ordine, avremo dentro i limiti di secondo ordine $\alpha'-\alpha=(\pi-p)\cos h \operatorname{sen}(g-\Lambda)$, $\beta'-\beta=(\pi-p)\operatorname{sen} h$, ove in luogo di Λ si può scrivere $\frac{1}{2}(l+l')$.

Se pertanto ponghiamo la differenza delle paralassi $\pi-p=P$, e di più

$$A=\frac{l-l'}{(m-m')(l-l')+\lambda' n},\quad B=\frac{\lambda'}{(m-m')(l-l')+\lambda' n},\quad C=\frac{B}{\lambda'},$$

indicando per A', B', C', A'', B'', C'', τ', τ'' le quantità relative al primo, secondo ec. contatto, per H', H'', H''', $H^{\prime\prime\prime\prime}$ i tempi dei successivi contatti dal primo fino all'ultimo, avremo . . . (A)

$$H'=\tau'-H+[A'\cos h'\operatorname{sen}(g'-\Lambda')+B'\operatorname{sen} h']P+A'(x'-x)-B'y$$
$$+C'(d+\delta)(\sigma'+\sigma);$$
$$H''=\tau''-H+[A''\cos h''\operatorname{sen}(g''-\Lambda'')+B''\operatorname{sen} h'']P+A''(x'-x)-B''y$$
$$+C''(d-\delta)(\sigma'-\sigma);$$
$$H'''=\tau'''-H+[A'''\cos h'''\operatorname{sen}(g'''-\Lambda''')+B'''\operatorname{sen} h''']P+A'''(x'-x)-B'''y$$
$$+C'''(d-\delta)(\sigma'-\sigma);$$
$$H^{\prime\prime\prime\prime}=\tau^{\prime\prime\prime\prime}-H+[A^{\prime\prime\prime\prime}\cos h^{\prime\prime\prime\prime}\operatorname{sen}(g^{\prime\prime\prime\prime}-\Lambda^{\prime\prime\prime\prime})+B^{\prime\prime\prime\prime}\operatorname{sen} h^{\prime\prime\prime\prime}]P+A^{\prime\prime\prime\prime}(x'-x)-B^{\prime\prime\prime\prime}y$$
$$+C^{\prime\prime\prime\prime}(d-\delta)(\sigma'-\sigma);$$

le quali porgeranno i tempi dei contatti apparenti alla superficie della terra nel dato luogo.

Problema III. Avendo osservato in diversi luoghi della superficie terrestre il passaggio di Venere sul disco del Sole, si domandano gli errori delle tavole e le paralassi orizzontali π, p.

311. Si calcolino per gl'istanti dei contatti osservati in ogni luogo i coefficienti di P, $x'-x$, y, σ', σ nelle equazioni (A); quindi sottraendole una dall'altra, sparirà la quantità H, e si formeranno delle equazioni di primo grado fra le incognite P, $x'-x$, y, σ', σ, cin-

que delle quali basteranno per determinarle. Se ne avremo in maggior numero, le combineremo insieme col metodo dei minimi quadrati, o con qualsivoglia altro metodo analitico, per modo che le incognite rimangano determinate con la maggiore sicurezza.

Qui poi è a proposito di osservare che sebbene sparisca dal calcolo la longitudine H del luogo particolare in cui fassi l'osservazione, tuttavia essa tacitamente rimane inclusa nei coefficienti delle incognite, poichè primieramente per il calcolo delle quantità l, l', λ per l'ora del fenomeno osservato, richiedesi che si conosca l'ora che allo stesso istante numeravasi al meridiano delle tavole: in secondo luogo la quantità θ rappresentante il tempo sidereo in gradi si compone sommando il tempo medio osservato nel dato luogo con la AR media del Sole calcolata dalle tavole, od anche il tempo vero con l'AR vera (§ 100), e perciò richiedesi ancora al calcolo dell'AR del Sole la cognizione della longitudine H. Nel tempo stesso però apertamente si vede che una cognizione prossima di H sarà bastante per il calcolo degl'indicati coefficienti, e quando anche non si conoscesse in alcun modo, si potrebbe far uso per l, l', λ ed AR di Sole di quei valori che sono già stati calcolati precedentemente per le stesse fasi geocentriche al primo meridiano, poichè questi non possono dai veri loro valori differire che in quantità di primo ordine; anzi trascurandosi ovunque le quantità di secondo ordine, dovransi queste ultime impiegare in luogo delle prime, giusta lo spirito del metodo degl'infinitamente piccoli. Si potranno così con ogni sicurezza adoperare le precedenti equazioni alla determinazione delle incognite che esse racchiudono.

Se si avrà $x' = 0$, ossia se le longitudini del Sole saranno immuni da errore, o perchè le tavole rappresentino con ogni cura i movimenti solari, o perchè siensi mediante le osservazioni precedenti corrette le longitudini del Sole, in allora le superiori equazioni daranno le correzioni x, y da applicarsi alle longitudini geocentriche di Venere nell'istante della congiunzione. Ponendo ora nelle formule (6), (8) del § 246 $dl' = x$, $d\lambda' = y$, ed osservando che ponno in esse trascurarsi i termini moltiplicati per sen λ, sen $2\lambda'$, facendo inoltre $\cos\lambda = \cos\lambda' = 1$, ed $l - l' = 180$, otterremo le correzioni eliocentriche della longitudine e della latitudine di Venere, le quali saranno

$$dl = \frac{-g}{r}x = \frac{-(R-r)}{r}x\,; \quad d\lambda = \frac{g}{r}y = \frac{R-r}{r}y\,.$$

Queste correzioni aggiunte secondo il loro segno alla longitudine e latitudine eliocentrica di Venere calcolata per l'istante della congiunzione daranno la vera longitudine e la vera latitudine, donde poi dedurrassi di nuovo con molta facilità eziandio l'istante corretto della congiunzione.

Ottenute poi la vera longitudine e la vera latitudine eliocentrica, si avrà la distanza vera di Venere dal nodo mediante l'equazione (3) § 241, che si può scrivere sotto l'aspetto $\operatorname{sen}(l-\omega)=\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang} i}$, ove è da notare che una picciola incertezza in i non produce errore sensibile in $l-\omega$, e quindi nemmeno nella longitudine del nodo ω.

La quantità P rappresenta la differenza delle due paralassi π, p. Se ora riflettasi che le paralassi orizzontali dei pianeti sono gli angoli sotto cui vedrebbesi dal loro centro il semidiametro terrestre, vedrassi facilmente che esse stanno sempre in ragione inversa delle loro distanze dal centro della terra; perciò starà $p:\pi::r':R$, che a motivo di $r'=R-r$, darà $pR=\pi R-\pi r$. Questa equazione unita all'altra $P=\pi-p$, darà $p=P\frac{R-r}{r}$, $\pi=P\frac{R}{r}$.

312. I passaggi di Venere sul disco del Sole somministrano la più vantaggiosa determinazione della paralasse solare, da cui poi dipende quella di tutti gli altri pianeti, poichè essendo allora Venere alla terra molto più vicina che al Sole, la differenza P delle due paralassi è molto sensibile, e quindi con sicurezza vengono in questa circostanza determinate le quantità p, π.

Le stesse equazioni (A) porgono una determinazione di P molto vantaggiosa indipendente dalle incognite $x'-x$, y, σ, σ'. In fatti supponiamo che per far isparire H si prendano in un luogo determinato le differenze di due delle equazioni (A) relative a due fasi determinate, per esempio, al primo contatto interno ed all'ultimo contatto esterno. Le incognite P, $x'-x$, y, σ, σ' avranno nel residuo alcuni coefficienti determinati. Se ora si combinano insieme le stesse due fasi in un altro luogo molto dal primo distante, la incognita P acquisterà un coefficiente molto diverso, mentre le altre $x'-x$, y, σ, σ' manterranno gli stessi coefficienti, come apparisce dalla composizione analitica delle quantità che racchiudono. Quindi la differenza di queste due nuove equazioni essendo indipendente da $x'-x$, y, σ, σ' darà con ogni sicurezza il valore di P.

313. A render ciò più chiaro con un esempio, riprendiamo il calcolo del passaggio superiore del 3 Giugno 1769, e confrontiamo fra loro le osservazioni fatte a Wardhus in Lapponia dal P. Hell con quelle fatte all'isola di Taiti nel mare australe dal capitano Cook. I dati dell'osservazione in questi due luoghi sono i seguenti;

		Tempo vero del luogo	equazione del tempo	tempo medio del luogo
a Wardhus	1.° cont. int. $H''=$	$9^h\ 34'\ 5''$	$-2'\ 13''$	$9^h\ 31'\ 52''$
	2.° cont. int. $H'''=$	15 27 36	— 2 11	15 25 25
	2.° cont. est. $H''=$	15 45 45	— 2 11	15 43 34
a Taiti . .	1.° cont. est. $H'=$	21 25 45	— 2 13	21 23 32
	1.° cont. int. $H''=$	21 44 15	— 2 13	21 42 2
	2.° cont. int. $H'''=$	3 14 13	— 2 11	3 12 2
	2.° cont. est. $H''=$	3 32 2	— 2 11	3 29 51

ove tosto scorgesi che le osservazioni fatte a Taiti cadono avanti e dopo il passaggio del Sole pel meridiano.

La latitudine geografica di Wardhus essendo 70° 22′ 36″, e l'angolo colla verticale preso dalle tavole lunari essendo = 6′ 36″, formeremo $L = 70°\ 16'\ 0''$. Se si ridurrà il tempo vero delle osservazioni in gradi, e si aggiungeranno le corrispondenti AR del Sole date nel § 309, otterremo per Wardhus i seguenti valori di θ

$$\theta'' = 215°\ 28'\ 20''; \quad \theta''' = 304°\ 5'\ 40''; \quad \theta'' = 308°\ 38'\ 43''.$$

Calcolando i valori di g e di h dietro le formule del § 204, e non tenendo conto che delle diecine di secondi, avremo

$$g'' = 144°\ 38'\ 10''; \quad g''' = 31°\ 58'\ 0''; \quad g'' = 32°\ 14'\ 30''$$
$$h'' = 70\ 17\ 40; \quad h''' = 77\ 4\ 50; \quad h'' = 75\ 33\ 50.$$

Del pari assumendo la latitudine di Taiti = — 17° 28′ 55″, troverassi $L = -17°\ 22'\ 32''$, e trascurando il primo contatto esterno, che non fu osservato a Wardhus, si avrà

$$\theta'' = 38°\ 0'\ 40''; \quad \theta''' = 120°\ 44'\ 55''; \quad \theta'' = 125°\ 12'\ 58''$$
$$g'' = 29\ 11\ 40; \quad g''' = 127\ 36\ 30; \quad g'' = 132\ 42\ 30$$
$$h'' = -30\ 31\ 50; \quad h''' = -36\ 54\ 40; \quad h'' = -35\ 46\ 0.$$

Apparecchiati questi valori, il calcolo di A, B, C per i diversi contatti dietro le equazioni del § 310 non ha alcuna difficoltà. Nell'introdurvi i numeri ho ritenuto gli elementi della tavoletta data al § 309, ed ho moltiplicato per 3600″ i valori di A, B, C per ridurre i tempi che fingonsi dati in parti di ora a minuti secondi; in tal guisa ho ottenuto i seguenti risultamenti

$$A'' = -12{,}827; \quad A''' = -16{,}807; \quad A'' = -16{,}610$$
$$B'' = -15{,}546; \quad B''' = +11{,}123; \quad B'' = +9{,}802$$
$$C''(d-\delta) = -20{,}153; \quad C'''(d-\delta) = +20{,}155; \quad C''(d+\delta) = +19{,}287.$$

Introducendo i precedenti valori nelle ultime tre equazioni (A) del § 310, e conservando per brevità le lettere τ'', τ''', τ'' in luogo dei

loro valori numerici dati al § 309 otterremo per l'osservazione di Wardhus

$$(1)\ 9^h 31' 52'' = \tau'' - H - 18{,}7297P + A''(x'-x) - B''y + C''(d-\delta)(\sigma'-\sigma)$$
$$(2)\ 15\ 25\ 25 = \tau''' - H + 13{,}3809P + A'''(x'-x) - B'''y + C'''(d-\delta)(\sigma'-\sigma)$$
$$(3)\ 15\ 43\ 34 = \tau'' - H + 12{,}7210P + A''(x'-x) - B''y + C''(d+\delta)(\sigma'+\sigma)$$

e per l'osservazione di Taiti

$$(4)\ 21\ 42\ \ 2 = \tau'' - H_{,} + 15{,}6062P + A''(x'-x) - B''y + C''(d-\delta)(\sigma'-\sigma)$$
$$(5)\ 27\ 12\ \ 2 = \tau''' - H_{,} - 17{,}5935P + A'''(x'-x) - B'''y + C'''(d-\delta)(\sigma'-\sigma)$$
$$(6)\ 27\ 29\ 51 = \tau'' - H_{,} - 17{,}3088P + A''(x'-x) - B''y + C''(d+\delta)(\sigma'+\sigma)$$

ove nelle ultime due equazioni si pone 27^h in luogo di 3^h per riferire tutte le osservazioni fatte a Taiti alla stessa origine di tempo, cioè al mezzodì del giorno precedente, affine di evitare numeri negativi.

Se ora le precedenti equazioni si combinano col seguente ordine $(2)-(1)-(5)+(4)$; $(3)-(1)-(6)+(4)$ si formeranno le due seguenti $23'\ 33'' = 65{,}3103\,P$, $23'\ 53'' = 64{,}3657\,P$, dalle quali si deduce $P = 21'',635$, $P = 22'',264$, il medio delle quali determinazioni darà $P = 21'',950$.

Quindi avrassi $p = \frac{R-r}{r}P = 8'',732$; $\pi = \frac{R}{r}P = 30'',682$, che pochissimo differiscono dai medj loro valori adottati nelle moderne tavole astronomiche. Se ora il valore di P sostituiscasi nelle precedenti sei equazioni, si otterranno altrettante equazioni di condizione, dalle quali agevolmente si determineranno gli errori delle tavole se le differenze dei meridiani H, $H_{,}$ di Wardhus e di Taiti col primo meridiano saranno bene conosciute.

Dei periodi che riconducono i passaggi dei pianeti inferiori sul disco del Sole.

314. Abbiamo superiormente dimostrato (§ 307) che affinchè possa un pianeta nella sua congiunzione inferiore trovarsi sul disco del Sole deve essere $\lambda' < (\pi - p + d + \delta)\sec\alpha$, e siccome in queste stesse circostanze abbiamo $\lambda = \frac{R-r}{r}\lambda'$ in virtù dell'equazione (5) § 307, così perchè accada il fenomeno dovrà la latitudine eliocentrica del pianeta λ essere minore di $\frac{(R-r)(\pi - p + d + \delta)\sec\alpha}{r}$, non avendo luogo che un semplice contatto esterno del disco apparente del Sole con quello del pianeta se le due indicate quantità siano uguali. Chiamando poi t l'argomento di latitudine o la distanza del pianeta dal

nodo, i l'inclinazione, l'equazione (1) del § 241 dà $\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} i}$. Si deduce da ciò che il passaggio del pianeta sul Sole avrà luogo se l'argomento di latitudine per il momento della congiunzione sarà minore di t, ed avrà luogo un contatto esterno se sarà $= t$.

Applichiamo queste formule a Venere, e supponiamo le orbite tanto del pianeta che della terra circolari, la qual supposizione nella presente ricerca non apporterà notabile differenza.

In questa ipotesi potremo porre $\pi - p = 22''$, $d = 961'',0$, ritenendo le denominazioni dei precedenti paragrafi, avremo $a = 0,72333$, $\delta = \frac{8'',25}{1-a} = 30'',0$, e però $\pi - p + d + \delta = 1013'',0$.

Per calcolare i valori di n, m, m', che si richiedono per il calcolo di α, le formule del § 307 divengono nel nostro caso

$$n = \frac{a\,v \operatorname{sen} i}{1-a} = 37'',187\,; \quad m = \frac{\mu}{1-a} - \frac{a\,v \cos i}{1-a} = -92'',82\,,$$

$m' = \mu = 147'',85$; quindi risulta $\operatorname{tang} \alpha = \frac{n}{m-m'} = \operatorname{tang} 8^\circ\, 47'$, ove si fa astrazione dal segno di α, poichè nel nostro caso poco interessa di sapere se il contatto siegua piuttosto nella parte boreale, che nella parte australe. Trovato α, il limite della latitudine geocentrica per la possibilità del contatto sarà $\lambda' = 1013'' \sec \alpha = 1025'',0$, e però $\lambda = \frac{1-a}{a} \lambda' = 392'',0$; e ponendo, come sopra, $i = 3^\circ\, 25'\, 35''$, troveremo $t = 1^\circ\, 50'\, 25''$.

Se adunque nelle congiunzioni inferiori la distanza di Venere dal nodo ascendente o discendente sarà minore di $\pm 1^\circ\, 50'$ avrà luogo il passaggio sul disco del Sole. Premesse queste cose, passiamo alla soluzione del seguente

Problema. Determinare i periodi che riconducono i passaggi di Venere sul disco del Sole.

315. Sia (*Fig.* 5) ACD l'ecclittica, AVD l'orbita di Venere, A il nodo ascendente, D il nodo discendente. Presi gli archi AA', AA'', DD', DD'' uguali $1^\circ\, 50'$, avrà luogo il passaggio se la congiunzione accaderà mentre Venere si trova nell'arco AA'', ovvero nell'arco DD''. Posto ciò, fingiamo Venere in congiunzione nel punto A, e ricerchiamo dopo quanto tempo ritornerà in congiunzione verso il punto A, o verso il punto D. Indicando la durata media della sua rivoluzione sinodica per S, quella della sua rivoluzione siderale per T, e la durata della rivoluzione siderale della terra per A, dietro le formule ed i ragionamenti del § 219 troveremo $S = \frac{AT}{A-T}$, ove so-

Digitized by Google

stituendo i numeri relativi a Venere ed alla terra presi dal quadro del sistema planetario trovasi la durata della rivoluzione sinodica $= 583^{g},921411$, dopo il qual tempo Venere ed il Sole ritrovansi nuovamente in congiunzione. Ora in questo intervallo essi percorrono, oltre i circoli interi, $215^{\circ}\ 32'\ 27''$ in virtù del loro moto medio periodico; e siccome la longitudine del nodo, per la variazione secolare, in 583^{g} aumenta di $50''$, perciò la prossima congiunzione seguirà in una distanza dal nodo $A = 215^{\circ}\ 31'\ 37'' = 215^{\circ},527$. Si faccia ora la seguente proporzione. Se in una rivoluzione sinodica Venere allontanasi dal nodo di $215^{\circ},527$, in x rivoluzioni sinodiche si allontanerà di 180°, donde otterrassi $x = \frac{180000}{215527}$. Svolgendo questa frazione in frazione continua si trova

$$x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{43}}}}$$

la quale ridotta coi metodi che insegnansi nell'aritmetica, nelle frazioni ordinarie che la rappresentano in numeri più semplici, e nel tempo stesso il più esattamente che sia possibile, porge le seguenti $0, \frac{1}{1}, \frac{5}{6}, \frac{76}{91}, \frac{3273}{3919}$.

Trascurando ora le prime due, come troppo remote dal valore vero di x, la terza ci annunzia che in cinque rivoluzioni sinodiche Venere sembra descrivere rapporto al nodo 6 mezze circonferenze, la quarta più esattamente esprime che in 76 rivoluzioni si allontana dal nodo 91 mezze circonferenze, e così di seguito. Combinando le frazioni $\frac{5}{6}, \frac{76}{91}$ si formerà la frazione $\frac{n\,76 \pm m\,5}{n\,91 \pm m\,6}$, donde si traggono le seguenti, che somministrano altrettanti periodi utili per il ritorno dei passaggi sul disco solare $\frac{5}{6}, \frac{71}{85}, \frac{76}{91}, \frac{81}{97}, \frac{147}{176}, \frac{152}{182}, \frac{157}{188}$ ec., nelle quali frazioni i numeratori esprimono il numero delle rivoluzioni sinodiche necessarie perchè Venere si allontani dal nodo di un numero di mezze circonferenze espresso dal denominatore. A questo proposito conviene osservare che il vero angolo percorso da Venere e dal Sole non sarà esattamente rappresentato dal denominatore, essendosi in ogni rivoluzione trascurati dei circoli interi. Assumendo l'angolo da Venere trascorso rapporto al nodo in una rivoluzione sinodica

= 215°,527, e lasciando da parte le circonferenze intere, che poco interessa di conoscere, si formerà facilmente la seguente tavoletta, nella quale si deve osservare che per anno Giuliano intendesi il periodo di 365ᵍ 6ʰ

rivoluz. sinodiche	anni Giul.		gior.	ore	min.	moto medio di Venere rapporto al nodo				
5	8	—	2ᵍ	9ʰ	26′	1 circ.	—	2°	21′	54″
71	113	+	185	4	5	1 ½	+	2	25	1
76	121	+	182	18	39	1 ½	+	0	3	7
81	129	+	180	9	13	½ ½	—	2	18	47
147	235	+	2	16	44	1	+	2	28	8
152	243	+	0	7	18	1	+	0	6	14
157	251	—	2	2	7	1	—	2	15	40

Per ben comprendere l'uso di questi periodi fingiamo una congiunzione di Venere col Sole in *A*. Nè il periodo di anni 8, nè quelli di 113 ½, di 129 ½, di 235, di 251 ricondurranno Venere in congiunzione verso il nodo ascendente *A*, o verso il nodo discendente *D* in tal vicinanza da poter porgere un passaggio sul Sole. Ma il periodo di anni 121 ½ riconducendo Venere in gran vicinanza al nodo *D*, darà un nuovo passaggio. Parimente quello di 243 riconduce il pianeta in congiunzione col Sole alla distanza di 6′ da *A*, e però porgerà un nuovo passaggio. Del pari se fingiamo una congiunzione verso *A″*, i periodi corrispondenti a 5, 81, 157 rivoluzioni sinodiche ricondurranno Venere in congiunzione fra i limiti *A″ A″*, ovvero *D′ D″*, e però daranno un passaggio nelle epoche corrispondenti. In tal guisa qualora siasi in generale calcolato il tempo di un passaggio di Venere, si potrà vedere in quali anni sia per accaderne un altro senza essere obbligati ad esaminare tutte le sue congiunzioni col Sole, e si potrà costruire una tavola dei futuri passaggi di Venere, come quella che vedesi nell'Astronomia del signor De-Lambre (Vol. II. pag. 473).

Lo stesso metodo si può seguire eziandio per determinare i periodi che riconducono i passaggi di Mercurio sul disco del Sole, dei quali trovasi una tavola calcolata per tre secoli dal 1600 fino al 1900 dietro le tavole astronomiche del signor La-Lande nella citata Astronomia pag. 518.

CAPITOLO III.

Delle forze centrali. Teorica del moto dei pianeti e delle comete intorno al Sole.

316. Nel primo volume abbiamo dietro le osservazioni dimostrato, che i pianeti tutti si muovono intorno al centro del Sole in orbite più o meno ellittiche comprese in piani pressochè fissi, condotti per il centro del Sole con leggi assai rimarchevoli, l'enunziato delle quali al celebre Keplero dovuto, è stato da noi riferito al § 237. La Luna intorno alla terra, ed i pianeti secondarj intorno al centro dei loro pianeti primarj si muovono per modo che alle stesse leggi di Keplero ubbidiscono. Donde è forza conchiudere che sieno esse il risultamento di una qualche proprietà rimarchevole, o di una qualche forza sollecitante, la quale con legge costante agisca sopra tutti i corpi del sistema solare. Noi pertanto a compimento di quanto abbiamo finora esposto, ragionando sui semplici dati dell'osservazione, ci faremo ad indagare: 1.° qual sia questa forza sollecitante che anima al moto i pianeti, e li mantiene inalterabilmente nelle loro orbite ellittiche; 2.° con qual legge essa agisca; ed avendo dimostrato che conviene ammettere nel centro del Sole e dei pianeti una forza che spinge gli uni verso gli altri in ragione inversa dei quadrati delle loro scambievoli distanze, e diretta delle loro masse, passeremo 3.° a dimostrare che supposta viceversa una forza quale ora l'abbiamo descritta nel centro del Sole e dei pianeti, potranno questi aggirarsi intorno al Sole se sono primarj, od intorno ai pianeti primarj, se trattasi di satelliti in una qualunque delle tre sezioni del cono, ed a questo proposito brevemente accenneremo le proprietà del moto ellittico e del moto parabolico, da cui dipende la teoria delle comete, come dimostreremo nel capitolo IV dopo di aver riferito il recentissimo metodo del celebre Gauss per calcolare l'orbita di un nuovo pianeta con tre osservazioni geocentriche nel supposto, che ubbidendo alle leggi di Keplero debba avvolgersi in un'ellisse d'ignoti parametri e di sconosciuta posizione intorno al Sole. Prima però di progredire a ragionare dei proposti argomenti, a maggiore chiarezza riuniremo qui i seguenti lemmi presi dalla meccanica e dalla geometria sublime.

1.° Un corpo non può muoversi con moto vario in una trajettoria curvilinea, se non venga ad ogni istante trattenuto, o, dirò così, animato da una forza del genere delle acceleratrici, la quale si combini con la primitiva forza di projezione.

2.° Muovendosi il corpo in un piano, se ad ogni istante si riferisca la sua posizione in questo piano a due assi ortogonali col mezzo di due coordinate, che appelleremo x, y, e se nel tempo stesso si decompongano le forze tutte che lo animano in due sistemi di forze, le une paralelle all'asse delle x, la cui somma si rappresenti per X, le altre paralelle all'asse delle y, la somma delle quali sia $= Y$, chiamando t il tempo corrispondente all'istante considerato espresso in giorni e parti di giorno decorso da una epoca determinata presa ad origine dei tempi, e prendendo l'elemento dt costante, dalla meccanica abbiamo le seguenti equazioni: $\frac{d^2 x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = Y$; la velocità paralella alle $x = \frac{dx}{dt}$; la velocità paralella alle $y = \frac{dy}{dt}$, e se s è lo spazio curvilineo o rettilineo percorso dal principio del moto, ed u la celerità assoluta, sarà $u = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dt}$. Se chiamisi φ la risultante delle forze X, Y, avremo $\varphi = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, la quale farà con gli assi delle x, y degli angoli che indicheremo per (φ, x), (φ, y), e saranno essi determinati dalle equazioni $\cos(\varphi, x) = \frac{X}{\varphi}$; $\cos(\varphi, y) = \frac{Y}{\varphi}$.

3.° Se i punti di una linea curva qualunque riferiscansi a coordinate polari (*Fig.* 6) intorno al polo F col mezzo di un raggio vettore $FM = r$, e dell'angolo $PFM = v$ da esso compreso con la linea data PFA, sarà per la geometria l'elemento dell'area $MFm = \frac{1}{2} r^2 dv$. Che se dalle coordinate polari si passa alle coordinate rettangole $FQ = x = r\cos v$, $QM = y = r \operatorname{sen} v$, si avrà l'elemento dell'area $MFm = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$. In fatti differenziando l'equazione $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v$, avremo $x\,dy - y\,dx = \frac{x\,dv}{\cos^2 v} = r^2 dv$. Dunque ec.

4.° Se supponiamo che PMA sia l'ellisse percorsa da un pianeta intorno al centro del Sole situato in F, adotteremo sempre le denominazioni seguenti. Semiasse maggiore $CP = CA = a$; $CF = ae$, cosicchè sarà e l'eccentricità. Semiasse minore $CB = b$; ordinata del fuoco, ossia semiparametro $= p$. Anomalia vera contata dal perielio $P = PFM = v$, $FM = r$, e fra queste quantità regneranno le seguenti equazioni, delle quali abbiamo avuto occasione di servirci anche altre volte $b = a\sqrt{(1 - e^2)}$; $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$;

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad \text{ovvero} \quad r = \frac{p}{1+e\cos v}.$$

Dalle sezioni coniche risulta che l'equazione dell'ellisse cangiasi in quella della parabola, se $a=\infty$, $e=1$, $p=2$ dist. periclia $=2PF$. Posto quindi $PF=q$, $e=1$, l'equazione polare della parabola sarà $r=\frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v}$. Del pari la stessa equazione $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$ rappresenterà un'iperbola, se sia $e>1$, ed a quantità negativa. Però l'equazione $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$ rappresenta tutte tre le sezioni del cono. Premessi questi lemmi, passiamo alla soluzione del seguente

Problema I. Supposto che un pianeta muovasi in un' ellisse intorno al centro del Sole con le leggi di Keplero, domandasi la natura della forza acceleratrice che lo ritiene nella sua orbita.

317. Sia PBA (*Fig.* 6) l'ellisse percorsa dal pianeta, PA l'asse maggiore che riguarderemo come asse delle x, le y essendo prese in una linea ad esso perpendicolare condotta per il foco F. Mentre il pianeta trovasi in M, si decompongano le forze che lo sollecitano al moto in due, l'una paralella a PA, che porremo $=-X$, l'altra diretta secondo QM, che rappresenteremo per $-Y$, alle quali diamo il segno —, perchè essendo la curva concava verso l'asse, l'azione della forza acceleratrice tende a diminuire le coordinate. Chiamando ora t il tempo decorso dopo il passaggio del corpo per il punto P; x, y le sue coordinate, avremo le due seguenti equazioni (§ 316)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -Y \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Moltiplicando la seconda per x, la prima per $-y$, e sommando si ottiene . . $\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = Xy - Yx \quad . \quad . \quad (B)$

Frattanto la seconda legge di Keplero, in virtù della quale le aree sono proporzionali ai tempi, dà $\frac{r^2\,dv}{dt} = \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c$, essendo c una costante; e differenziando nel supposto di dt costante, ottiensi $\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 0$. Quindi l'equazione (B) darà $X:Y::x:y$. Farà perciò la risultante delle forze sollecitanti il pianeta nel punto M un angolo con l'asse maggiore determinato dall'equazione

$\cos(\varphi, x) = \frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2)}} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \cos PFM$, o in altri termini *la seconda legge di Keplero ci assicura che la risultante*

delle forze sollecitanti i pianeti al moto intorno al Sole è costantemente diretta verso il suo centro.

Per iscuoprirne la natura si moltiplichino le equazioni (A) per dx, dy rispettivamente, sommando i prodotti ed integrando avremo $\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}=f-\int(Xdx+Ydy)$.

Se indichiamo per φ la risultante delle forze X, Y, ed invece delle coordinate rettangole introduciamo le coordinate polari r, v, avremo evidentemente $X=\varphi\cos v=\frac{\varphi x}{r}$, $Y=\varphi\,\text{sen}\,v=\frac{\varphi y}{r}$, $x=r\cos v$, $y=r\,\text{sen}\,v$. Fatte le debite riduzioni, la precedente diviene $\frac{r^2dv^2+dr^2}{2dt^2}=f-\int\varphi\,dr$, dalla quale (sostituendo il valore di dt dato dall'equazione $\frac{r^2dv}{dt}=c$) si ottiene $\frac{c^2}{r^2}+\frac{c^2dr^2}{r^4dv^2}=2f-2\int\varphi\,dr$, donde colla differenziazione tosto deducesi . . . $\varphi=\frac{c^2}{r^3}-\frac{c^2}{2dr}d\frac{dr^2}{r^4dv^2}$ . . . (C)

Frattanto l'equazione polare dell'ellisse $\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos v}{p}$ differenziata dà $\frac{dr}{r^2dv}=\frac{e\,\text{sen}\,v}{p}$, e però $\frac{dr^2}{r^4dv^2}=\frac{e^2}{p^2}-\frac{e^2\cos^2 v}{p^2}=\frac{e^2-1}{p^2}+\frac{2}{p}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}$. Introducendolo nell'equazione (C), essa si cangia nella seguente

$$\varphi=\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}=\frac{c^2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r^2}\quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

dalla quale raccogliesi, *che la forza centripeta che agisce in un pianeta mosso in una ellisse attorno al centro del Sole situato in uno dei fochi, varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro del medesimo.*

Il coefficiente costante $\frac{c^2}{a(1-e^2)}$, il quale rappresenta l'intensità di questa forza alla distanza $=1$, potrebbe essere diverso per ogni pianeta, poichè è funzione dei parametri dell'orbita. Ma in virtù della terza legge di Keplero, giusta la quale i quadrati dei tempi delle rivoluzioni periodiche variano in tutti i pianeti, come i cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite, facilmente si scorge essere questo coefficiente costante per tutti i pianeti. In fatti ponendo la durata della

Digitized by Google

rivoluzione siderale assoluta $= T$, ed il rapporto $T^2 : a^3$ costante per tutti i pianeti $= m^2$, avremo $T = m\, a^{3/2}$, e se S rappresenta la superficie dell'ellisse dal pianeta percorsa, la seconda legge di Keplero dà $\frac{S}{T} = \frac{r^2\, d\, v}{2\, d\, t} = \frac{1}{2}\, c$. Ma $S = \pi\, a\, b = \pi\, a^2 \sqrt{(1 - e^2)}$, dunque

$$c = \frac{2\, \pi\, a^2 \sqrt{(1 - e^2)}}{T} = \frac{2\, \pi\, a^2 \sqrt{(1 - e^2)}}{m\, a \sqrt{a}}; \text{ e però } \frac{c^2}{a(1 - e^2)} = \frac{4\, \pi^2}{m^2},$$

cioè costante per tutti i pianeti. Risulta da ciò, *che la forza centripeta che trattiene i pianeti nelle loro orbite ellittiche intorno al Sole costantemente diretta al centro di questo astro è la stessa per tutti i pianeti, ed agisce sempre sopra di essi in ragione inversa dei quadrati delle distanze;* o in altri termini *nel centro del Sole risiede una forza di attrazione che per via di un legame invisibile, ed in modo a noi sconosciuto, attrae i pianeti con intensità che decresce, come aumentano i quadrati delle distanze*, la quale insigne scoperta è dovuta a Newton.

318. *Coroll.* I pianeti secondarj percorrendo con le stesse leggi di Keplero intorno ai pianeti primarj delle orbite ellittiche è forza conchiudere, che eziandio nel centro di questi ultimi risieda un potere attraente che si propaghi ai loro satelliti ed agli altri corpi del sistema planetario nell'inversa ragione dei quadrati delle distanze. L'intensità di questa forza attrattiva, ossia la quantità di moto che in una data molecola tende ad imprimere all'unità di distanza, è diversa nel Sole e nei pianeti. Dietro le osservazioni è di gran lunga maggiore nel Sole che nei pianeti, ed in questi non sembra seguire alcun rapporto coi loro volumi. Questa intensità viene d'ordinario appellata *massa*, ed i pianeti tutti del sistema solare sì primarj che secondarj sembrano gli uni sugli altri agire in ragione diretta delle loro masse, ed inversa dei quadrati delle distanze. Tale è appunto il celebre principio dell'attrazione universale di Newton, il quale resta così dalle osservazioni astronomiche pienamente confermato. Vero è che nè i pianeti primarj intorno al Sole, nè i satelliti intorno ai pianeti primarj percorrono perfette ellissi con le assolute leggi di Keplero; le aberrazioni però picciolissime non possono persuadere a rinunziare ad un principio di tanta semplicità. Che anzi ben considerando l'indole di queste diseguaglianze si perviene a riconoscere in esse la vera e generale dimostrazione dell'attrazione universale, poichè ad altro non sono dovute che alle scambievoli attrazioni, le quali picciolissime in confronto dell'attrazione principale, sono però valevoli ad alterare le leggi del moto di quest'ultima. Noi per ora non ne faremo parola, poichè la teorica di questi perturbamenti forma il particolare oggetto della meccanica celeste, e nelle cose seguenti riguarderemo le estranee azioni

come evanescenti in confronto dell' attrazione principale del Sole sopra un pianeta, o di un pianeta sopra un suo satellite.

Problema II. Supposto che due corpi, per esempio, il Sole ed un pianeta, si attraggano in ragione inversa dei quadrati delle loro scambievoli distanze, determinare le circostanze del moto relativo del pianeta intorno al Sole nell' ipotesi che sia stata impressa a quello una forza di projezione qualunque.

319. Egli è in primo luogo manifesto che descriverà il pianeta intorno al Sole una curva compresa nel piano condotto per la forza di projezione, e per il centro del Sole, non esistendo alcuna forza a questo piano perpendicolare che ne allontani il pianeta. Rappresenti perciò (*Fig.* 6) F il centro del Sole, PMB la trajettoria dal pianeta percorsa, M la sua posizione alla fine di un tempo t qualunque. Riferiscasi il punto M a due coordinate rettangole $FQ = x$, $QM = y$, e pongasi $FM = r$, $PFM = v$, l' intensità dell' attrazione solare all' unità di distanza $= S$, del pianeta $= m$. Il pianeta verrà attratto verso il Sole con una forza $= \frac{S}{r^2}$, ed il Sole verso il pianeta da $\frac{m}{r^2}$. Laonde stabilendo fisso il centro del Sole, sarà il pianeta attratto verso il Sole da una forza espressa da $\frac{S+m}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}$, ponendo per brevità $S + m = \mu$. Decomposta questa forza in due, l'una paralella alle x, l'altra alle y, sarà la prima componente $= \frac{\mu}{r^2} \cos v = \frac{\mu x}{r^3}$, la seconda $= \frac{\mu}{r^2} \operatorname{sen} v = \frac{\mu y}{r^3}$. Quindi ragionando come nel problema precedente, formeremo le due seguenti equazioni

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{-\mu x}{r^3} \quad . \; . \; . \; (1) \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{-\mu y}{r^3} \quad . \; . \; . \; (2)$$

dall' integrazione delle quali dipende la soluzione del proposto problema.

Moltiplicando la seconda equazione per x, la prima per $-y$, e sommando i prodotti, si ottiene $\frac{x\, d^2 y - y\, d^2 x}{d t^2} = 0$, la quale integrata dà . . . $x\, dy - y\, dx = h\, dt$ . . . (3)

h essendo la costante arbitraria introdotta dall' integrazione. Rammentando ora che $x\, dy - y\, dx$ è il doppio dell' elemento dell' area MFm percorsa dal raggio nel tempuscolo dt (§ 316 3.°) si scorge essere in virtù dell' equazione (3) gli elementi delle aree proporzionali agli elementi dei tempi, e quindi *nella assunta legge di attrazione le aree percorse dai raggi vettori nel moto dei pianeti intorno al Sole saranno proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*

Moltiplicando ora l'equazione (1) per dx, l'equazione (2) per dy, sommando i prodotti, ed osservando che a motivo di $r^2 = x^2 + y^2$, si ha $x\,dx + y\,dy = r\,dr$, formerassi la seguente $\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{\mu\,dr}{r^2} = 0$, la quale integrata porge

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2\,dt^2} - \frac{\mu}{r} = f \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

f essendo una nuova costante introdotta dall'integrazione.

Per procedere ad una nuova integrazione s'introducano le coordinate polari r, v nei due integrali di primo ordine (3), (4). A motivo di $x = r\cos v$, $y = r\,\text{sen}\,v$, si avrà $x\,dy - y\,dx = r^2\,dv$, $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,dv^2$; perciò essi diverranno

$$r^2\,dv = h\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (3)\,; \qquad \frac{dr^2 + r^2\,dv^2}{2\,dt^2} - \frac{\mu}{r} = f \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Sostituendo nell'equazione (4) il valore di dt ricavato dalla (3), si ottiene . . . $\frac{h^2}{2\,r^4}\frac{dr^2}{dv^2} + \frac{h^2}{2\,r^2} - \frac{\mu}{r} = f$ . . . (5)

dalla quale si deduce $dv = h\,dr : r^2 \sqrt{\left[2f + \frac{2\mu}{r} - \frac{h^2}{r^2}\right]}$, che è l'equazione differenziale della curva descritta dal pianeta intorno al Sole. Per integrarla, pongasi $\frac{1}{r} = z$, e la precedente diverrà

$$dv = \frac{-h\,dz}{\sqrt{[2f + 2\mu z - h^2 z^2]}} = -dz : \sqrt{\left[\frac{2f}{h^2} + \frac{\mu^2}{h^4} - \left(z - \frac{\mu}{h^2}\right)^2\right]},$$

il di cui integrale posto per brevità $q^2 = \frac{2f}{h^2} + \frac{\mu^2}{h^4}$, sarà

$v + A = \text{arco cos}\,\frac{z - \mu : h^2}{q}$, ossia $z = \frac{\mu}{h^2} + q\cos(v + A)$, ove A è la costante arbitraria dell'integrazione. Rimettendo per z il suo valore, la precedente si cangia nella seguente alle sezioni coniche

$$r = \frac{1}{\mu : h^2 + q\cos(v + A)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

i parametri della quale dipendono dalle costanti h, q, A.

Si osservi in primo luogo che la costante A dipende unicamente dalla posizione dell'asse delle x, la quale essendo arbitraria si potrà sempre in modo stabilire che sia $A = 0$, ed a tale oggetto basta prendere per asse delle x la linea degli absidi; perciò i parametri e la specie della sezione conica descritta dal pianeta dipenderanno unicamente dai costanti h, q. Se ora confrontiamo la nostra con l'equa-

quazione generale delle sezioni coniche $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$, avremo per determinare le dimensioni della trajettoria dal pianeta descritta le seguenti

$$\frac{\mu}{h^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}; \quad q = \sqrt{\left[\frac{2f}{h^2} + \frac{\mu^2}{h^4}\right]} = \frac{e}{a(1-e^2)} \quad . \; . \; . \; (7)$$

Da queste equazioni con facile eliminazione si ottengono eziandio le costanti arbitrarie h, f date per gli elementi dell'orbita nel modo seguente . . . $h = \sqrt{\mu}\sqrt{[a(1-e^2)]} = \sqrt{(\mu p)}$; $f = \frac{-\mu}{2a}$ . . . (8)

Potrà pertanto il pianeta in virtù dell'assunta legge di attrazione descrivere intorno al Sole una qualunque sezione conica, ed in particolare descriverà un'ellisse, se dalle equazioni (7) risulta $e < 1$, una parabola se $e = 1$, ed $a = \infty$, un'iperbola se $e > 1$, ed a negativo.

320. Potrebbe sembrare a prima vista che la riferita soluzione fosse soltanto particolare, e che in conseguenza vi fossero delle altre trajettorie, le quali soddisfacessero alla questione, poichè le equazioni (1), (2) essendo di secondo ordine devono condurre ad una equazione finita fra quattro costanti arbitrarie, mentre non ne abbiamo trovate che tre. Frattanto è facile di vedere che ciò non accaderà; in fatti l'equazione $h\,d\,t = r^2\,d\,v$, che rimane ad integrare introdurrà una nuova costante arbitraria, e dipendendo essa solo dall'origine del tempo non farà in alcun modo variare i parametri delle trajettorie, le quali perciò rimarranno sempre sezioni coniche.

321. L'equazione $h\,d\,t = r^2\,d\,v$ per la sostituzione di $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$ diviene quella stessa che già abbiamo trattato nella teoria del Sole, e donde abbiamo dedotte le regole per il calcolo dell'anomalia vera col mezzo dell'anomalia media, ed in conseguenza ci dispenseremo di qui ripetere quello che ivi abbiamo detto; solo esporremo come essa conduca alla terza legge da Keplero osservata nel moto ellittico dei pianeti. S'indichi per s la superficie del settore dal raggio r percorso nel tempo t, sarà $d\,s = \frac{1}{2} r^2\,d\,v = \frac{1}{2} h\,d\,t$, e però integrando . . . $s = \frac{1}{2} h\,t = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu p)}\,t$ . . . (9)
alla quale non aggiungo costante perchè supporrò che t abbia la sua origine quando $s = 0$. Se il pianeta ha ricevuto tal forza di projezione da descrivere un'ellisse, indicando per T il tempo della sua rivoluzione siderale, e per S l'intera superficie dell'ellisse, avremo $S = \pi\,a\,b = \pi\,a^2\sqrt{(1-e^2)} = \pi\,a^{3/2}\sqrt{p}$; π essendo il rapporto della circonferenza al diametro. Quindi l'equazione (9) darà

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\,a^{3/2} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Del pari se per un altro pianeta fingiamo che le quantità T, a, μ divengano T', a', μ', avremo $T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu'}} a'^{3/2}$, dalle quali due equazioni deducesi $T^2 : T'^2 :: \frac{a^3}{\mu} : \frac{a'^3}{\mu'}$.

Ora essendo $\mu = S + m$, $\mu' = S + m'$, se fosse $m = m'$, od almeno m, m' fossero evanescenti in confronto di S, si avrebbe la proporzione $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$, la qual proporzione essendo presso a poco, in virtù della terza legge di Keplero, soddisfatta nel caso della natura, dobbiamo inferirne essere il potere attrattivo in tutti i pianeti lo stesso, od almeno sì piccolo in confronto di S da eludere la precisione delle osservazioni.

322. L'equazione (10) porge un metodo molto semplice per determinare la massa o potere attrattivo dei pianeti che hanno satelliti, quali sono la Terra, Giove, Saturno, Urano. Chiamando infatti τ la rivoluzione siderale di un satellite intorno al pianeta, di cui domandasi la massa, h il semiasse maggiore della sua orbita, m la massa del pianeta, p quella del satellite, troveremo allo stesso modo $\tau = \frac{2\pi h^{3/2}}{\sqrt{(m+p)}}$.

Se si fanno di questa e della equazione (10) i quadrati, e si dividono l'una per l'altra, a motivo di $\mu = S + m$, si otterrà $\frac{m+p}{S+m} = \frac{h^3}{a^3}\frac{T^2}{\tau^2}$. Siccome poi nel secondo membro di questa equazione $\frac{h}{a}$ è sempre una quantità molto picciola per tutti i pianeti che hanno satelliti, sarà di necessità $m + p$ molto picciolo in confronto di $S + m$, e però m trascurabile in confronto di S. D'altra parte i satelliti essendo sempre picciioli corpicciuoli in faccia ai pianeti primarj, è presumibile che il loro potere attrattivo p sia di gran lunga minore di m, là quale presunzione vien poi da altri fenomeni del sistema del mondo comprovata. Quindi la nostra equazione cangierassi in

$$\frac{m}{S} = \frac{h^3}{a^3}\frac{T^2}{\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

da cui, sostituendo i valori di h, a, T, τ presi dal quadro del sistema planetario, otterremo la frazione $\frac{m}{S}$ per la Terra, Giove, Saturno, Urano.

Non così agevolmente deducesi il potere attrattivo per quei pianeti che non hanno satelliti. Parte per congettura, parte col confronto della precessione degli equinozj calcolata dietro la teoria con quella somministrata dalle osservazioni sono giunti gli Analisti ad assegnare

la massa di Mercurio, Venere, Marte; quella della Luna viene somministrata dalla teorica del flusso e riflusso del mare, ed anche da quella della nutazione dell'asse terrestre. Quelle dei satelliti di Giove sono state ricavate da un profondo esame delle loro ineguaglianze e dei loro eclissi. Noi qui non possiamo fare altro in questo proposito che riferire i risultamenti dal sig. La-Place ottenuti, e sceglieremo in particolare gli ultimi rapporti da esso presentati nell'insigne sua opera *Système du monde* quarta edizione; quella del Sole essendo $= 1$, si ha la

massa di Mercurio	$= \frac{1}{2025810}$	Saturno	$= \frac{1}{3512,08}$	
Venere	$= \frac{1}{356632}$	Urano	$= \frac{1}{19504}$	
Terra	$= \frac{1}{337102}$	Luna	$= \frac{1}{68,5}$	di quella della terra
Marte	$= \frac{1}{2546320}$	I. sat. di Giove	$= 0,0000173281$	quella di Giove essendo $= 1$.
		II.	$= 0,0000232355$	
Giove	$= \frac{1}{1066,09}$	III.	$= 0,0000884972$	
		IV.	$= 0,0000426591$	

323. Siamo ora in caso di assegnare mediante le osservazioni il valore numerico di S, ossia del numero rappresentante il potere attrattivo del Sole, assunta la durata del giorno medio ad unità di misura del tempo. L'equazione (10) può eziandio scriversi sotto la forma $\sqrt{S} = \frac{2\pi a^{3/2}}{T\sqrt{(1+m:S)}}$. Se adunque nel secondo membro invece di a, T, $\frac{m}{S}$ scriviamo i valori corrispondenti ad un pianeta qualunque, otterremo una quantità costante per tutti i pianeti, che indicheremo d'ora in poi per k. Così ponendo i dati relativi alla terra, il signor dott. Gauss col mezzo di tavole a 10 cifre decimali ottiene $\log k = 8,2355814414$, e quindi $k = 0,01720209895$ (*).

Introducendo ora questo numero k nelle precedenti equazioni, tutto sarà noto e facile a ridursi a numeri. Chiamando pertanto s l'area dal raggio vettore di un pianeta percorsa nel tempo t intorno al Sole, ed indicando per m la massa del pianeta, presa quella del Sole ad unità di misura, ossia quel numero che nelle cose precedenti era rap-

(*) Questo numero k corrisponde al duplo di quello che nel primo volume abbiamo indicato collo stesso simbolo (§ 237), e la picciola differenza che vi s'incontra da ciò dipende che ivi si è trascurata la massa della terra.

presentato da $\frac{m}{S}$, per ζ il moto diurno siderale (ch'è $= \frac{360^\circ}{T} = \frac{2\pi}{T}$) varranno per i pianeti le seguenti equazioni

$$s = \tfrac{1}{2} k t \sqrt{(1+m)} \sqrt{p}; \quad T = \frac{2\pi a^{3/2}}{k\sqrt{(1+m)}}; \quad \zeta = R'' k \sqrt{(1+m)}\, a^{-3/2} \quad (12)$$

ove moltiplicasi per R'' il valore di k sopra riferito affine di ridurlo in secondi di grado, poichè d'ordinario desiderasi in arco il moto medio siderale. Avremo poi in numeri $R'' k = 3548'', 18761$, $\log R'' k = 3,5500065746$. Inoltre sarà $\log \frac{2\pi}{k} = 2,5625985$.

Problema III. Essendo data la celerità iniziale del mobile, e la direzione dell'impulso primitivo, determinare la sezione conica che dovrà descrivere.

324. Sia (*Fig.* 7) S il centro del Sole, P il pianeta nel primo istante del suo movimento che riceva nella direzione Pp una velocità $= V$, e faccia col raggio vettore $SP = r$ un angolo $= \iota$. Si domandano i parametri della trajettoria dal pianeta descritta.

Si riprendano le equazioni differenziali del primo ordine date nel problema precedente, cioè

$$(3)\quad x\,dy - y\,dx = h\,dt, \quad \text{ossia} \quad r^2\,dv = h\,dt;$$

$$(4)\quad \frac{dx^2 + dy^2}{2\,dt^2} = \frac{\mu}{r} + f, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dr^2 + r^2\,dv^2}{2\,dt^2} = \frac{\mu}{r} + f,$$

ove è $h = \sqrt{[\mu a (1 - e^2)]}$, $f = \frac{-\mu}{2a}$.

Siccome $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ è in generale uguale al quadrato della velocità, così per il primo istante avremo $V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$. Se per termine di confronto delle celerità prendiamo la celerità diurna del pianeta intorno al Sole nel caso che egli fosse per descrivere un circolo di raggio $= 1$, e la indichiamo per U, avremo (ponendo $r = a = 1$) $U^2 = \mu$, e quindi la precedente equazione darà

$$V^2 = U^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right); \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{U^2} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

dalla quale si ha il semiasse maggiore della trajettoria.

Per determinare il suo semiparametro sostituiscasi nell'equazione (4) in luogo di $\frac{r^2\,dv^2}{dt^2}$ il suo valore $\frac{h^2}{r^2}$ dedotto dall'equazione (3), ed otterrassi $\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{h^2}{r^2} = U^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$. Ora $\frac{dr}{dt}$ rappresenta la celerità

del pianeta decomposta nella direzione del raggio r, la quale per il principio del moto è $= V \cos \iota$; quindi la nostra equazione, sostituendo il valore di V^2 preso dalla (13), darà $h^2 = U^2 r^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \operatorname{sen}^2 \iota$, e perciò . . . $\mu a (1 - e^2) = U^2 p = V^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \iota$ . . . (14)

Conosciuti a, p si troverà l'eccentricità per mezzo dell'equazione seguente . . . $e = \frac{\sqrt{(a U^2 - V^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \iota)}}{U \sqrt{a}}$ . . . (15)

325. *Scolio I.* L'equazione (13) conduce a molte interessanti conseguenze che qui come a luogo opportuno riferiremo.

1.° In un circolo di raggio r in grazia di $a = r$, avremo $V = U \sqrt{\frac{1}{r}}$.

2.° Se sarà $V = U \sqrt{\frac{2}{r}}$, avremo $\frac{1}{a} = 0$; quindi $a = \infty$, e la trajettoria dal pianeta descritta sarà una parabola; la celerità del pianeta alla distanza r starà a quella che avrebbe descrivendo un circolo dello stesso raggio $r : : \sqrt{2} : 1$.

3.° Se sarà $V < U \sqrt{\frac{2}{r}}$, il mobile descriverà un'ellisse, poichè un tal valore di V rende a positivo; e se sarà $V > U \sqrt{\frac{2}{r}}$ il semiasse maggiore a diverrà negativo, e la trajettoria descritta sarà un'iperbola.

4.° Dai numeri 2.°, 3.° risulta che la velocità nell'ellisse è minore che nella parabola, ed in questa minore che nell'iperbola, qualora si consideri il mobile alla stessa distanza dal centro del Sole.

5.° Se un corpo cadesse dall'altezza r con una forza acceleratrice costante uguale a quella che anima il pianeta alla distanza r dal centro del Sole, chiamata u la celerità acquistata in fine di quella caduta, qualora sia partito dalla quiete, e g quella forza acceleratrice, avremo per la teoria dei gravi cadenti $u = \sqrt{(2 g r)}$, ma è $g = \frac{\mu}{r^2} = \frac{U^2}{r^2}$; quindi sarà $u = U \sqrt{\frac{2}{r}}$. Da ciò e dalle cose precedenti deducesi il seguente elegantissimo teorema.

» La velocità del pianeta in ciascun punto della sua trajettoria è » minore, uguale o maggiore di quella che acquisterebbe se rimanen- » do costante la forza acceleratrice che ivi lo anima, partisse dalla » quiete, e cadesse per linea retta sul centro del Sole, secondo che » la trajettoria da esso descritta è un'ellisse, una parabola, ovvero » un'iperbola ».

Digitized by Google

6.° Sia la celerità iniziale di projezione $= 0$; sarà in virtù dell'equazione (14) $p = 0$, ed il pianeta descriverà un'ellisse di parametro $= 0$, cioè cadrà per linea retta sul centro del Sole. In questa ipotesi, principiando a muoversi dalla quiete alla distanza r, l'equazione (13) darà $\frac{1}{a} = \frac{2}{r}$. Pervenuto alla distanza r' dal centro del Sole, supponiamo che abbia acquistato una celerità $= V'$; sarà $V'^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$. Uguagliando questa espressione alla quantità $\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ esprimente il quadrato della celerità di un pianeta moventesi in un'ellisse di semiasse $= a$, e considerato alla distanza r, si troverà $r - r' = \frac{r(2a - r)}{4a - r}$, la quale ci manifesta l'altezza, da cui dovrebbe il mobile cadere verso il centro del Sole essendo continuamente animato dall'attrazione solare, perchè acquistasse una celerità uguale a quella che alla distanza r ha nell'ellisse.

Posto $r = a$, si ottiene $r - r' = \frac{1}{3}r$; pertanto un pianeta che circolasse intorno al Sole alla distanza r animato da una forza $= \frac{\mu}{r^2}$, avrebbe in ogni punto della sua orbita una celerità uguale a quella che acquisterebbe con una caduta $= \frac{1}{3}r$, supponendolo partito dalla quiete, e continuamente animato dalla stessa legge di attrazione.

326. *Scolio II.* L'equazione $V'^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$ si poteva direttamente ricavare dalle condizioni del moto rettilineo di un corpo, il quale si avvicina al centro del Sole spinto da una forza che varj in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Diffatti alla fine del tempo t chiamando r' la sua distanza dal centro del Sole, avremo $\frac{d^2 r'}{dt^2} = -\frac{\mu}{r'^2}$, ove al secondo membro dassi il segno $-$, perchè crescendo t, r' diminuisce. Moltiplicando per $2\,dr'$, ed integrando per modo che al principio del moto sia $r' = r$, e la celerità iniziale $\frac{dr}{dt} = 0$, avremo $\frac{dr'^2}{dt^2} = 2\mu\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$, la quale coincide colla superiore.

Se si desiderasse il tempo impiegato a cadere per l'altezza $r - r'$ si otterrebbe integrando la precedente equazione, la quale darà $dt = -dr' : \sqrt{(2\mu)}\sqrt{\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)}$ (si prende il segno $-$ per la ragione sopraccennata).

L'integrazione si eseguisce facilmente ponendo $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \tang^2 \psi$, ossia $r' = r \cos^2 \psi$. Con questa sostituzione la nostra formula differenziale diverrà $dt = \frac{2 r^{3:2}}{\sqrt{(2\mu)}} \cos^2 \psi \, d\psi = \frac{r^{3:2}}{\sqrt{(2\mu)}} (1 + \cos 2\psi) \, d\psi$.

Integrando ed osservando che posto $t = 0$, deve essere $r' = r$, e però $\cos^2 \psi = 1$, cioè $\psi = 0$, avremo $t = \frac{r^{3:2}}{\sqrt{(2\mu)}} (\psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi)$, dalla quale avrassi con ispeditezza il tempo t per la caduta $r - r'$, quando siasi calcolato ψ dall'equazione $\cos \psi = \sqrt{\frac{r'}{r}}$.

Se si desiderasse il tempo impiegato a giungere sul centro del Sole, ove si suppone che risieda la forza attrattiva, si farà $r' = 0$, e però $\psi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$; indicando quindi il richiesto tempo per τ, si avrà $\tau = \frac{\pi r^{3:2}}{2\sqrt{(2\mu)}}$.

Considerando ora un pianeta di egual massa moventesi intorno al Sole in un'ellisse di asse maggiore $= r$, il tempo della sua rivoluzione periodica in virtù dell'equazione (10) è $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} (\frac{1}{2} r)^{3:2} = \frac{\pi r^{3:2}}{\sqrt{(2\mu)}}$. Quindi il seguente teorema: *Il tempo della caduta ellittica di un pianeta nel Sole è uguale alla metà della rivoluzione periodica per un' ellisse, il cui asse maggiore fosse uguale all' altezza della caduta;* e lo stesso dicasi di un satellite rapporto al suo pianeta principale. Applicando alla Luna questo teorema, si troverà il tempo della sua caduta sul centro della terra $= 115^h\ 55'$.

327. *Scolio III.* Dietro le cose precedenti facilissima riesce la soluzione del seguente problema: *Supponendo che un pianeta si muova intorno al Sole in un' ellisse determinata, si domanda la direzione e la grandezza di una forza d' impulso che sia capace di mutare la sua orbita in un' altra sezione conica data di grandezza e di posizione.* Questo problema fu proposto e risoluto dal celebre La-Grange ad illustrazione della ipotesi di Olbers, di cui abbiamo parlato nel § 277. Le formule che ne esprimono la soluzione furono dal signor La-Grange riferite senza dimostrazione nel Giornale di *la-Meterie* per il mese di Marzo 1812, indi dimostrate dal sig. Oriani nel III volume dell' Istituto nazionale italiano, e dallo stesso La-Grange nel secondo volume della sua Meccanica analitica pubblicato dopo la sua morte nell' anno 1815. Noi rimanderemo i nostri lettori alle citate opere, ed invece passeremo ad esporre le leggi del moto parabolico ed iperbolico.

Digitized by Google

Leggi del moto parabolico ed iperbolico, ossia teorica del moto delle comete intorno al Sole.

328. Oltre i pianeti ed i satelliti, dei quali abbiamo finora trattato, si presentano spesso ai nostri sguardi le *comete*, che sono astri dotati essi pure di moto proprio per il cielo stellato, e dagli altri il più delle volte distinti da curiosissime apparenze. Imperocchè si vedono bene spesso accompagnati da lunga coda luminosa, talvolta da folto capillizio; sono d'ordinario male terminati, e globi non ben compatti appariscono, essendo accaduto di vedere delle stelle, mentre queste erano non solo immerse nella coda o capillizio che loro sta d'intorno, ma eziandio quando la loro più compatta parte, che *nucleo* suolsi appellare, era fra esse ed il nostro occhio interposta. I loro movimenti non sono, come quelli dei pianeti, sottoposti alla costante direzione d'occidente in oriente; talvolta vedute da noi hanno un moto rapidissimo, talvolta un moto assai lento. D'ordinario nella prima apparizione la loro luce e la loro coda sono debolissime; il loro moto molto tenue. A proporzione che ne va aumentando lo splendore, aumenta pure il moto diurno, e bene spesso giungono insieme al loro massimo valore, dopo di che diminuiscono l'uno e l'altro gradatamente fino a che essendosi ridotte a somma tenuità spariscono ai nostri occhi, nè più si possono osservare nemmeno con li migliori telescopj. Sovente vengono scoperte dalla vigilanza degli Astronomi con l'ajuto di ottici stromenti senza coda o chioma, ed invisibili ad occhio nudo si mantengono per tutta la loro apparizione sempre di luce assai debole. Il loro numero va continuamente aumentando per le frequenti scoperte che di esse fanno gli Astronomi, e ad un tale incremento molto hanno contribuito le diligenti perlustrazioni del firmamento fatte dal defunto signor Messier, dai signori Pons, Gambard, ed altri; il catalogo che ne abbiamo riferito in fine del primo volume, estendentesi fino al principio dell'anno corrente ne numera 137, delle quali è stata calcolata l'orbita, non comprendendovi le riapparizioni di quelle che vengono riposte fra le periodiche.

Gli antichi le riguardarono come corpi sublunari derivati da esalazioni terrestri, e come presagi di grandi sciagure per il genere umano, sebbene Seneca nel libro VII delle sue questioni naturali non abbia dubitato di porle fra il numero dei pianeti, ed abbia intorno ad esse direi quasi traveduto quello che era riservato al sublime genio di Newton di dimostrare. Fu infatti Newton (*) il primo a dimostrare che

(*) Comunemente si attribuisce a Doerfell l'onore di avere il primo pensato a spiegare le apparenze dei movimenti delle comete con l'ajuto di una curva para-

aggiransi le comete intorno al Sole in orbite ellittiche molto allungate, ed alla parabola molto vicine, cosicchè per il picciolo tratto di tempo in cui sono esse visibili in paragone di quello in cui a noi s'involano, possono le loro orbite aversi per paraboliche, ed in questa ipotesi il più delle volte si possono rappresentare con sufficiente esattezza le osservazioni geocentriche delle medesime. Vero è che molte sembrarono da questa legge notabilmente allontanarsi, ed i loro movimenti non si sono potuti rappresentare che con orbite ellittiche, e talvolta ancora con orbite iperboliche; scarso però è il numero di quest' ultime, e vista la stabilità del sistema mondiale siamo tentati ad attribuire agli errori delle osservazioni (spesso gravi nelle comete per la indecisione ed informe estensione del loro nucleo) le orbite iperboliche che vennero ad alcune attribuite da valentissimi calcolatori, giacchè una cometa moventesi in siffatta orbita perderebbesi nello spazio, vagando da uno in un altro sistema; la qual cosa se è matematicamente possibile, sembra poco probabile. Comunque ne sia, esporremo da bel principio le leggi del moto parabolico; indi mostre-

bolica senza togliere a Newton ed Hallay il merito loro dovuto per avere il primo diffusamente e chiaramente dati i precetti matematici relativi al moto loro intorno al Sole; il secondo di averli sì frequentemente messi in pratica per le molte orbite della quali ci ha lasciato il calcolo, e per il periodo discoperto lo una di esse divenuta celebre sotto il ann. stesso nome. L'eruditissimo signor bar. di Zach ha però dimostrato in un articolo interessante (*Zeitschrift fuer Astronomie B. VIII. pag.* 379. *an.* 1817.) che il rinomato matematico dello studio di Pisa Alfonso Borelli napolitano in una lettera al P. Stefano De Angeli lettore delle matematiche nello Studio di Padova intorno al *movimento della cometa apparsa nel Dicembre del* 1664 sotto il finto nome di *Pier Maria Mutoli* ha precaduto il Newton di 15 a 16 anni intorno alla vera teoria delle comete; e mentre Doerfall ha mostrato di non avere di essa una chiara idea, Borelli ha fatto vedere non potersi il suo movimento rappresentare nè nel sistema Ticonico, nè nel sistema Tolemaico, ma bensì convenire col sistema Copernicano, che egli appella costantemente *Pittagorico* per sottrarsi (a quanto pare) all' osservazione di troppo rigidi inquisitori; tanto ancora erano *fisse* nella mente di tutti le traversie provate da Galileo. Chiaramente espone il Borelli doversi combinare il moto della terra col moto della cometa intorno al Sole; dice che il calcolo gli ha mostrato muoversi intorno al Sole in una parabola, e non dubita che se potesse continuarsi a vedere per più lungo tempo, si troverebbe un'orbita ellittica. Per ultimo annunzia che la dimostrazione rigorosa di queste sue asserzioni sarà da lui data in altra occasione. In una lettera scritta da Pisa al Granduca Leopoldo il 4 Maggio 1665 ripete non potersi avere per rettilinea la via della cometa, ma doversi ritenere per una curva sorprendentemente simile alla parabola; ciò mostrarglielo il calcolo, ed un esperimento che ripeterà in Firenze alla presenza di S. A.

Le molte contraddizioni provate in allora dal sistema Copernicano furono forse la sola cagione che questi preziosi lavori del Borelli fossero universalmente ignorati e quasi soppressi; e per le stesse cagioni non fu forse mai pubblicato il lavoro matematico che egli doveva avere apparecchiato, il quale non avrebbe mancato di fargli grandissimo onore, sapendosi per il suo trattato *De motu animalium* quanto profondo geometra ei fosse. Così i pregiudizii dei tempi hanno involato all' Italia l' onore di una delle più belle scoperte di Newton!

Digitized by Google

remo come dalle posizioni calcolate in una parabola si passi ai luoghi corrispondenti in un' ellisse molto allungata; per ultimo in un' apposita proposizione daremo eziandio i precetti per il calcolo dell' anomalia vera in un' orbita iperbolica. Per servire alla brevità, invece di risalire dalle osservazioni geocentriche alla natura delle orbite cometarie, siccome abbiamo nel primo volume praticato per li pianeti, supporremo che percorrano delle orbite parabolichè, iperboliche od ellittiche molto allongate, ed insegneremo a determinare la loro posizione sì eliocentrica che geocentrica nelle seguenti proposizioni; quindi nel capitolo seguente esporremo il metodo da seguirsi per dedurre dalle osservazioni i parametri e la posizione delle orbite da principio supposte conosciute.

Problema IV. Supposto che un pianeta od una cometa, di cui trascureremo la massa in confronto di quella del Sole, muovasi in una parabola data di grandezza e di posizione, determinare in essa la sua posizione ad un qualunque tempo t contato dal passaggio per il perielio.

329. (*Fig.* 10) Sia HPM la parabola dalla cometa descritta, P il perielio, S il centro del Sole e foco della parabola, ed al proposto tempo t trovisi in M. Pongasi l'anomalia vera $PSM = v$, $SM = r$, $PS = q$, sarà il semiparametro $p = 2q$; e l'equazione polare della parabola darà $r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$. Chiamando s l'area del settore parabolico PSM, ed osservando che $ds = \frac{1}{2} r^2 dv$, la prima delle equazioni (12) § 323 a motivo di $m = 0$, darà $r^2 dv = k \sqrt{(2q)}\, dt$. Sostituendo il valore di r, per ottenere v dovrassi integrare l'equazione $k \sqrt{2.q^{-3/2}}\, dt = \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2} v} = \frac{2\, d \tang \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$. Ponendo $\tang \frac{1}{2} v = y$, essa cangiasi nella seguente $k \sqrt{\frac{1}{2} q^{-3/2}}\, dt = dy + y^2 dy$, che integrata dà

$$3 k \sqrt{\tfrac{1}{2} q^{-3/2}}\, t = 3y + y^3 = 3 \tang \tfrac{1}{2} v + \tang^3 \tfrac{1}{2} v \ldots (1)$$

ove non si aggiunge costante, perchè posto $t = 0$ si ha $v = 0$, e però $y = 0$.

Risolota l'equazione (1), si avrà y, e quindi l'anomalia vera v. Comodamente risolvesi quella equazione colle tavole dei logaritmi; infatti ponendo per brevità $3 k \sqrt{\frac{1}{2} q^{-3/2}} = N$, essa può scriversi sotto la forma $y^3 = Nt - 3y$.

Facciasi ora $y = \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}$; ossia $y^3 = m + n + 3 \sqrt[3]{(mn)} (\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})$. Confrontando i due valori di y^3, si soddisferà all'equazione ponendo $m + n = Nt$, $\sqrt[3]{(mn)} = -1$.

La seconda dà in generale $m = \cot \alpha$, $n = -\tang \alpha$, α essendo un angolo indeterminato. Sostituiti questi valori nella prima, se ne deduce $2 \cot 2 \alpha = Nt$, e però $\cot 2 \alpha = \frac{1}{2} Nt$.

Conosciuto α, sarà $y = \sqrt[3]{\cot \alpha} - \sqrt[3]{\tang \alpha}$, e se pongasi $\sqrt[3]{(\cot \alpha)} = \cot \mu$, con che sarà $\sqrt[3]{(\tang \alpha)} = \tang \mu$, si troverà $y = 2 \cot 2 \mu$. Trovato y, e quindi v dall'equazione $\tang \frac{1}{2} v = y$, avrassi $r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$. Ecco pertanto le formule che completamente risolvono il proposto problema

$$(a)\ \cot 2 \alpha = \tfrac{1}{2} Nt = 3\, k\, (2\, q)^{-3/2}\, t; \qquad (b)\ \cot \mu = \sqrt[3]{(\cot \alpha)};$$

$$(c)\ y = \tang \tfrac{1}{2} v = 2 \cot 2 \mu; \qquad (d)\ r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

Sebbene il metodo esposto sia spedito, pure non lascia di essere molesto, qualora molti luoghi e per diversi tempi debbansi calcolare. Molto si diminuisce la fatica con una tavola, quale, a cagion d'esempio, si è quella calcolata dal signor Burkardt, e che per ogni valore di Nt porge il corrispondente valore di v. Noi la riferiremo in fine dell'opera sotto il titolo: *Tavola I. Moto delle comete nella parabola*. Se toglierassi dal log. t (t essendo dato in giorni) il log. della dist. perielia q moltiplicato per $\frac{3}{2}$, si formerà l'argomento della tavola, da cui otterrassi l'anomalia vera v con facilissima interpolazione, come nell'esempio annesso alla tavola.

330. *Coroll.* Se sia data la posizione del piano della parabola rapporto all'ecclittica, sarà facile assegnare allo stesso tempo la posizione tanto eliocentrica, quanto geocentrica della cometa nell'ecclittica. Imperciocchè chiamata π la longitudine del perigeo, $v + \pi$ sarà la longitudine della cometa nell'orbita, dalla quale, seguendo i precetti dei §§ 241, 242, si otterranno le domandate posizioni rapporto all'ecclittica, ed anche rapporto all'equatore.

Problema V. Dati due raggi vettori $SM = r$, $SM' = r'$ con l'angolo $MSM' = g$, ovvero con la corda $= MM' = c$, domandasi la distanza perielia $PS = q$, e l'anomalia vera $PSM = v$.

331. 1.° L'equazione alla parabola $r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$ applicata ai due raggi vettori r, r' darà $\cos \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{q}} = \sqrt{\frac{1}{r}}$; $\cos \frac{1}{2} (v + g) \sqrt{\frac{1}{q}} = \sqrt{\frac{1}{r'}}$. Sviluppando la seconda, ed avendo riguardo alla prima, si otterranno tosto le due seguenti

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{q}} = \cot \tfrac{1}{2} g \sqrt{\frac{1}{r}} - \frac{1}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} g \sqrt{r'}} \quad . \quad (1)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{q}} = \sqrt{\frac{1}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

le quali sono sotto una forma comodissima per il calcolo numerico delle cercate quantità q, v. Dividendo le due trovate equazioni una per l'altra, e sommandone i quadrati si avranno le seguenti per esprimere analiticamente le incognite v, q per r, r', e l'angolo g;

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \frac{\cos \tfrac{1}{2} g - \sqrt{(r : r')}}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} g} = \frac{\cos \tfrac{1}{2} g \sqrt{(r r')} - r}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} g \sqrt{(r r')}} \quad . \quad . \quad (3)$$

$$q = \frac{r r' \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} g}{r + r' - 2 \cos \tfrac{1}{2} g \sqrt{(r r')}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2.° Se invece dell'angolo $MSM' = g$, sia data la corda $MM' = c$, si avranno le quantità v, q nel modo seguente. Il triangolo MSM' darà l'equazione $\cos g = \frac{r^2 + r'^2 - c^2}{2 r' r}$, dalla quale si formeranno tosto le seguenti

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} g = \frac{\sqrt{[(c + r' - r)(c - r' + r)]}}{2 \sqrt{(r r')}}; \quad \cos \tfrac{1}{2} g = \frac{\sqrt{[(r + r' + c)(r + r' - c)]}}{2 \sqrt{(r r')}}.$$

Questi valori introdotti nelle equazioni (3), (4) daranno

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \frac{\sqrt{[(r + r' + c)(r + r' - c)]} - 2 r}{\sqrt{[(c + r' - r)(c - r' + r)]}} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$q = \frac{(c + r' - r)(c - r' + r)}{4(r' + r) - 4\sqrt{[(r' + r + c)(r' + r - c)]}} = \frac{c^2 - (r' - r)^2}{4(r' + r) - 4\sqrt{[r' + r)^2 - c^2]}} \quad (6)$$

Problema VI. Nelle stesse ipotesi del problema precedente, determinare il tempo dalla cometa impiegato a descrivere l'arco MM'.

332. Riprendasi l'equazione (1) del § 329, la quale, posto $m = 3 k \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, diverrà $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v (\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v + 3) = m q^{-3/2} t$, t essendo il tempo impiegato per giungere dal perielio al punto M. L'equazione della parabola dà $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{r - q}{q}\right)}$. Introdotto questo valore nella precedente si otterrà $(r + 2 q) \sqrt{(r - q)} = m t$. Parimente indicando per t' il tempo impiegato a giungere dal perielio al punto M', si avrà $(r' + 2 q) \sqrt{(r' - q)} = m t'$; se da questa tolgasi la precedente, si avrà il tempo impiegato dalla cometa a percorrere l'arco MM' col mezzo dell'equazione

$$m (t' - t) = 2 q [\sqrt{(r' - q)} - \sqrt{(r - q)}] + r' \sqrt{(r' - q)} - r \sqrt{(r - q)} \quad (7)$$

Eliminiamo q col mezzo dell'equazione (4); perciò avremo

$$\sqrt{(r-q)}=\sqrt{\left(\frac{r^2-2\cos\frac{1}{2}gr\sqrt{(rr')}+rr'\cos^2\frac{1}{2}g}{r'+r-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}}\right)}=\frac{-r+\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}}{\sqrt{[r'+r-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]}}$$

$$\sqrt{(r'-q)}=\sqrt{\left(\frac{r'^2-2\cos\frac{1}{2}gr'\sqrt{(rr')}+rr'\cos^2\frac{1}{2}g}{r'+r-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}}\right)}=\frac{r'-\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}}{\sqrt{[r'+r-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]}}$$

ove abbiamo, estraendo la radice, preso i segni in modo che risultino $\sqrt{(r-q)}$, $\sqrt{(r'-q)}$ positivi, supponendosi la cometa dopo il passaggio pel perielio, e supponendosi $r'>r$.

Introdotti questi valori nell'equazione (7), si troverà tosto

$$m(t'-t)=\frac{r'^2+2rr'\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}g+r^2-\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}(r+r')}{\sqrt{[r+r'-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]}}$$

$$=\frac{[r+r'-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}][r+r'+\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]}{\sqrt{[r+r'-2\cos\frac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]}},$$

che equivale eziandio alla seguente

$$m(t'-t)=[r'+r+\cos\tfrac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]\sqrt{[r'+r-2\cos\tfrac{1}{2}g\sqrt{(rr')}]} \quad (8)$$

Questa equazione porge il tempo cercato con un calcolo numerico abbastanza spedito se conoscansi i raggi vettori r, r' e l'angolo g fra essi compreso; il chiarissimo signor Burkardt ne ha grandemente facilitato il calcolo mediante una estesa tavola inserita nell'appendice alla *Connoissance des temps* per il 1821, di cui può vedersi l'uso e la costruzione nella citata opera.

Si può eziandio da essa ricavare il tempo $t'-t$ espresso per la corda MM' in modo assai semplice. Sostituendovi in fatti il valore di $\cos\frac{1}{2}g$ dato nel § precedente, si ottiene

$$m(t'-t)=\sqrt{\{r'+r-\sqrt{[(r'+r)^2-c^2]}\}}\left(\frac{2(r'+r)+\sqrt{[(r'+r)^2-c^2]}}{2}\right).$$

Dal primo fattore si può estrarre la radice col metodo prescritto nell'algebra elementare, e si troverà questa

$$=\sqrt{\left(\frac{r'+r+c}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{r'+r-c}{2}\right)};$$

il secondo fattore si può ancora scrivere sotto la forma

$$\frac{(r'+r+c)+(r'+r-c)+\sqrt{[(r'+r+c)(r'+r-c)]}}{2};$$

se sotto questo aspetto si moltiplicano insieme, e quindi dividesi il prodotto per m, ossia per $3k\sqrt{\frac{1}{2}}$, si otterrà la seguente semplicissima equazione

$$t'-t=\frac{(r'+r+c)^{3/2}-(r'+r-c)^{3/2}}{6k} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

la quale fu per la prima volta data da Eulero nel vol. VII *Miscellan. Berolin.* (1743), ed indi dal sig. Lambert con nuovo metodo ricavata nell'aureo suo libretto intitolato: *Insigniores orbitae cometarum proprietates*. Augustae Vindelicorum 1761. Questa formula è resa celebre per l'uso che lo stesso Lambert ed il signor dott. Olbers ne hanno fatto per calcolare l'orbita di una nuova cometa, e noi pure ce ne serviremo nel seguente capitolo. Osserveremo che il termine $(r' + r - c)^{3:2}$ dovrà essere precedato dal segno —, finchè l'angolo compreso fra r', r rivolto verso il perielio sia $< 180°$. Ma se questo divenga $> 180°$, dovrà prendersi col segno +; infatti tal termine diminuisce da $c = 0$ fino a $c = r' + r$, dopo il qual limite corrispondente all'angolo nominato di 180°, dovendo il tempo continuamente crescere, il detto termine diverrà positivo, mentre c torna a diminuire.

Problema VII. Supponendo che un pianeta od una cometa muovasi in un' orbita ellittica molto allungata, ed alla parabola vicinissima, domandasi la sua anomalia vera ed il suo raggio vettore ad un tempo t contato dal passaggio per il perielio.

333. Alla risoluzione di questo problema potrebbero adoperarsi i metodi che abbiamo esposto nella teoria del Sole. Ma poichè per supposizione l'eccentricità molto avvicinasi ad essere $= 1$, il semiasse maggiore diviene grandissimo in confronto della distanza perielia, e però il moto medio molto picciolo in confronto del moto vero nel perielio. L'equazione (2) del § 84 non darà con troppa esattezza il valore di E, nè l'equazione (3) potrà con ogni sicurezza adoperarsi alla ricerca di v. In questo caso è migliore consiglio riferire la cercata anomalia a quella di una parabola della stessa distanza perielia, come ora ci facciamo ad esporre.

Riprendasi la prima equazione (12) del § 323, che trascurando la massa della cometa in confronto dell'unità, a motivo di $ds = \frac{1}{2} r^2 dv$, darà $r^2 dv = k\sqrt{p}\, dt$. Sostituendo per r il suo valore, ed osservando che la distanza perielia q in un'ellisse, di cui l'eccentricità sia e, è $= \frac{p}{1+e}$, troverassi $k q^{-3:2} dt = \frac{(1+e)^{3:2} dv}{(1+e\cos v)^2}$. Ponendo $1 - e = \alpha$, cosicchè sia α quantità picciolissima, avremo $e = 1 - \alpha$. Introducendo questo valore di e nella precedente equazione, e trascurando le seconde potestà di α, otterremo

$k q^{-3:2} dt = \frac{(2-\alpha)^{3:2} dv}{(1+\cos v)^2} + \frac{2^{3:2}\alpha \cos v\, dv}{(1+\cos v)^3}$, la qual formula, ponendo per brevità $\tang \frac{1}{2} v = \theta$, facilmente cangiasi nella seguente

$$k q^{-3:2} dt = \sqrt{2}\, d\theta \left[1 + \theta^2 + \tfrac{1}{4}\alpha(1+\theta^2) - \alpha\theta^2 - \alpha\theta^4\right].$$

Integrando per modo che $t = 0$ dia $\theta = \tang \frac{1}{2} v = 0$, si ottiene

$$k\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, q^{-3:2} t = \tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2} v + \alpha \tang \tfrac{1}{2} v\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\tang^2 \tfrac{1}{2} v - \tfrac{1}{5}\tang^4 \tfrac{1}{2} v\right).$$

Sia ora U l'anomalia vera in una parabola della stessa distanza perielia q corrispondente al medesimo tempo t dopo il passaggio per il periclio. Sarà (§ 329) U data dall'equazione

$$k\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, q^{-3/2}\, t = \tang \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} U.$$

Confrontando queste due equazioni vedesi che v, U differiscono fra loro di quantità dell'ordine α. Facendo pertanto nella prima $v = U + x$, e trascurando i termini dell'ordine α^2, x^2, αx, otterremo

$$k\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, q^{-3/2}\, t = \tang \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} U + \frac{x}{2 \cos^4 \tfrac{1}{2} U}$$
$$+ \tfrac{1}{4} \alpha \tang \tfrac{1}{2} U (1 - \tang^2 \tfrac{1}{2} U - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} U).$$

Se ora abbiamo riguardo alla superiore equazione relativa alla parabola, e cangiamo il picciolo arco x col suo seno, riponendo per α il suo valore, e facendo le opportune riduzioni, otterremo

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{16}(1 - e) \tang \tfrac{1}{2} U (4 - 3 \cos^2 \tfrac{1}{2} U - 6 \cos^4 \tfrac{1}{2} U) \quad . \; . \; . \; (10)$$

la quale darà l'incremento da farsi all'anomalia vera calcolata nella parabola per avere quella che gli corrisponde nell'ellisse.

334. *Scolio*. Questa formula è quella stessa che La-Place ha dato nella sua *Meccanica celeste* Tom. I. pag. 186, e che Olbers ha ridotto in una tavola comodissima, calcolando per ogni valore di U di grado in grado il logaritmo del coefficiente di $(1 - e)$. Essa non differisce che nella forma da quella proposta già da Simpson. Non convien perdere di vista che si appoggia alla supposizione di α picciolissimo, e però di e molto prossimo all'unità. Se ciò non fosse, il valore di x non sarebbe esatto. Per rimediare a questo inconveniente il valentissimo astronomo e matematico sig. Bessel nel Vol. XII del *Monatliche Correspondenz* di Zach ha spinto l'approssimazione fino alla terza potenza di α, ed ha ridotto in due tavole i coefficienti di α, α^2, le quali riescono molto pregevoli se α sia di mediocre grandezza. Se indichiamo per x la correzione dipendente da α e da α^2, avrà questa la forma $x = A\alpha + B\alpha^2$; le tavole di Bessel, che riferiremo in fine in seguito alla Tavola I. del moto parabolico sotto il titolo: *Tavola II. Riduzione della parabola all'ellisse ed all'iperbola*, danno per ogni grado di anomalia vera calcolata nella parabola i logaritmi di A e di B ridotti in secondi, ai quali aggiungendo rispettivamente $\log \alpha$, $2 \log \alpha$ si avranno i logaritmi delle due parti di x. È inutile avvertire, che nel prendere dalla tavola $\log A$ conviene avere riguardo alle differenze seconde, le quali variano fortemente, coi metodi ordinarj d'interpolazione. Se poi le terze potenze di α non fossero trascurabili, converrà avere ricorso pel calcolo dell'anomalia vera nell'ellisse al metodo di false posizioni sopra citato, o più comodamente ad un metodo elegantissimo dovuto al dott. Gauss (*Theoria*

motus corporum caelestium pag. 35), il di cui sviluppo ci guiderebbe troppo a lungo.

Problema VIII. Data una picciola variazione agli elementi del moto parabolico di una cometa, determinare la variazione corrispondente della sua longitudine e latitudine sì eliocentrica che geocentrica.

335. Gli elementi del moto parabolico sono 1.° il tempo del passaggio della cometa per il perielio, che indicheremo per τ; 2.° la longitudine del perielio nell'orbita, che porremo $= \pi$; 3.° la distanza perielia q; 4.° l'inclinazione del piano, in cui giace la parabola ad un piano fisso, per esempio all'eclittica, che rappresenteremo per i; 5.° la longitudine del nodo ascendente $= \omega$. Oltre queste denominazioni supponiamo che al tempo t riferito alla stessa origine, a cui si è riferito il passaggio per il perielio, la longitudine eliocentrica della cometa ridotta all'eclittica sia $= l$, e la corrispondente latitudine $= \lambda$, ambedue calcolate dietro i precedenti elementi, e del pari l', λ' sieno la longitudine e latitudine geocentrica corrispondenti ad l, λ. Supponendo che ognuno dei precedenti elementi aumenti di una picciola quantità rappresentata dal suo rispettivo differenziale, domandansi i valori di dl, $d\lambda$, dl', $d\lambda'$.

Ritenendo per v, r l'anomalia vera ed il raggio vettore, ed osservando che il tempo decorso dopo il passaggio per il perielio è $= t - \tau$, avremo per determinare v, r le due equazioni

$$3 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} v = 3 k \sqrt{\tfrac{1}{2}} q^{-3/2} (t - \tau); \quad r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v} = \frac{2q}{1 + \cos v}.$$

Differenziando la prima di queste due equazioni, si otterrà

$$dv = -3 k \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cos^4 \tfrac{1}{2} v \, q^{-5/2} (t - \tau) \, dq - 2 k \sqrt{\tfrac{1}{2}} q^{-3/2} \cos^4 \tfrac{1}{2} v \, d\tau,$$

che ponendo in luogo di $\cos^4 \frac{1}{2} v$ il suo valore $\frac{q^2}{r^2}$, sarà

$$dv = -\frac{3k}{r^2 \sqrt{(2q)}} (t - \tau) \, dq - \frac{k \sqrt{(2q)}}{r^2} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Differenziando logaritmicamente la seconda equazione, e ponendo in luogo di $1 + \cos v$ il suo valore $\frac{2q}{r}$, avremo $\frac{dr}{r} = \frac{dq}{q} + \frac{r \operatorname{sen} v \, dv}{2q}$; moltiplicando per r, e sostituendo il valore di dv,

$$dr = \left(\frac{r}{q} - \frac{3 k q^{-5/2}}{2 \sqrt{2}} (t - \tau) \operatorname{sen} v \right) dq - \frac{k \operatorname{sen} v}{\sqrt{(2q)}} d\tau.$$

Se ora nel coefficiente di dq in luogo di $\frac{r}{q}$, $3 k \sqrt{\frac{1}{2}} q^{-5/2} (t - \tau)$ si scrivono i loro valori presi dalle prime due equazioni, e se in luogo di $\operatorname{sen} v$ si pone $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v$ esso si cangia in

$1 - 2\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,v = \cos v$. Quindi

$$d\,r = \cos v\,d\,q - \frac{k\,\text{sen}\,v}{\sqrt{(2\,q)}}\,d\,\tau \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

In luogo di $d\,v$ scrivendo il valore superiore nelle espressioni generali di $d\,l$, $d\lambda$ date dal § 244, otterremo le seguenti

$$(13)\quad d\,l = \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\right) d\,\omega - \text{tang}\,\lambda \cos(l-\omega)\,d\,i + \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\,d\,\pi$$
$$- \frac{3\,k\cos i}{r^2\sqrt{(2\,q)}\cos^2\lambda}\,(t-\tau)\,d\,q - \frac{k\sqrt{(2\,q)}\cos i}{r^2\cos^2\lambda}\,d\,\tau\,;$$

$$(14)\quad d\lambda = -\,\text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\,\omega + \text{sen}(l-\omega)\,d\,i + \text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\,\pi$$
$$- \frac{3\,k\,(t-\tau)}{r^2\sqrt{(2\,q)}}\,\text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\,q - \frac{k\sqrt{(2\,q)}}{r^2}\,\text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\,\tau\,.$$

Per ultimo se nelle equazioni (6), (8) del § 246 si sostituiscono i valori precedenti di $d\,l$, $d\lambda$, $d\,r$, si otterranno i valori di $d\,l'$, $d\lambda'$ espressi per le variazioni degli elementi dell'orbita.

336. *Scolio*. Per il calcolo numerico delle equazioni (13), (14), e dei valori di $d\,l'$, $d\lambda'$ conviene osservare che se $d\,l$, $d\omega$, $d\,i$, $d\,\pi$ si esprimono in secondi di grado, mentre $d\,q$, $d\,\tau$ rappresentano dei numeri astratti o rapporti alle loro unità principali, i termini moltiplicati per $d\,q$, $d\,\tau$ dovranno essere moltiplicati ancora per R'', ossia per il numero dei secondi contenuti nel raggio ad oggetto di renderli agli altri omogenei. I logaritmi costanti che in questa ipotesi si dovranno adoperare saranno

$$\log R'' = 5,3144251\,, \qquad \log 3\,R''\,k\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 3,8766128\,,$$
$$\log R''\,k\sqrt{2} = 3,7005216\,, \qquad \log R''\,k\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 3,3994916\,.$$

Problema IX. Supposto che una cometa muovasi in un'iperbola di noti parametri, determinare la sua anomalia vera ad un qualunque tempo t contato dal suo passaggio pel perielio.

337. Riprendasi l'equazione polare dell'iperbola riferita al foco in cui risiede il centro del Sole, supponendo a il semiasse trasverso, e l'eccentricità, p il semiparametro, v l'anomalia vera, r il raggio vettore, q la distanza perielia, si ha dalle sezioni coniche

$$r = \frac{a\,(e^2-1)}{1+e\cos v} = \frac{p}{1+e\cos v}\,; \quad q = a\,(e-1)\,.$$

Sostituiscasi questo valore di r nella equazione $r^2\,d\,v = k\sqrt{p}\,.\,d\,t$ (§ 323), ed essa diverrà

$$k\,d\,t = \frac{p^{3/2}\,d\,v}{(1+e\cos v)^2} = \frac{p^{3/2}\,d\,v}{[(e+1)\cos^2\tfrac{1}{2}\,v - (e-1)\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,v]^2}\,,$$

ovvero $k\,d\,t = \dfrac{p^{3/2}\,d\,v}{(e+1)^2 \cos^4 \frac{1}{2} v \left(1 - \frac{e-1}{e+1} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v\right)^2}$.

Pongasi, ad imitazione di quanto si praticò nella teoria del Sole (§ 84),

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} F = \sqrt{\left(\frac{e-1}{e+1}\right)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Riponendo per p il suo valore, dietro le convenienti riduzioni, si troverà $\dfrac{k\,d\,t}{a^{3/2}} = \dfrac{e\,d\,F}{\cos^2 F} - \dfrac{d\,F}{\cos F}$. Integrando ed osservando che posto $t = 0$, si ha $v = 0$, $F = 0$, si otterrà

$$k\,a^{-3/2}\,t = e \operatorname{tang} F - \log \text{iper. tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} F) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dato pertanto t, questa equazione darà mediante le false posizioni l'angolo ausiliario F, da cui tosto col mezzo dell'equazione (1) si avrà l'anomalia vera v; in seguito l'equazione all'iperbola darà il raggio vettore. Ottenuti v ed r si procederà al calcolo delle longitudini e delle latitudini sì eliocentriche che geocentriche coi precetti esposti tanto per le orbite ellittiche che paraboliche.

Fra le quantità v, r, F, t esistono molte importanti relazioni simili a quelle che ritrovammo fra l'anomalia vera, eccentrica, media, ed il raggio vettore nella teoria del Sole, che dietro la scorta di quelle si ponno agevolmente dedurre da chiunque sia un poco versato nel calcolo trigonometrico. Noi ci contenteremo di riferire qui quelle, dietro le quali comodamente si può in pratica ottenere v ed r, disponendole in modo da adoprare le ordinarie tavole logaritmiche, e da ottenere gli archi in secondi di grado

$$(1) \quad z = R''\,k\,a^{-3/2}\,t = R''\,k \left(\frac{q}{1-e}\right)^{3/2} t\,;$$

$$(2) \quad z = R''\,e \operatorname{tang} F - R''\,M \log \operatorname{tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} F)\,;$$

$$(3) \quad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} F \sqrt{\left(\frac{(e+1)\,a}{\cos F}\right)}\,;$$

$$(4) \quad \cos \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} = \cos \tfrac{1}{2} F \sqrt{\left(\frac{(e-1)\,a}{\cos F}\right)}\,;$$

nelle quali M è il costante, per cui i logaritmi tavolari convertonsi in iperbolici; gli altri avendo le denominazioni fin qui adottate. Sarà pertanto $\log R''\,M = 5{,}6766408$.

338. *Scolio*. Le formule della precedente proposizione danno con molta facilità e speditezza la posizione della cometa ad un tempo qualunque in un'iperbola, se sia e notabilmente maggiore dell'unità. Ma se, come frequentemente accade nella teoria delle comete, e poco dif-

ferisca da 1, il calcolo richiede tavole troppo estese, e diviene soverchiamente prolisso. In questi casi più speditamente si ottiene l'anomalia vera nell'iperbola, riferendola ad una parabola della stessa distanza perielia, come abbiamo fatto per l'ellisse; che anzi è palese potersi ottenere tal correzione dalla stessa formula e dalle stesse tavole ponendovi α negativo. In tal guisa, ritenendo $\alpha = e - 1$, sarà $x = -A\alpha + B\alpha^2$ prendendo dalla Tavola II posta in fine del volume i log. di A e B.

CAPITOLO IV.

Ricerche intorno al modo di determinare l'orbita di un nuovo pianeta, o di una cometa, con osservazioni geocentriche.

339. Il problema di determinare l'orbita di un nuovo pianeta o di una cometa con tre osservazioni fatte dalla superficie terrestre ha occupato dopo Newton quasi tutti gli Astronomi e Matematici, e molti ne hanno dato delle soluzioni più o meno semplici, le quali generalmente si appoggiano sopra il principio che gl'intervalli di tempo fra le osservazioni sieno molto piccioli. Celebri sono ed a tutti conosciute le soluzioni datene dai sommi geometri La-Grange e La-Place; ma i metodi recentemente immaginati e pubblicati dal celebre Gauss nella sua opera più volte citata *Theoria motus corporum caelestium etc.* sembrano ad essi di gran lunga superiori, e le felicissime applicazioni che ne ha fatto alle orbite dei nuovi pianeti mostrano ad evidenza quanto in pratica sieno da pregiarsi. I limiti di quest'opera non permettono di poterli riferire con quella unità e con quella estensione con cui l'immortale autore gli ha esposti; molto meno di poterli ad altri metodi analitici confrontare. Il chiarissimo signor Fabrizio Mossoti ha con molto ingegno eseguito questo confronto, e con felicissima analisi nelle Effemeridi di Milano pegli anni 1818-1819 ha presentato agli Astronomi in bell'ordine i primarj rapporti fra le posizioni eliocentriche e geocentriche di un corpo celeste, e ne ha dedotto i punti principali delle soluzioni di La-Grange e di Gauss, aggiungendovi eziandio un nuovo metodo, il quale se ha l'inconveniente analitico di richiedere un'osservazione di più del bisogno, gode in compenso del grandissimo vantaggio di ricondurre la soluzione del problema ad equazioni di primo grado. Noi rimandando alle citate opere per gli sviluppi, gli esempj e le avvertenze che nei diversi casi particolari devonsi avere nell'applicazione delle formule, ci limiteremo a riferire il più brevemente che ci sarà possibile gli articoli più essenziali

della soluzione di Gauss, affinchè non del tutto ignari sieno i nostri lettori di un problema di tanta importanza, ed in questo procederemo secondo il metodo da noi finora praticato per proposizioni e problemi onde riesca più facile la divisione delle materie nella proposta ricerca.

Propos. I. Lemma. Se la formula differenziale $\varphi(x)\,dx$ *dovrà integrarsi fra i dati limiti* $x = a$, $x = a + m$, *si otterranno i seguenti integrali approssimati*

(1) $\frac{1}{2} m [\varphi(a) + \varphi(a+m)]$,

(2) $\frac{1}{6} m [\varphi(a) + 4\,\varphi(a + \frac{1}{2} m) + \varphi(a+m)]$,

(3) $\frac{1}{8} m [\varphi(a) + 3\,\varphi(a + \frac{1}{3} m) + 3\,\varphi(a + \frac{2}{3} m) + \varphi(a+m)]$ ec.,

i quali saranno tali che il secondo rappresenterà il richiesto integrale con maggiore esattezza del primo; il terzo meglio del secondo, e così di seguito.

340. In fatti chiamando y il proposto integrale, avremo ancora $y = \int \varphi(a+x)\,dx$, il quale sotto questa forma dovrà estendersi da $x = 0$ fino ad $x = m$, e sviluppando secondo i precetti del teorema di Taylor, estese a dovere le integrazioni, si ottiene

$$y = m\,\varphi(a) + \frac{m^2}{1.\,2}\,\frac{d\,\varphi(a)}{d\,a} + \frac{m^3}{1.\,2.\,3}\,\frac{d^2\,\varphi(a)}{d\,a^2} + \text{ec.} \;\ldots\; (1)$$

Fingiamo che ponendo . . $a + x$, $= a$, $a + b$, $a + c$, . . . $a + m$
$\varphi(a + x)$ divenga rispettivamente . . $= A$, B, C, . . . M
cosicchè sia $A = \varphi(a)$; $B = A + b\,\frac{d\,A}{d\,a} + \frac{b^2}{1.\,2}\,\frac{d^2\,A}{d\,a^2} + \ldots$

$C = A + c\,\frac{d\,A}{d\,a} + \frac{c^2}{1.\,2}\,\frac{d^2\,A}{d\,a^2} + \ldots$ e così degli altri.

Sia ora $y = z\,A + z_1\,B + z_2\,C + z_3\,D + \text{ec.} \;\ldots\; (2)$

Sostituendo in questa equazione i valori di B, C . . . M espressi per $A = \varphi(a)$, e confrontando i coefficienti dei simili termini $\varphi(a)$, $\frac{d\,\varphi(a)}{d\,a}$, $\frac{d^2\,\varphi(a)}{d\,a^2}$ ec. otterremo per determinare z, z_1, z_2, z_3 le seguenti equazioni

$$z + z_1 + z_2 + z \;\ldots = m; \quad b\,z_1 + c\,z_2 + d\,z_3 + \ldots = \tfrac{1}{2} m^2;$$
$$b^2\,z_1 + c^2\,z_2 + d^2\,z_3 + \ldots = \tfrac{1}{3} m^3; \quad \text{ec.}$$

il numero delle quali uguaglia sempre il numero delle incognite. Così se fra i dati limiti a, $a + m$ si saranno calcolati tre soli valori di $\varphi(x)$ ad uguali intervalli, quelli cioè che corrispondono ad $x = a$, $x = a + b = a + \frac{1}{2} m$, $x = a + c = a + m$, dovremo determinare z, z_1, z_2 dalle tre seguenti equazioni $z + z_1 + z_2 = m$; $z_1 + 2\,z_2 = m$; $z_1 + 4\,z_2 = \frac{4}{3} m$, le quali risultano dalle superiori ponendo $b = \frac{1}{2} m$, $c = m$. Otterremo da esse $z = z_2 = \frac{1}{6} m$, $z_1 = \frac{4}{6} m$, e questi valori

daranno $y = \frac{m}{6}(A + 4B + C)$, che coincide col secondo dei superiori integrali.

La precedente semplicissima dimostrazione di queste formule conosciute sotto il nome di formule di Cotes è dovuta al signor prof. Littrow, ed è inserita insieme con un'altra non meno semplice nel terzo volume della *Correspondence astronomique etc.* del sig. Zach, Genova 1819.

Propos. II. Problema. Supponendo che un pianeta percorra un' ellisse di posizione e di parametri incognita, si domanda il semiparametro p della medesima, se sieno dati due raggi vettori r', r'' coll'angolo $2f$ da essi compreso, e col tempo t impiegato a descrivere l'angolo $2f$.

341. S'indichi per r un qualunque raggio vettore corrispondente all'anomalia vera v, e ritenendo per k un coefficiente costante in tutto il sistema solare, di cui abbiamo sopra (§ 323) assegnato il valore, quando t sia espresso in giorni, avremo, per determinare p, l'equazione $kt\sqrt{p} = \int r^2 dv$, nella quale l'integrazione dovrà estendersi fra i limiti $v = v'$, $v = v''$ (v', v'' essendo le anomalie vere incognite corrispondenti ad r', r'' tali che sia $v'' - v' = 2f$). La prima approssimazione del § 340 porge $\int r^2 dv = f(r'^2 + r''^2)$, donde prossimamente otterrassi $\sqrt{p} = \frac{f(r'^2 + r''^2)}{kt} = \frac{2fr'r''}{kt\cos 2\omega}$, ponendo $\frac{r''}{r'} = \text{tang}(45 + \omega)$, dalla quale supposizione tracsi $\frac{r''}{r'} + \frac{r'}{r''} = \frac{r''^2 + r'^2}{r'r''} = \text{tang}(45 + \omega) + \cot(45 + \omega) = \frac{2}{\cos 2\omega}$. Noi porremo questo primo valore di $\sqrt{p} = 3\alpha$.

Per ottenerne uno al vero più vicino, appellisi R il raggio vettore corrispondente all'anomalia vera $v' + f$, media aritmetica fra v', v''. Sarà per la seconda delle formule di Cotes con maggiore esattezza $\int r^2 dv = \frac{1}{3}f(r'^2 + r''^2 + 4R^2)$. Ora se nel § 235 facciamo $n = v'$, $n' = v' + f$, $n'' = v' + 2f$, e cangiamo r in r', r' in R, il valore di p ivi assegnato tosto riducesi al seguente

$$p = \frac{2r'r''R\,\text{sen}\,f(1 - \cos f)}{(Rr'' + r'R)\,\text{sen}\,f - 2r'r''\,\text{sen}\,f\cos f} = \frac{4r'r''R\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}f}{Rr'' + r'R - 2r'r''\cos f},$$

dalla quale dividendo il numeratore e denominatore per $r'r''R$, deducesi $\frac{\cos f}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) - \frac{2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}f}{p} = \frac{r'' + r'}{2r'r''} - \frac{2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}f}{p}$.

Se ora all'equazione $\frac{r'^2 + r''^2}{r'r''} = \frac{2}{\cos 2\omega}$ aggiungasi 2 da una parte

e dall'altra, e quindi si estragga la radice quadrata, con facile riduzione otterrassi $\frac{r' + r''}{2 r' r''} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{(r' r'' \cos 2 \omega)}}$; sostituendo questo valore nella precedente, e ponendo per brevità $\delta = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} f \sqrt{(r' r'' \cos 2 \omega)}}{\cos \omega}$, essa potrà porsi sotto la forma $R = \frac{\cos f \sqrt{(r' r'' \cos 2 \omega)}}{\cos \omega (1 - \delta : p)}$. Quindi più esattamente otterrassi p dalla seguente equazione

$$\sqrt{p} = \frac{f(r'^2 + r''^2)}{3 k t} + \frac{4 f r' r'' \cos 2 \omega \cos^2 f}{3 k t \cos^2 \omega (1 - \delta : p)^2} = \alpha + \frac{2 \alpha \cos^2 2 \omega \cos^2 f}{\cos^2 \omega (1 - \delta : p)^2},$$

ossia $\sqrt{p} = \alpha + \frac{\varepsilon}{(1 - \delta : p)^2}$, facendo $\varepsilon = \frac{2 \alpha \cos^2 2 \omega \cos^2 f}{\cos^2 \omega}$.

Questa equazione, ponendo per maggiore semplicità $\sqrt{p} = \pi$, si cangia in $(\pi - \alpha)(1 - \delta : \pi^2)^2 = \varepsilon$, la quale ordinata sarebbe di quinto grado, e comodissimamente risolvesi col metodo di Newton; in fatti pongasi $\pi = q + \mu$, essendo q un valore al vero sì vicino che le potenze di μ superiori alla prima possano trascurarsi. Fatte le debite riduzioni otterrassi $\mu = \frac{\varepsilon q^5 - (q^2 - \alpha q)(q^2 - \delta)^2}{(q^2 - \delta)(q^3 + 3 \delta q - 4 \alpha \delta)}$, e però

$$\pi = \frac{\varepsilon q^5 + (q^2 - \delta)(\alpha q^2 + 4 \delta q - 5 \alpha \delta) q}{(q^2 - \delta)(q^3 + 3 \delta q - 4 \alpha \delta)} = \frac{243 \alpha^4 \varepsilon + 3 \alpha (9 \alpha^2 - \delta)(9 \alpha^2 + 7 \delta)}{(9 \alpha^2 - \delta)(27 \alpha^2 + 5 \delta)}$$

ponendo cioè $q = 3 \alpha$, valore prossimo di π ritrovato colla prima operazione.

Se ora per brevità si pone $\beta = \frac{\delta}{27 \alpha^2}$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{(1 - 3 \beta) \alpha}$, avremo $\pi = \frac{\alpha (1 + \gamma + 21 \beta)}{1 + 5 \beta}$, e tutte le operazioni necessarie per la risoluzione del proposto problema riduconsi al calcolo delle cinque seguenti equazioni

(1) $\operatorname{tang} (45 + \omega) = \frac{r''}{r'}$; (2) $\alpha = \frac{2 f r' r''}{3 k t \cos 2 \omega}$;

(3) $\beta = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} f \sqrt{(r' r'' \cos 2 \omega)}}{27 \alpha^2 \cos \omega}$; (4) $\gamma = \frac{2 \cos^2 2 \omega \cos^2 f}{(1 - 3 \beta) \cos^2 \omega}$;

(5) $\sqrt{p} = \frac{\alpha (1 + \gamma + 21 \beta)}{1 + 5 \beta}$.

342. *Scolio*. La soluzione precedente nulla lascia a desiderare in quanto alla semplicità, e porge il parametro tanto più esattamente, quanto più l'angolo $2f$ è picciolo. Gli esempj numerici dal signor

Gauss riferiti all' articolo 87 da noi tralasciati per amore della brevità, dimostrano che può con ogni sicurezza adoperarsi, qualora non oltrepassi 7° in 8°, ed anche porge una sufficiente approssimazione, se giunge ai 62° o 63°. Ciò non ostante quando $2f$ abbia un valore considerabile rendesi necessario ricorrere ad altro metodo per determinare p, e vista l' importanza di questa ricerca, noi qui succintamente riferiremo eziandio la seconda soluzione che l' autore rende con apposite tavole molto pronta ed esatta, e perciò a comodo dei nostri lettori le inseriremo in fine di questo volume.

343. Ritenute pertanto le superiori denominazioni, si appellino E', E'' le due anomalie eccentriche corrispondenti alle anomalie vere v', v'', e sia $E''-E'=2g$, $E''+E'=2G$, $v''-v'=2f$, $v''+v'=2F$; l' eccentricità incognita dell' ellisse $=e=\text{sen}\,\varphi$, il semiasse maggiore $=a$, il semiasse minore $=b$, il semiparametro $=p$. Le note proprietà dell' ellisse daranno $b=a\sqrt{(1-e^2)}=a\cos\varphi$, $p=a(1-e^2)=a\cos^2\varphi=b\cos\varphi$.

Quindi le equazioni (a), (b) del § 86 diventeranno nel nostro caso

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}v'\sqrt{r'}=\sqrt{[a(1+e)]}\,\text{sen}\tfrac{1}{2}E'\,;\quad \text{sen}\tfrac{1}{2}v''\sqrt{r''}=\sqrt{[a(1+e)]}\,\text{sen}\tfrac{1}{2}E''\,;$$
$$\cos\tfrac{1}{2}v'\sqrt{r'}=\sqrt{[a(1-e)]}\cos\tfrac{1}{2}E'\,;\quad \cos\tfrac{1}{2}v''\sqrt{r''}=\sqrt{[a(1-e)]}\cos\tfrac{1}{2}E''\,;$$

dalle quali facilmente deduconsi le seguenti

(1) $b\,\text{sen}\,g=\text{sen}\,f\sqrt{(r'r'')}$; (2) $b\,\text{sen}\,G=\text{sen}\,F\sqrt{(r'r'')}$;
(3) $p\cos g=(\cos f+e\cos F)\sqrt{(r'r'')}$; (4) $p\cos G=(\cos F+e\cos f)\sqrt{(r'r'')}$;
(5) $\cos f\sqrt{(r'r'')}=a(\cos g-e\cos G)$; (6) $\cos F\sqrt{(r'r'')}=a(\cos G-e\cos g)$;

Frattanto l' equazione (4) dello stesso § 86 dà

(7) $r''-r'=2ae\,\text{sen}\,g\,\text{sen}\,G$, ed

$$r''+r'=2a-2ae\cos g\cos G=2a\,\text{sen}^2 g+2\cos f\cos g\sqrt{(r'r'')},$$

dalla quale otterrassi . . . (8) $a=\dfrac{r'+r''-2\cos g\cos f\sqrt{(r'r'')}}{2\,\text{sen}^2 g}$;

e ponendo per brevità . . (9) $\left(\sqrt{\dfrac{r''}{r'}}+\sqrt{\dfrac{r'}{r''}}\right):2\cos f=1+2l$,

diverrà . . . . . (10) $a=\dfrac{2(l+\text{sen}^2\frac{1}{2}g)\cos f\sqrt{(r'r'')}}{\text{sen}^2 g}$;

e però $\sqrt{a}=\pm\dfrac{\sqrt{[2(l+\text{sen}^2\frac{1}{2}g)\cos f\sqrt{(r'r'')}]}}{\text{sen}\,g}$, valendo il segno $+$ se sia $\text{sen}\,g$ positivo, $-$ se $\text{sen}\,g$ negativo.

Il valore di l dall' equazione (9) comodamente si calcola colle tavole trigonometriche se introducesi l' angolo ω dato per l' equazione $\text{tang}(45+\omega)=\sqrt{(r'':r')}$, col quale essa porge $l=\dfrac{\text{sen}^2\frac{1}{2}f}{\cos f}+\dfrac{\text{tang}^2\omega}{\cos f}$.

Siccome in virtù delle equazioni (12) § 323 il moto diurno medio

del pianeta è $= k a^{-3/2}$, così la differenza delle due anomalie medie corispondenti ad $r' r''$ per l'intervallo di giorni t, sarà $k t a^{-3/2}$, e però per la prima equazione § 86, e per la (5) super. avremo

$$k t a^{-3/2} = 2 g - 2 e \operatorname{sen} g \cos G = 2 g - \operatorname{sen} 2 g + 2 \cos f \operatorname{sen} g \frac{\sqrt{(r' r'')}}{a}.$$

Sostituendo ora in questa equazione il valore di a, e ponendo

$$(11) \quad m = \frac{k t}{2^{3/2} \cos f^{3/2} (r' r'')^{3/4}},$$

fatte le opportune riduzioni otterrassi

$$(12) \quad \pm m = (l + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} g)^{1/2} + (l + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} g)^{3/2} \left(\frac{2 g - \operatorname{sen} 2 g}{\operatorname{sen} g^3}\right)$$

valendo il segno $+$ se sen g è positivo, $-$ se è negativo.

Frattanto questa equazione non contenendo che la sola incognita g, si potrà sempre da essa agevolmente dedurre il suo valore servendosi o delle false posizioni, o del metodo che sarà tosto esposto.

Ottenuto g, la (1) darà il valore di b, la (10) quello di a, donde poi avrassi $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$; quindi agevolmente dalle superiori equazioni otterransi gli elementi tutti del moto ellittico, come più diffusamente mostrerassi nel problema seguente.

344. La sopra riferita equazione (12) comodamente si tratta nel caso che g abbia un valore notabilmente grande. Ma se, come per lo più accade in una prima investigazione dell'orbita di un pianeta, sia g una picciola quantità, non può con ogni sicurezza calcolarsi il termine $\frac{2 g - \operatorname{sen} 2 g}{\operatorname{sen}^3 g}$, ed allora comodissimo riesce l'uso delle Tavole II e III riferite in fine dell'opera, di cui ecco in breve il fondamento.

Pongasi $X = \frac{2 g - \operatorname{sen} 2 g}{\operatorname{sen}^3 g}$; togliendo le frazioni, differenziando e ponendo poi $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} g = x$, si troverà la seguente equazione
$(2 x - 2 x^2) d X = 4 d x - (3 - 6 x) X d x$.

Se ora pongasi $X = \frac{4}{3}(1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + \ldots)$, e sostituiscasi nella precedente equazione; il confronto delle simili potenze di x ci porgerà le equazioni necessarie per determinare i coefficienti A, B, C ec.; otterremo in tal guisa X espresso per la seguente serie $X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5} x + \frac{4.6.8}{3.5.7} x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9} x^3 + \text{ec.}$, la quale coi metodi che insegnansi nell'introduzione, convertesi nella seguente frazione continua

$$X = \cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \cfrac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \cfrac{\frac{17.10}{11.13}x}{1 - \text{ec.}}}}}}} = \cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}$$

Uguagliando i denominatori, e facendo le riduzioni, otterrassi

$$\xi = \cfrac{\frac{2}{35}x^2}{1 + \frac{2}{35}x - \cfrac{\frac{40}{63}x}{1 - \cfrac{\frac{4}{99}x}{1 - \cfrac{\frac{70}{143}x}{1 - \cfrac{\frac{18}{195}x}{1 - \text{ec.}}}}}}$$

Apparisce da queste espressioni che riguardandosi x di primo ordine, sarà X quantità finita, e ξ di secondo ordine.

La Tavola IV sui precedenti principj calcolata dal signor Gauss porge i valori di ξ di millesimo in millesimo fino ad $x = 0,3$, a cui corrisponde un angolo $g = 66^\circ\ 25'$, inutile essendo il continuarla ulteriormente.

Introducendo la quantità ξ nell'equazione (12), ed osservando che a motivo di sen g positivo, prendesi il segno $+$, essa diverrà, rammentando essere $\text{sen}^2 \frac{1}{2} g = x$, (12)′ $m = (l + x)^{1/2} + \frac{(l + x)^{3/2}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{10}(x - \xi)}$.

Se ora si fa $(l + x)^{1/2} = \frac{m}{y}$, e si pone . . . (14) $\frac{m^2}{\frac{3}{4} + l + \xi} = h$, la superiore equazione (12)′ con le opportune riduzioni diviene

(15) $h = \frac{(y - 1)y^2}{y + \frac{1}{9}}$, equazione di terzo grado, da cui deve dedursi il valore di y. Ottenuto y, avremo . . . (16) $x = \frac{m^2}{y^2} - l$.

Frattanto apparisce come dietro le precedenti operazioni possa ottenersi x; imperciocchè avendo in numeri calcolato m dall'equazione (11), l'equazione (14) darà un valore di h molto prossimo trascurando ξ che è di secondo ordine. In seguito le equazioni (15), (16) daranno y ed x. Ottenuto un valore di x prossimo al vero, otterrassi ξ dalla Tavola IV, con cui avrassi un nuovo valore di h molto più esatto di prima, e quindi dalle due equazioni (15), (16) otterransi valori più esatti di y e di x, coi quali potrassi ripetere un nuovo calcolo se giudicherassi opportuno; così con due od al più tre operazioni giungerassi sempre a determinare x con ogni precisione. Siccome poi la risoluzione dell'equazione di terzo grado in y riuscirebbe molesta, il signor Gauss ne presenta la radice utile in una tavola apposita, che è la Tavola III in fine del volume, da cui coll'argomento h ottiensi y.

Qualora siansi calcolate col metodo ora esposto le quantità x, y avremo g dall'equazione $\operatorname{sen} \frac{1}{2} g = \sqrt{x}$. In seguito l'equazione (10) darà

$$(17) \quad a = \frac{2(l+x)\cos f \sqrt{(r' r'')}}{\operatorname{sen}^2 g} = \frac{2 m^2 \cos f \sqrt{(r' r'')}}{y^2 \operatorname{sen}^2 g};$$

l'equazione (1) darà $b = \frac{\operatorname{sen} f \sqrt{(r' r'')}}{\operatorname{sen} g}$. L'equazione $p = \frac{b^2}{a}$, sostituiti i valori di b, a, m porgerà . . . (18) $p = \left(\frac{y\, r' r'' \operatorname{sen} 2f}{k t}\right)^2$.

345. *Scolio II.* Le formule precedenti ricevono alcune modificazioni se sia $\cos f$ quantità negativa, cioè se il moto eliocentrico $2f$ del pianeta superi 180°; ma siccome tal circostanza non può aver quasi luogo in una prima ricerca dell'orbita di un pianeta, così non ci fermiamo ad esaminarla, rimandando perciò alla stessa opera di Gauss.

Si deduce dall'equazione (18) il seguente rapporto, che ci sarà utile in seguito: *Il settore ellittico contenuto dai raggi vettori r' r'' sta al triangolo fra gli stessi raggi, e la corda dell'arco ellittico corrispondente* : : y : 1, la quale proporzione tosto ricavasi osservando che l'area del settore ellittico è $= \frac{1}{2} k t \sqrt{p} = \frac{1}{2} y\, r' r'' \operatorname{sen} 2f$, e che l'area del triangolo è $= \frac{1}{2} r' r'' \operatorname{sen} 2f$.

Propos. III. Dati i raggi vettori r', r'' e gli angoli f, g del problema precedente, determinare gli elementi tutti del moto ellittico, cioè il semiasse maggiore, l'eccentricità, la longitudine del perigeo.

346. Il presente problema può aversi per risoluto dietro le formule precedenti, poichè determinandosi comodissimamente le quantità a, b, p per le equazioni (17), (1), (18) si troverà il valore di e dall'equazione $e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} = \frac{\sqrt{[(a+b)(a-b)]}}{a}$, od anche più

comodamente, se pongasi $\frac{b}{a} = \cos\varphi$, sarà $e = \operatorname{sen}\varphi$.

In seguito le equazioni (7), (5) del § 343 daranno

$$(7)' \quad e \operatorname{sen} G = \frac{r'' - r'}{2\, a \operatorname{sen} g}; \quad (5)' \quad e \cos G = \cos g - \frac{\cos f \sqrt{(r' r'')}}{a};$$

le quali molto speditamente e senza ambiguità determinano l'angolo G, ed inoltre l'eccentricità e a riprova delle precedenti operazioni. Calcolati g, G, dietro le fatte posizioni (§ 343) si avranno le anomalie eccentriche dalle seguenti equazioni $E'' = G + g$; $E' = G - g$, donde poi si formeranno le anomalie medie z'', z' nel modo seguente $z'' = E'' - e R'' \operatorname{sen} E''$; $z' = E' - R'' e \operatorname{sen} E'$; e per ultimo si avrà il moto medio da $\frac{z'' - z'}{t}$, il quale si potrà eziandio per un lodevole riscontro di calcolo ottenere dall'equazione $\zeta = R'' k a^{-3/2}$ (§ 323).

Restano a calcolarsi le anomalie vere v', v'', le quali facilmente si avranno calcolando F dietro le equazioni (2), (6) § 343; dopo di che sarà $v'' = F + f$; $v' = F - f$. Se l'anomalia vera si toglierà dalla longitudine nell'orbita, rimarrà la *longitudine del perigeo*, la quale poi aggiunta alla anomalia media corrispondente darà *l'epoca dei moti medii*.

347. *Esempio numerico*. Sia

$$\log r' = 0{,}4282792; \quad 2f = 62^\circ\ 55'\ 16'',64; \quad r' = 2{,}6808912;$$
$$\log r'' = 0{,}4062033; \quad t = 259^s{,}88477; \quad r'' = 2{,}5480230;$$

quindi avremo

$$\operatorname{tang}(45 + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r''}{r'}} = \operatorname{tang} 44^\circ\ 38'\ 9'',435; \quad \omega = -21'\ 50'',565;$$

$$l = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} f}{\cos f} + \frac{\operatorname{tang}^2 2\omega}{\cos f} = 0{,}08635663; \quad \log k t = 0{,}6503623.3;$$

$$\log m^2 = \log \frac{k^2 t^2}{8 \cos^3 f (r' r'')^{3/2}} = 9{,}3530654.5.$$

Otterrassi il primo valor prossimo di h da $h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l}$, ponendo $\frac{5}{6} + l = 0{,}91968996$; $\log(\frac{5}{6} + l) = 9{,}9636414.6$; però $h = 0{,}2451455$.

Col mezzo di questo valore di h la Tavola III darà $\log y^2 = 0{,}1722662.6$; e però $x = \frac{m^2}{y^2} - l = 0{,}06527828$; dietro questo valore di x dalla Tavola IV si ottiene $\xi = 0{,}0002531$. Quindi l'equazione $h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}$ darà con maggiore esattezza

$h = 0,2450781$, con cui dalla Tavola III otterrassi $\log y' = 0,1722303$; quindi $x = \frac{m'}{y'} - l = 0,0652908\frac{4}{}$.

Con questo nuovo valore di x la Tavola III dà $\xi = 0,0002532$, il quale non differendo dal precedente che di una sola unità nella settima cifra, ci assicura che nulla vi ha da cangiare ai valori di h e di x.

Ottenuto x, avremo $\operatorname{sen} \frac{1}{2} g = \sqrt{x}$, e però $\frac{1}{2} g = 14^\circ\ 48'\ 16'',0$;

$g = 29^\circ\ 36'\ 32'',0$; $\log a = \log \frac{2\, m' \cos f \sqrt{(r'\, r'')}}{y' \operatorname{sen}' g} = 0,4424661$;

$a = 2,7699126$; $\log b = \log \frac{\operatorname{sen} f \sqrt{(r'\, r'')}}{\operatorname{sen} g} = 0,4410448$;

$b = 2,7608632$; $\log p = \log \frac{b'}{a} = 0,4396235$;

$\log e = \log \frac{\sqrt{[(a-b)(a+b)]}}{a} = 8,9072368$.

Conviene ora passare a determinare le anomalie eccentriche, medie e vere dietro i precetti del § precedente. Primieramente il calcolo delle equazioni (7)', (5)' darà

$$\left.\begin{array}{l} \log e \operatorname{sen} G = 8,6861306 - \\ \log e \cos G = 8,8099110 + \end{array}\right\}; \text{ donde } \begin{array}{l} \log \operatorname{tang} G = 9,8762196 - \\ G = 323^\circ\ 3'\ 24'',2. \end{array}$$

Trovato G, si avrà facilmente $\log e = 8,9072389$, il quale senza l'inesattezza delle parti proporzionali dovrebbe combinare col precedente valore di $\log e$. Essendovi una picciola differenza nelle ultime cifre, riterremo nelle cose seguenti il suo medio valore, cioè stabiliremo $\log e = 8,9072378$. Sarà perciò $\log R'' e = 4,2216629$; $E' = G - g = 293^\circ\ 26'\ 52'',2$; $E'' = G + g = 352^\circ\ 39'\ 56'',2$.

In seguito si formeranno le due anomalie medie z', z'' dietro il calcolo numerico dell'equazione $z = E - R'' e \operatorname{sen} E$; si troverà così $z' = 297^\circ\ 41'\ 36'',04$; $z'' = 353^\circ\ 15'\ 22'',95$; dopo di che sarà il moto diurno medio $\zeta = \frac{z'' - z'}{t} = 769'',675$. A riscontro si calcolerà ζ dall'equazione $\zeta = R'' k a^{-3/2}$, che troverassi esattamente coincidente col precedente.

Per ultimo il calcolo delle equazioni (2), (6) darà

$\log \operatorname{sen} F = 9,8026954 -$; $\log \cos F = 9,8879583 +$

le quali danno $F = 320^\circ\ 35'\ 18'',65$. Quindi si avrà

$v' = F - f = 289^\circ\ 7'\ 40'',33$; $v'' = 352^\circ\ 2'\ 56'',97$.

Di alcune relazioni esistenti fra più posizioni di un pianeta e della terra nello spazio, sopra le quali appoggiasi la determinazione prima delle loro orbite.

348. Sia, come nel § 241, la posizione eliocentrica di un corpo celeste riferita a tre assi ortogonali, il primo dei quali sia la stessa linea degli equinozj, il secondo una perpendicolare ad essa nel piano dell'ecclittica, ed il terzo l'asse dell'ecclittica condotto al suo polo boreale. Si rappresentino per ordine le sue coordinate ad un istante qualunque per x, y, z; ω sia la longitudine del nodo ascendente della sua orbita nel piano dell'ecclittica, i l'inclinazione, r la distanza dal centro del Sole, t la distanza angolare del pianeta dal nodo. Avremo, come nel citato paragrafo, le seguenti equazioni

$$x = r\cos\omega\cos t - r\cos i\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,t;$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\omega\cos t + r\cos i\cos\omega\,\mathrm{sen}\,t; \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,t.$$

Se ora fingiamo che le quantità precedenti con un apice, con due, con tre sieno relative ad una prima osservazione, ad una seconda, ad una terza che si seguano in tre dati istanti, colle moltiplicbe ed opportune riduzioni facilmente si verificheranno le seguenti equazioni

$$x'y''-x''y'=r'r''\cos i\,\mathrm{sen}(t''-t'); \qquad x''y'''-x'''y''=r''r'''\cos i\,\mathrm{sen}(t'''-t'');$$
$$x'y'''-x'''y'=r'r'''\cos i\,\mathrm{sen}(t'''-t'); \qquad x'z''-x''z'=r'r''\,\mathrm{sen}\,i\cos\omega\,\mathrm{sen}(t''-t');$$
$$x''z'''-x'''z''=r''r'''\,\mathrm{sen}\,i\cos\omega\,\mathrm{sen}(t'''-t''); \qquad x'z'''-x'''z'=r'r'''\,\mathrm{sen}\,i\cos\omega\,\mathrm{sen}(t'''-t');$$
$$y'z''-y''z'=r'r''\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}(t''-t'); \qquad y''z'''-z''y'''=r''r'''\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}(t'''-t'');$$
$$y'z'''-z'y'''=r'r'''\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}(t'''-t').$$

Se ora ponghiamo per brevità $n' = r''r'''\,\mathrm{sen}\,(t'''-t'')$, $n'' = r'r'''\,\mathrm{sen}\,(t'''-t')$, $n''' = r'r''\,\mathrm{sen}\,(t''-t')$, saranno evidentemente n', n'', n''' il doppio dei triangoli formati nello spazio al centro del Sole fra la seconda e terza osservazione, fra la prima e la terza, fra la prima e la seconda; moltiplicando in seguito i primi membri delle tre prime precedenti equazioni per $x''', x', -x''$, e sommando i prodotti si ottiene un risultamento identicamente $= 0$; quindi i secondi membri (introducendovi le quantità n', n'', n''') daranno l'equazione $n'x' - n''x'' + n'''x''' = 0$; e del pari dalle altre ricaveremo $n'y' - n''y'' + n'''y''' = 0$; $n'z' - n''z'' + n'''z''' = 0$.

Sia ora la longitudine geocentrica del pianeta $= \alpha$, la sua latitudine $= \beta$, e la distanza dal centro della terra projettata nel piano dell'ecclittica $= \rho$. La longitudine eliocentrica della terra e la sua latitudine sieno rappresentate per A, B, e la sua distanza dal Sole ridotta all'ecclittica per R. Sarà $A =$ longit. di ☉ $+ 180°$; $B = -$ lat. di ☉, arco picciolissimo per lo più trascurabile, e di cui terrassi conto soltanto per istabilire la simmetria delle formule, o per riferire le coor-

dinate comodamente ad altro piano, se occorre. Dietro i confronti ed i ragionamenti del § 230, se riflettasi che ivi A rappresentava la longitudine del Sole, mentre qui è quella della terra, avremo
$x = \rho \cos \alpha + R \cos A$; $y = \rho \operatorname{sen} \alpha + R \operatorname{sen} A$; $z = \rho \operatorname{tang} \beta + R \operatorname{tang} B$.

Formando poscia con opportuna applicazione degli apici i valori delle coordinate nelle tre osservazioni, e sostituendole nelle tre superiori equazioni esse diverranno

$$(1)\ n'(\rho' \cos \alpha' + R' \cos A') - n''(\rho'' \cos \alpha'' + R'' \cos A'') + n'''(\rho''' \cos \alpha''' + R''' \cos A''') = 0$$
$$(2)\ n'(\rho' \operatorname{sen} \alpha' + R' \operatorname{sen} A') - n''(\rho'' \operatorname{sen} \alpha'' + R'' \operatorname{sen} A'') + n'''(\rho''' \operatorname{sen} \alpha''' + R''' \operatorname{sen} A''') = 0$$
$$(3)\ n'(\rho' \operatorname{tg} \beta' + R' \operatorname{tg} B') - n''(\rho'' \operatorname{tg} \beta'' + R'' \operatorname{tg} B'') + n'''(\rho''' \operatorname{tg} \beta''' + R''' \operatorname{tg} B''') = 0.$$

349. Da queste equazioni se ne possono dedurre delle altre, che divengono utilissime, ed aprono la via alla soluzione del problema, qualora insieme si combinino per eliminare una o due delle distanze ρ', ρ'', ρ'''. Prima però di riferire i risultamenti di queste eliminazioni stabiliremo i seguenti simboli per non incorrere in formule soverchiamente complicate; porremo cioè

$$(1,2,3) = \operatorname{tang} \beta' \operatorname{sen}(\alpha''' - \alpha'') + \operatorname{tang} \beta'' \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha''') + \operatorname{tang} \beta''' \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha')$$

quantità, come si vede, composta dei luoghi geocentrici osservati del pianeta, ed in seguito supporremo che se in questa espressione cambiasi qualche posizione in un'altra, si faccia lo stesso cambiamento nelle cifre del simbolo (1, 2, 3), avvertendo di porre una cifra romana di egual nome qualora cangisi una posizione del pianeta in una corrispondente della terra. In tal guisa i simboli, per esempio, (1, II, 3), (1, 3, I) avranno i seguenti valori

$$(1, \mathrm{II}, 3) = \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\alpha''' - A'') + \operatorname{tg} B'' \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha''') + \operatorname{tg} \beta''' \operatorname{sen}(A'' - \alpha')$$
$$(1, 3, \mathrm{I}) = \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(A' - \alpha''') + \operatorname{tg} \beta''' \operatorname{sen}(\alpha' - A') + \operatorname{tg} B' \operatorname{sen}(\alpha''' - \alpha')$$

e così degli altri.

350. Ciò premesso, dalle tre superiori equazioni eliminiamo ρ''', R'''; con un poco di attenzione facilmente si scorge che si avrà l'eliminata, se sommeremo insieme la (1) moltiplicata per
$\operatorname{sen} \alpha''' \operatorname{tang} B''' - \operatorname{sen} A''' \operatorname{tang} \beta'''$, colla (2) per
$\cos A''' \operatorname{tang} \beta''' - \cos \alpha''' \operatorname{tang} B'''$, e colla (3) per $\operatorname{sen}(A''' - \alpha''')$.
Fatte le indicate operazioni, qualora facciasi uso degli assunti simboli, avremo

$$(4)\ n'[(1, 3, \mathrm{III})\rho' + (\mathrm{I}, 3, \mathrm{III})R'] - n''[(2, 3, \mathrm{III})\rho'' + (\mathrm{II}, 3, \mathrm{III})R''] = 0,$$

la quale porge un rapporto fra le distanze ρ', ρ'', qualora sia noto il rapporto di n'' ad n'.

Del pari se dalle stesse equazioni elimineremo ρ'', R'', ovvero ρ', R' otterremo le due seguenti (*)

(*) Le eliminazioni si ottengono ora facilmente se si osservi che le equazioni (1), (2), (3) sono simmetriche qualora pongasi $-n'' = n'''$. Si potranno quindi dal-

(5) $n'[(1,2,\mathrm{II})\rho' + (\mathrm{I},2,\mathrm{II})R'] + n'''[(3,2,\mathrm{II})\rho''' + (\mathrm{III},2,\mathrm{II})R'''] = 0$

(6) $n''[(2,1,\mathrm{I})\rho' + (\mathrm{II},1,\mathrm{I})R'] - n'''[(3,1,\mathrm{I})\rho''' + (\mathrm{III},1,\mathrm{I})R'''] = 0,$

le quali esprimono il rapporto fra ρ', ρ'''; ρ', ρ''', conosciuto che sia il rapporto di $n''' : n'$, e di $n''' : n''$.

Parimente se dalle equazioni (1), (2), (3) eliminiamo ρ'', ρ'''', indi ρ', ρ''', e per ultimo ρ', ρ'', otterremo altrettante equazioni, le quali ci daranno le distanze accorciate ρ', ρ'', ρ''' espresse per n', n'', n''' ed altre quantità note. Eseguirassi la prima eliminazione moltiplicando l'equazione (1) per sen α'' tang $\beta''' -$ sen α''' tang β'', la (2) per cos α''' tang $\beta'' -$ cos α'' tang β''', la (3) per sen $(\alpha''' - \alpha'')$, e sommando quindi i prodotti. Si otterrà in tal guisa, facendo uso dei simboli già adottati,

(7) $n'[(1,2,3)\rho' + (\mathrm{I},2,3)R'] - n''(\mathrm{II},2,3)R'' + n'''(\mathrm{III},2,3)R''' = 0.$

Con simili operazioni, od anche col semplice cambio delle posizioni geocentriche, si otterranno le seguenti

(8) $n'(1,\mathrm{I},3)R' - n''[(1,2,3)\rho'' + (1,\mathrm{II},3)R''] + n'''(1,\mathrm{III},3)R''' = 0$

(9) $n'(1,2,\mathrm{I})R' - n''(1,2,\mathrm{II})R'' + n'''[(1,2,3)\rho''' + (1,2,\mathrm{III})R'''] = 0.$

Le precedenti equazioni (3) . . . (9) sono identiche, se sia $\beta' = \beta'' = \beta''' = B' = B'' = B''' = 0$, e le ultime tre non possono dare i valori di ρ', ρ'', ρ''', se sia $(1, 2, 3) = 0$. Se le latitudini sieno $= 0$, i rapporti delle distanze dovranno dedursi dalle equazioni (1), (2), la terza in allora mancando. Non ci tratterremo a dedurli, essendo facilissimi, e piuttosto esporremo come dagli elementi dell'orbita dipendano i rapporti scambievoli di n', n'', n'''.

Proposiz. Esprimere con una serie ordinata per le potenze del tempo le funzioni n', n'', n'''.

351. Riferiscasi nel piano dell'orbita la posizione del pianeta a due assi ortogonali, e sieno per le tre osservazioni x', y', x'', y'', x''', y''' le sue coordinate. Pongasi in generale $k\,t = \theta$, t essendo l'intervallo di tempo fra due qualunque osservazioni, e sieno θ', θ'', θ''' i tempi così ridotti fra la prima e seconda, seconda e terza, prima e terza osservazione. Quando questi tempi sieno non molto grandi si potranno sviluppare le coordinate eliocentriche del pianeta in serie ordinate per le potenze di θ', θ'' ec. Così se prendiamo per base l'osservazione di mezzo corrispondente alle coordinate x'', y'', dal teorema di Taylor otterremo

$$x' = x'' - \left(\frac{d\,x''}{d\,\theta}\right)\theta' + \left(\frac{d^2\,x''}{d\,\theta^2}\right)\frac{\theta'^2}{2} - \left(\frac{d^3\,x''}{d\,\theta^3}\right)\frac{\theta'^3}{6} + \ldots$$

l'equazione (4) ricavare le equazioni fra ρ', ρ'''; ρ'', ρ'''' colla semplice permutazione degli accenti e dei numeri nei caratteri (1, 2, 3) ec. Eseguita l'operazione si riporrà $-n''$ in luogo di n'', e si avranno le equazioni (5), (6).

$$y' = y'' - \left(\frac{dy''}{d\theta}\right)\theta' + \left(\frac{d^2 y''}{d\theta^2}\right)\frac{\theta'^2}{2} - \left(\frac{d^3 y''}{d\theta^3}\right)\frac{\theta'^3}{6} + \ldots$$

$$x''' = x'' + \left(\frac{dx''}{d\theta}\right)\theta'' + \left(\frac{d^2 x''}{d\theta^2}\right)\frac{\theta''^2}{2} + \left(\frac{d^3 x''}{d\theta^3}\right)\frac{\theta''^3}{6} + \ldots$$

$$y''' = y'' + \left(\frac{dy''}{d\theta}\right)\theta'' + \left(\frac{d^2 y''}{d\theta^2}\right)\frac{\theta''^2}{2} + \left(\frac{d^3 y''}{d\theta^3}\right)\frac{\theta''^3}{6} + \ldots$$

Se ora riflettiamo che a motivo delle coordinate prese nel piano dell'orbita abbiamo $n' = x''y''' - y''x'''$, $n'' = x'y''' - x'''y'$, $n''' = x'y'' - x''y'$, formeremo i seguenti valori

$$n' = \frac{x''dy'' - y''dx''}{d\theta}\theta'' + \frac{x''d^2y'' - y''d^2x''}{d\theta^2}\frac{\theta''^2}{2} + \frac{x''d^3y'' - y''d^3x''}{d\theta^3}\frac{\theta''^3}{6}\ldots$$

$$n'' = \frac{x''dy'' - y''dx''}{d\theta}(\theta' + \theta'') + \frac{x''d^2y'' - y''d^2x''}{d\theta^2}\frac{\theta''^2 - \theta'^2}{2}$$

$$+ \frac{x''d^3y'' - y''d^3x''}{d\theta^3}\frac{\theta'^3 + \theta''^3}{6} + \frac{dy''d^2x'' - dx''d^2y''}{d\theta^3}\frac{3\theta'\theta''^2 + 3\theta''\theta'^2}{6}\ldots \text{ec.}$$

Siccome poi per le equazioni del § 319 abbiamo (trascurando la massa del pianeta)

$$\frac{d^2x''}{d\theta^2} = -\frac{x''}{r''^3};\quad \frac{d^2y''}{d\theta^2} = -\frac{y''}{r''^3};\quad \frac{x''dy'' - y''dx''}{d\theta} = \sqrt{p},$$

$$\frac{x''d^2y'' - y''d^2x''}{d\theta^2} = 0, \text{ e quindi}$$

$$\frac{x''d^3y'' - y''d^3x''}{d\theta^3} = \frac{dy''d^2x'' - dx''d^2y''}{d\theta^2} = -\frac{\sqrt{p}}{r''^3},$$

così le precedenti daranno $n' = \theta''\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta''^2}{6r''^3}\right)$,

$$n'' = (\theta' + \theta'')\sqrt{p}\left(1 - \frac{(\theta' + \theta'')^2}{6r''^3}\right) = \theta'''\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta'''^2}{6r''^3}\right),$$

$n''' = \theta'\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta'^2}{6r''^3}\right)$, le quali equazioni porgono direttamente i domandati rapporti.

352. *Coroll.* Essendo per le leggi di Keplero i settori ellittici corrispondenti espressi da $\theta''\sqrt{p}$, $\theta'''\sqrt{p}$, $\theta'\sqrt{p}$, vedesi che questi da quelli non differiscono se non in quantità di terzo ordine, come ancora è abbastanza manifesto dalla teoria delle curve.

353. Premessi questi principj, il signor Gauss parte dall'equazione (8) § 350, e ad essa appoggia il suo metodo per il calcolo dell'orbita di un nuovo pianeta. Se per brevità ponghiamo i coefficienti

$(1, 2, 3) = a$, $(1, \mathrm{II}, 3)\, R'' = -b$, $(1, \mathrm{I}, 3)\, R' = c$, $(1, \mathrm{III}, 3)\, R''' = d$, essa diviene $a\,\rho'' = b + \frac{c\,n' + d\,n'''}{n''}$, nella quale in luogo dei rapporti $\frac{n'}{n''}$, $\frac{n'''}{n''}$ sembrerebbe a prima vista di poter sostituire i loro valori prossimi $\frac{\theta''}{\theta'''}$, $\frac{\theta'}{\theta'''}$. Ma con un poco d'attenzione si riconosce che a è una quantità di terzo ordine, mentre c, d sono di primo ordine, la loro differenza $d - c$ essendo di secondo ordine; come rendesi manifesto se, prese a base le quantità corrispondenti alla seconda osservazione, si sviluppano in serie le espressioni delle quantità relative alla prima e terza osservazione, e si sostituiscono nelle formule esprimenti questi coefficienti. Risulta da ciò che i rapporti approssimati $\frac{\theta'}{\theta'''}$, $\frac{\theta''}{\theta'''}$ differendo dai veri di quantità di secondo ordine sono insufficienti a porgere un valore esatto per ρ'', poichè le quantità trascurate sono dell'ordine di a.

Scritta però la superiore equazione sotto la forma $a\,\rho'' = b + \frac{c\,n' + d\,n'''}{n' + n'''}\,\frac{n' + n'''}{n''}$, è facile vedere che il coefficiente $\frac{c\,n' + d\,n'''}{n' + n'''}$ dentro le quantità di quarto ordine è $= \frac{c\,\theta'' + d\,\theta'}{\theta' + \theta''}$.

In fatti pongasi $n' = \frac{\theta''\sqrt{p}}{h'}$, $n'' = \frac{\theta'''\sqrt{p}}{h''}$, $n''' = \frac{\theta'\sqrt{p}}{h'''}$, saranno h', h'', h''' quelle quantità che sopra nel § 345 abbiamo indicato con y, da calcolarsi mediante la Tavola III dietro i precetti ivi esposti, e differiscono dall'unità di quantità di secondo ordine, come apparisce eziandio dai valori approssimati di n', n'', n''' dati di sopra. L'errore del coefficiente è

$$= \frac{c\,\theta'' + d\,\theta'}{\theta' + \theta''} - \frac{c\,n' + d\,n'''}{n' + n'''} = \frac{\theta'\,\theta''\,(d - c)\,(h''' - h')}{(\theta' + \theta'')\,(\theta''\,h''' + \theta'\,h')},$$

quantità in generale di quarto ordine. Il termine $\frac{n' + n'''}{n''}$, per la sostituzione dei valori di n', n'', n''', diviene $= 1 + \frac{\theta'\,\theta''}{2\,r'''^3}$. Quindi l'equazione, da cui dipende il valore di ρ'', si ridurrà alla seguente (a motivo di $\theta' + \theta'' = \theta'''$) $a\,\rho'' = b + \frac{c\,\theta'' + d\,\theta'}{\theta'''}\left(1 + \frac{\theta'\,\theta''}{2\,r'''^3}\right)$, la quale, quando conoscasi r''', darà il valore di ρ'' esatto fino alle quantità di primo ordine. Quanto al valore di r''', essendo egli $= \sqrt{(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2)}$,

se si porrà nelle espressioni delle coordinate la latitudine della terra $= 0$, si otterrà $r''^2 = \rho''^2 \sec^2 \beta'' + 2 R'' \rho'' \cos (A'' - \alpha'') + R''^2$, che combinata colla precedente porgerà r'', ρ''. Ottenuto r'', si calcoleranno i rapporti $\frac{n''}{n'}$, $\frac{n'''}{n''}$, e quindi dalle equazioni (4), (6) si avranno f', f''', dai quali infine si calcoleranno r', r'''. In seguito nulla vi sarebbe di più facile che determinare gli elementi dell'orbita.

Frattanto ben considerando ogni circostanza, il signor Gauss ha riconosciuto non essere questa la più spedita via per la soluzione del problema. Per uniformarci al metodo da esso proposto, pongasi $P = \frac{n'''}{n'}$, $Q = 2 r''^3 \left(\frac{n' + n'''}{n''} - 1\right)$, e l'equazione in ρ'' diverrà

$$a \rho'' = b + \frac{c + d P}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r''^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Se nelle quantità P, Q introduciamo h', h'', h''', sarà in primo luogo $P = \frac{\theta'}{\theta'''} \frac{h'}{h'''}$. Per avere il valore di Q richiamisi il valore di p assegnato al § 235. Ponendo il moto elioeentrico del pianeta fra la prima e la seconda osservazione $= 2 f'$, fra la seconda e la terza $= 2 f''$, fra la prima e la terza $= 2 f'''$, cosicchè sia $2 f''' = 2 f' + 2 f''$, sarà $n' = r'' r''' \operatorname{sen} 2 f''$, $n'' = r' r''' \operatorname{sen} 2 f'''$, $n''' = r' r'' \operatorname{sen} 2 f'$, e la formula ivi assegnata, avendo riguardo alle presenti denominazioni, porge

$$n' + n''' - n'' = \frac{r' r'' r''' (\operatorname{sen} 2 f'' + \operatorname{sen} 2 f' - \operatorname{sen} 2 f''')}{p} = \frac{4 r' r'' r''' \operatorname{sen} f' \operatorname{sen} f'' \operatorname{sen} f'''}{p}.$$

Ora dai valori di n', n''' trovasi $p = \frac{h' h''' n' n'''}{\theta' \theta''}$; quindi otterrassi

$$\frac{n' + n''' - n''}{n''} = \frac{4 r' r'' r''' \theta' \theta'' \operatorname{sen} f' \operatorname{sen} f'' \operatorname{sen} f'''}{h' h''' n' n'' n'''} = \frac{\theta' \theta''}{2 r' r'' r''' h' h''' \cos f' \cos f'' \cos f'''},$$

e però $\quad . \quad . \quad . \quad Q = \frac{r'' r''' \theta' \theta''}{r' r''' h' h''' \cos f' \cos f'' \cos f'''} \quad . \quad . \quad . \quad (B)$

Tali appunto saranno i valori esatti di P e di Q, per i quali, quando trascurare si vogliano le quantità di secondo ordine, in una prima approssimazione potrassi porre $P = \frac{\theta'}{\theta''}$, $Q = \theta' \theta''$. Colle stesse quantità P, Q si possono esprimere i rapporti $\frac{n'}{n''}$, $\frac{n'''}{n''}$; si avrà cioè

$$\frac{n'}{n''} = \frac{1}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r''^3}\right); \quad \frac{n'''}{n''} = \frac{P}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r''^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

354. Scelgasi ora per piano fondamentale quello dell'eeclittica, la

cui sezione col cielo stellato (*Fig.* 8) sia $\Upsilon A' A'' A'''$. Siano A', A'', A''' i luoghi della terra nelle tre successive osservazioni, e supponiamo che il pianeta veduto dalla terra apparisca in B', B'', B'''. Υ sia la posizione dell'equinozio, da cui partono le longitudini. Sia $\Omega C' C'''$ l'intersezione del piano dell'orbita colla sfera celeste; il pianeta veduto dal centro del Sole apparirà in C', C'', C''' al tempo delle tre osservazioni, e sarà $C' C'' = 2 f'$, $C'' C''' = 2 f''$, $C' C''' = 2 f'''$. Condotti gli archi di circolo massimo $A' B'$, $A'' B'$, $A''' B'''$, la teoria del Sole e le osservazioni daranno le loro posizioni scambievoli, rapporto all'ecclittica. In fatti chiamando γ', γ'', γ''' gli angoli che questi circoli fanno coll'ecclittica valutati dalla parte del moto diretto, δ', δ'', δ''' gli archi $A' B'$, $A'' B'$, $A''' B'''$, ed abbassando i circoli di latitudine per B', B'', B''', avremo dai triangoli rettangoli, che si formano, $\tang \gamma' = \frac{\tang \beta'}{\sen (\alpha' - A')}$, $\tang \delta' = \frac{\tang (\alpha' - A')}{\cos \gamma'}$, e così degli altri. Conosciuti gli angoli in A', A'', A''', e gli archi $A' A'' = A'' - A'$, $A'' A''' = A''' - A''$, $A' A''' = A''' - A'$, la risoluzione dei triangoli sferici $A' D''' A''$, $A' D'' A'''$, $A'' D' A'''$ farà conoscere i lati $A' D'''$, $A'' D'''$, $A' D''$, $A''' D''$, $A'' D'$, $A''' D'$, e gli angoli in D', D'', D''', che porremo $= \iota'$, ι'', ι'''. Qui è da osservarsi che questi triangoli comodissimamente risolvonsi dietro le formule (1), (2), (3), (4) della Trigonometria (XII). In fine unendo i due punti estremi B', B''' con un arco di circolo massimo $B' B'''$, sarà nota eziandio la posizione del punto b, in cui vien tagliato il circolo $A'' B'$. Imperocchè l'arco $B''' B'$ venga fino all'ecclittica prolungato, e la seghi sotto un angolo χ in un punto la cui longitudine sia $= \psi$, e sieno per il punto b la longitudine $= \alpha_{\prime\prime}$, la latitudine $= \beta_{\prime\prime}$. Avremo evidentemente

$$\tang \chi = \frac{\tang \beta'}{\sen (\alpha' - \psi)} = \frac{\tang \beta_{\prime\prime}}{\sen (\alpha_{\prime\prime} - \psi)} = \frac{\tang \beta'''}{\sen (\alpha''' - \psi)},$$ dalle quali eliminando ψ formasi la seguente

$$\tang \beta' \sen (\alpha''' - \alpha_{\prime\prime}) - \tang \beta_{\prime\prime} \sen (\alpha''' - \alpha') + \tang \beta''' \sen (\alpha_{\prime\prime} - \alpha') = 0,$$

condizione essenziale perchè i tre punti B', b, B''' sieno compresi in uno stesso circolo massimo. Se ora si rifletta che (a motivo dell'angolo in $A'' = \gamma''$) $\tang \beta_{\prime\prime} = \tang \gamma'' \sen (\alpha_{\prime\prime} - A'')$, e se nella precedente equazione in luogo di $\alpha''' - \alpha_{\prime\prime}$, $\alpha_{\prime\prime} - \alpha'$ si scrive $\alpha''' - A'' - (\alpha_{\prime\prime} - A'')$, $\alpha_{\prime\prime} - A'' + A'' - \alpha'$, fatte le debite riduzioni si troverà un'equazione della forma

$$M \cos (\alpha_{\prime\prime} - A'') - N \sen (\alpha_{\prime\prime} - A'') = 0.$$

Ponendo l'arco $b B'' = \sigma$, sarà $A'' b = \delta'' - \sigma$, e però dal punto b condotto un circolo di latitudine, si formerà un triangolo rettangolo, il quale darà $\tang (\alpha_{\prime\prime} - A'') = \cos \gamma'' \tang (\delta'' - \sigma)$. Questa equa-

zione confrontata con la precedente darà l'arco $A'' b$, ossia la posizione del punto b sull'arco $A'' B''$, e quindi otterrassi il valore di σ. Fatti gli sviluppi opportuni si troverà . . . (10)

$$\mathrm{tg}(\delta''-\sigma)=\frac{\mathrm{tang}\,\beta'\,\mathrm{sen}(\alpha'''-A'')-\mathrm{tang}\,\beta'''\,\mathrm{sen}(\alpha'-A'')}{\cos\gamma''[\mathrm{tg}\beta'\cos(\alpha'''-A'')-\mathrm{tg}\beta'''\cos(\alpha'-A'')]+\mathrm{sen}\gamma''\,\mathrm{sen}(\alpha'''-\alpha')}.$$

355. Sia ora in una qualunque osservazione S il centro del Sole, T il centro della terra, P il centro del pianeta (*Fig.* 9). Il piano del triangolo PTS essendo compreso nel circolo segnato AB (*Fig.* 8) sarà l'angolo in $T = AB = \delta$, l'angolo in $S = AC$, l'angolo in $P = BC$, intendendo sempre applicati gli apici opportuni per rappresentare la prima, seconda e terza osservazione. Ritenendo pertanto $ST = R$, $SP = r$, sia $PT = g$, cosicchè la quantità sopra indicata per ρ sarà $= g \cos \beta$. Il triangolo PST nelle nostre tre osservazioni darà le seguenti equazioni . . .

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{sen}\,\delta'}{r'}=\dfrac{\mathrm{sen}\,A'C'}{g'}=\dfrac{\mathrm{sen}\,B'C'}{R'}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{sen}\,\delta''}{r''}=\dfrac{\mathrm{sen}\,A''C''}{g''}=\dfrac{\mathrm{sen}\,B''C''}{R''};\ \dfrac{\mathrm{sen}\,\delta'''}{r'''}=\dfrac{\mathrm{sen}\,A'''C'''}{g'''}=\dfrac{\mathrm{sen}\,B'''C'''}{R'''}\end{array}\right\}\ (D)$$

dalle quali apparisce potersi comodamente determinare le distanze r', r'', r''', g', g'', g''' tostochè conoscasi la posizione dei punti C', C'', C''', che si può far dipendere dalle quantità P, Q introdotte di sopra.

356. Per giungere a questo scopo in un modo semplice riflettiamo che se in un circolo massimo, per esempio nel circolo $NC'C'''$ prendiamo un punto fisso N, si ha sempre l'equazione identica

$$\mathrm{sen}NC'\,\mathrm{sen}(NC'''-NC'')-\mathrm{sen}NC''\,\mathrm{sen}(NC'''-NC')+\mathrm{sen}NC'''\,\mathrm{sen}(NC''-NC')=0,$$

la quale, a motivo delle denominazioni del § 354, equivale a

$$\mathrm{sen}\,2f''\,\mathrm{sen}\,NC'-\mathrm{sen}\,2f'''\,\mathrm{sen}\,NC''+\mathrm{sen}\,2f\,\mathrm{sen}\,NC'''=0\ \ldots\ (E)$$

Assunto il punto N nell'intersezione dei due circoli $B'''B'$, $C'''C'$, dai punti C', C'', C''', D', D'', D''' siano condotti gli archi perpendicolari sul circolo $NB'B'''$, che vengano per ordine indicati con quelle medesime lettere, e si assumano positivi nell'emisfero superiore, essendo negativi nell'inferiore. Avranno evidentemente luogo le seguenti proporzioni

$$\mathrm{sen}\,C' : \mathrm{sen}\,C'' : \mathrm{sen}\,C''' :: \mathrm{sen}\,NC' : \mathrm{sen}\,NC'' : \mathrm{sen}\,NC''';$$
$$-\mathrm{sen}\,C' : \mathrm{sen}\,D'' :: \mathrm{sen}\,C'B' : \mathrm{sen}\,B'D''\ \text{ec.}$$

La prima proporzione farà cambiare l'equazione (E) nella seguente

$$\mathrm{sen}\,2f''\,\mathrm{sen}\,C'-\mathrm{sen}\,2f''\,\mathrm{sen}\,C''+\mathrm{sen}\,2f\,\mathrm{sen}\,C'''=0,$$

la quale moltiplicata per $r'r''r'''$ diviene

$$r'n'\,\mathrm{sen}\,C'-r''n''\,\mathrm{sen}\,C''+r'''n'''\,\mathrm{sen}\,C'''=0\ \ .\ .\ .\ (F)$$

La seconda proporzione e le sue derivate daranno, avendo riguardo alle denominazioni stabilite,

$$-\operatorname{sen} C' = \frac{\operatorname{sen} D'' \operatorname{sen} C' B'}{\operatorname{sen}(A' D'' - \delta')} = \frac{\operatorname{sen} D''' \operatorname{sen} C' B'}{\operatorname{sen}(A' D''' - \delta')};$$

$$-\operatorname{sen} C'' = \frac{\operatorname{sen} D''' \operatorname{sen} C'' b}{\operatorname{sen}(A' D''' - \delta'' + \sigma)} = \frac{\operatorname{sen} D' \operatorname{sen} C'' b}{\operatorname{sen}(A' D' - \delta'' + \sigma)};$$

$$-\operatorname{sen} C''' = \frac{\operatorname{sen} D' \operatorname{sen} C''' B'''}{\operatorname{sen}(A''' D' - \delta''')} = \frac{\operatorname{sen} D'' \operatorname{sen} C''' B'''}{\operatorname{sen}(A''' D'' - \delta''')}.$$

Se ora dividasi l'equazione (F) per r''' sen C''', avendo riguardo alle precedenti equazioni, si otterrà

$$n' \frac{r' \operatorname{sen} C' B' \operatorname{sen}(A''' D'' - \delta''')}{r''' \operatorname{sen} C''' B''' \operatorname{sen}(A' D'' - \delta')} - n'' \frac{r'' \operatorname{sen} C'' b \operatorname{sen}(A''' D' - \delta''')}{r' \operatorname{sen}(A'' D' - \delta'' + \sigma) \operatorname{sen} C''' B'''} + n''' = 0.$$

Facciasi l'arco incognito $C'' B'' = z$, avendo riguardo alle equazioni (D), e ponendo per brevità

$$a = \frac{R' \operatorname{sen} \delta' \operatorname{sen}(A''' D'' - \delta''')}{R''' \operatorname{sen} \delta''' \operatorname{sen}(A' D'' - \delta')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$b = \frac{R'' \operatorname{sen} \delta'' \operatorname{sen}(A''' D' - \delta''')}{R''' \operatorname{sen} \delta''' \operatorname{sen}(A'' D' - \delta'' + \sigma)} \quad . \quad . \quad (12)$$

la precedente equazione diverrà

$$a n' - b n'' \frac{\operatorname{sen}(z - \sigma)}{\operatorname{sen} z} + n''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

Se questa equazione dividasi per n''', e si sostituiscano i valori di $\frac{n''}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ (§ 353), si otterrà $\frac{P+a}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2 r''^3}\right) = b \frac{\operatorname{sen}(z-\sigma)}{\operatorname{sen} z}$; introducendovi per r'' il suo valore $\frac{R'' \operatorname{sen} \delta''}{\operatorname{sen} z}$, dietro facili riduzioni si troverà, per determinare z, l'equazione

$$\operatorname{sen} z + \frac{Q \operatorname{sen}^4 z}{2 R''^3 \operatorname{sen}^3 \delta''} = b \frac{(P+1)}{P+a} \operatorname{sen}(z - \sigma),$$ che può scriversi così

$$\frac{Q \operatorname{sen}^4 z}{2 R''^3 \operatorname{sen}^3 \delta''} = \left(b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma\right) \operatorname{sen}(z - \sigma) - \operatorname{sen} \sigma \cos(z - \sigma).$$

Se ora per brevità si fa . . . $c = \frac{1}{2 R''^3 \operatorname{sen}^3 \delta'' \operatorname{sen} \sigma}$ . . . (13)

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{b(P+1):(P+a) - \cos \sigma} = \frac{(P+a) \operatorname{tang} \sigma}{P(b : \cos \sigma - 1) + (b : \cos \sigma - a)} \quad (14)$$

l'equazione in z si cangia nella seguente

$$c\, Q \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen}^4 z = \operatorname{sen}(z - \omega - \sigma) \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

dalla quale dati P, Q dedurrassi l'incognita z, che determina la posizione del punto C''. Che se fosse $\sigma = 0$, sarebbe $c = \infty$, e l'equa-

zione (H) non avrebbe più luogo. Allora rimontando alla primitiva equazione in z, si riduce al terzo grado, e sciogliesi con tutta facilità, deducendosi in questo caso $\operatorname{sen} z = R'' \operatorname{sen} \delta'' \sqrt[3]{\left(\frac{2b(P+1)-2(P+a)}{Q(P+a)}\right)}$.

357. L'equazione (H) comodamente risolvesi per false posizioni, poichè la sua soluzione con i metodi ordinarj, risultando dall'ottavo grado, è troppo complicata. Avrà essa o due o quattro radici reali, fra le quali rigetteremo quelle che daranno sen z negativo poichè r'' diverrebbe negativo, lo che mai può accadere. Rigetteremo eziandio i valori di z maggiori di δ'', perchè per essi g'', f'' diverrebbero negativi. Per ultimo fra i valori di z uno se ne può incontrare $= \delta''$, od a questo molto prossimo, e dovrà pure rigettarsi, poichè è relativo alla posizione della terra, e non del pianeta. Con queste avvertenze non potremo cadere in errore nella scelta del vero valore di z, dal quale tosto dedurremo $r'' = \frac{R'' \operatorname{sen} \delta''}{\operatorname{sen} z}$.

358. Ottenuto z, rimane a determinare la posizione dei punti C', C''' nell'orbita. Condotti gli archi $C'' Q''$, $C''' Q'''$ perpendicolari ad $A' D'''$, avremo $\operatorname{sen} C' C'' : \operatorname{sen} C' C''' :: \operatorname{sen} C'' Q'' : \operatorname{sen} C''' Q'''$. Ora essendo gli angoli in $D'' D'''$ rappresentati da ε'', ε''', si ha dalla Trigonometria $\operatorname{sen} C'' Q'' = \operatorname{sen} \varepsilon'' \operatorname{sen} C'' D'' = \operatorname{sen} \varepsilon'' \operatorname{sen} (z + A'' D''' - \delta'')$; $\operatorname{sen} C''' Q''' = \operatorname{sen} \varepsilon''' \operatorname{sen} C''' D''$. D'altra parte sarà $\operatorname{sen} C' C'' : \operatorname{sen} C' C''' :: n''' r''' : n'' r''$; ponendo adunque $C''' D'' = \zeta'''$, avremo l'equazione $r''' \operatorname{sen} \zeta''' = \frac{n'' r''}{n'''} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'''}{\operatorname{sen} \varepsilon''} \operatorname{sen} (z + A'' D''' - \delta'')$.

Un'altra equazione fra r''', ζ''' si deduce dalle (D), poichè esse danno $r''' \operatorname{sen} B''' C''' = R''' \operatorname{sen} \delta'''$, ossia $r''' \operatorname{sen} (\zeta''' - A''' D'' + \delta''') = R''' \operatorname{sen} \delta'''$, la quale unita alla precedente sarà valevole a determinare le incognite r''', ζ'''.

Del pari se dai punti C', C'' conduconsi due archi perpendicolari sopra il circolo $A''' D'$, ponendo $C' D'' = \zeta'$, avremo per determinare r', ζ' le due seguenti equazioni

$$r' \operatorname{sen} \zeta' = \frac{n'' r''}{n'} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'}{\operatorname{sen} \varepsilon''} \operatorname{sen} (z + A'' D' - \delta'');$$

$$r' \operatorname{sen} (\zeta' - A' D'' + \delta') = R' \operatorname{sen} \delta'.$$

Tanto queste equazioni che le due precedenti comodamente risolvonsi in virtù delle seguenti formule, delle quali facilmente scorgesi la verità qualora si ricavino da esse i valori di $r' \operatorname{sen} \zeta'$, $r' \cos \zeta'$, $r''' \operatorname{sen} \zeta'''$, $r''' \cos \zeta'''$,

$$(15)\quad k' = \frac{R' \operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen} (A' D'' - \delta')}; \qquad (16)\quad \lambda' = \frac{\cos (A' D'' - \delta')}{R' \operatorname{sen} \delta'};$$

$$(17)\quad k''' = \frac{R''' \operatorname{sen} \delta'''}{\operatorname{sen}(A''' D'' - \delta''')}; \qquad (18)\quad \lambda''' = \frac{\cos(A''' D'' - \delta''')}{R''' \operatorname{sen} \delta'''}.$$

Ponendo inoltre per brevità $p' = \frac{n'' r''}{n'} \frac{\operatorname{sen} \iota'}{\operatorname{sen} \iota''} \operatorname{sen}(z + A'' D' - \delta'')$; $p''' = \frac{n'' r''}{n'''} \frac{\operatorname{sen} \iota'''}{\operatorname{sen} \iota''} \operatorname{sen}(z + A'' D''' - \delta'')$, avremo per determinare r', ζ', r''', ζ'''

$$\left.\begin{array}{ll} r' \operatorname{sen} \zeta' = p' & r''' \operatorname{sen} \zeta''' = p''' \\ r' \cos \zeta' = k' (\lambda' p' - 1) & r''' \cos \zeta''' = k''' (\lambda''' p''' - 1) \end{array}\right\} \text{(L)}$$

dove gli archi ζ', ζ''' dovranno in modo determinarsi che risultino r', r''' positivi.

Quanto ai valori di $\frac{n'' r''}{n'}$, $\frac{n'' r''}{n'''}$ che entrano in p', p''', agevolmente si determinano per le quantità P, Q. In fatti se si combinano a dovere le equazioni $r'' = \frac{R'' \operatorname{sen} \delta''}{\operatorname{sen} z}$, $P = \frac{n'''}{n'}$ con l'equazione (G) otterremo . . . $\frac{n'' r''}{n'} = \frac{(a + P) R'' \operatorname{sen} \delta''}{b \operatorname{sen}(z - \sigma)}$; $\frac{n'' r''}{n'''} = \frac{1}{P} \frac{n'' r''}{n'}$ . . . (M)

Trovati i valori di $C' D'' = \zeta'$, $C''' D'' = \zeta'''$, e conoscendosi in oltre l'angolo $D'' = \iota''$, la risoluzione del triangolo $C' D'' C'''$ darà gli angoli C', C''' ed il lato $C' C''' = 2f'''$. Potrebbero ora dai triangoli $C' D''' C''$, $C'' D' C'''$ ottenersi i lati $C' C'' = 2f$, $C'' C''' = 2f'$, ma più facilmente si calcolano colle seguenti equazioni

$$\operatorname{sen} 2f' = \frac{n'''}{n'' r''} r''' \operatorname{sen} 2f'''; \quad \operatorname{sen} 2f'' = r' \operatorname{sen} 2f''' \frac{n'}{n'' r''} \quad . . . \text{(N)}$$

e se diverrà $2f''' = 2f + 2f''$ si avrà una riprova dell'operazione.

359. Quando in virtù dei precetti precedenti siensi con ogni cura calcolati i valori di r', r'', r''', $2f$, $2f'$, $2f''$, s'incominci un doppio calcolo degli elementi dell'orbita col mezzo delle formule dei §§ 343-347, adoperando 1.° le quantità r', r'', $2f$, θ'; 2.° le altre r', r''', $2f''$, θ'', e si proceda fino alla quantità nelle tavole indicata per y, la quale nel 1.° sistema corrisponderà al nostro h'', nel 2.° ad h' del § 353. A questo punto calcoleremo i valori di P, Q, che da principio abbiamo assunto, come noti, e chiamando P', Q' questi valori corrispondenti agli assunti valori P, Q, avremo per le equazioni (B)

$$P' = \frac{h' \theta'}{h''' \theta''}; \qquad Q' = \frac{r'' r'' \theta' \theta'}{r' r''' h' h''' \cos f' \cos f'' \cos f'''}.$$

Perchè gli assunti valori di P, Q sieno i veri, dovremo avere $P' = P$, $Q' = Q$. Se ciò non accade, ritenendo fermo il valore di Q, si alteri di una picciola quantità il valore di P, e si riprincipj da capo l'ope-

Digitized by Google

razione, che si dovrà condurre fino allo stesso punto. Quindi ripresa la prima ipotesi sul valore di P, si alteri alcun poco il valore di Q, e si spinga avanti l'operazione fino allo stesso punto. Si avranno così in tre diverse ipotesi i valori di P, Q, dalle quali facilmente si potrebbero ottenere i veri valori col metodo che per simile circostanza si esporrà trattando della correzione delle orbite delle comete.

Sebbene questo processo sia spedito, tuttavia riesce più pronto e più uniforme il seguente. Ottenuti i valori di P', Q', come sopra si è indicato, saranno questi al vero molto più prossimi degli assunti, cioè di $P = \frac{\theta'}{\theta''}$; $Q = \theta' \theta''$. Perciò assumendo per valori al vero prossimi gli ottenuti P', Q', si riprincipj col loro mezzo una nuova operazione, e sieno P'', Q'' i nuovi valori di P e Q, che saranno per somministrare. Se sarà $P' = P''$, $Q' = Q''$ l'operazione sarà al suo termine. In caso diverso ripetuta con P'', Q'' l'operazione, si giungerà ad una nuova determinazione di P, Q, che rappresenteremo con P''', Q''', e la quale o si confonderà con l'altra P'', Q'', o da quella differirà pochissimo, sicchè dopo brevi ripetizioni otterransi i veri valori di P, Q. Se le quantità θ', θ'', θ''', ossia se i corrispondenti intervalli di tempo t', t'', t''' non sieno molto forti, con due od al più con tre di questi tentativi si perverrà alla cognizione dei veri valori di P e Q, e quindi ancora ai veri valori delle quantità r', r'', r''', $2f$, $2f''$, $2f'''$.

360. Allorchè avremo trovato r', r''', $2f'''$ col loro mezzo, per i precetti del § 346, si calcolino gli elementi dell'orbita ellittica, cioè il parametro, l'eccentricità, il semiasse maggiore, l'anomalia vera del pianeta nella prima osservazione, la sua anomalia media, ed il moto medio. Resterà a determinare l'inclinazione dell'orbita e la posizione del nodo ascendente Ω. Perciò la risoluzione del triangolo $C' D'' C'''$ avendo già dato l'angolo in C', ed il lato $C' D''$ essendo noto, nel triangolo $\Omega A' C'$ si conosceranno gli angoli C', $A' = 180 - \gamma'$, ed $A' C' = A' D'' - C' D''$; risolvendolo si otterranno $A' \Omega$, $C' \Omega$, e l'inclinazione $A' \Omega C'$. Dalla longitudine della terra nella prima osservazione, tolto $A' \Omega$, si avrà la longitudine del nodo, e dalla anomalia vera del pianeta corrispondente a C', togliendo l'arco $C' \Omega$ si avrà la distanza del perielio dal nodo, alla quale aggiungendo la longitudine del nodo, si formerà la longitudine del perielio. Se con questa si sommi l'anomalia media nella prima osservazione, si avrà per il tempo corrispondente ad essa la longitudine media, dalla quale in virtù del moto medio si dedurrà per un altro tempo qualunque preso ad origine dei tempi l'epoca dei moti medj.

361. *Scolio*. Qualora aspirare si voglia all'ultima precisione, con-

viene ridurre i luoghi osservati del pianeta ad una posizione fissa, per esempio all'equinozio medio della seconda osservazione, alla quale ridurransi eziandio i luoghi calcolati della terra, spogliandoli dalla precessione degli equinozj per l'intervallo di tempo fra le osservazioni. Di più si dovranno ridurre le longitudini e latitudini osservate al centro della terra collo spogliarle dall'effetto della paralasse e dell'aberrazione. L'una e l'altra correzione non può ottenersi se prima non si conoscano le distanze g', g'', g''', le quali si avranno con sufficiente precisione dalle equazioni (D), tostochè nella prima ipotesi siensi calcolati i valori di z, ζ', ζ'''. Queste correzioni alterano un poco i costanti preliminari, che dietro le equazioni precedenti in numeri arabici si calcolano coi dati delle osservazioni, ed obbligano a rifondere i calcoli da capo. Ma il signor Gauss con ingegnoso artificio evita questa fatica; noi qui non ne faremo parola, come anche non parleremo di certi casi speciali, nei quali questo metodo abbisogna di alcune modificazioni, giacchè il loro esame ci porterebbe troppo a lungo. Ci accontenteremo di riunire qui il quadro delle differenti formule che in questo metodo dovranno calcolarsi per ottenere con tre osservazioni l'orbita di un nuovo pianeta, indi per maggiore chiarezza riferiremo le tracce principali di un esempio numerico relativo al calcolo dell'orbita della cometa del 1826 dal signor capitano Biela scoperta nella costellazione della Balena.

362. 1.° *Denominazioni ed operazioni preliminari* (*Fig.* 8).

Longitudini della terra nelle tre osservazioni $= A'$, A'', A'''; longitudini corrispondenti del pianeta $= \alpha'$, α'', α'''; latitudini boreali $= \beta'$, β'', β'''; intervalli di tempo fra la prima e seconda, seconda e terza, prima e terza osservazione $= t'$, t'', t'''; gli stessi moltiplicati per k (il cui logar. è $= 8{,}2355814$) $= \theta'$, θ'', θ'''; gli archi $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ presi fra 0° e 180° $= \delta'$, δ'', δ'''; le loro inclinazioni all'eclittica dalla parte d'oriente $= \gamma'$, γ'', γ'''; le inclinazioni del secondo sul primo, terzo sul primo, terzo sul secondo valutate dalla stessa parte, ossia gli angoli D''', D'', D' sieno $= \iota'''$, ι'', ι'. Distanze della terra dal Sole $= R'$, R'', R'''; del pianeta dal Sole $= r'$, r'', r'''; distanze accorciate del pianeta dalla terra $= \rho'$, ρ'', ρ'''; distanze assolute $= g'$, g'', g'''. Sieno in oltre $C'C'' = 2f'$, $C''C''' = 2f''$, $C'C''' = 2f'''$, $C''B'' = z$, $C'''D'' = \zeta'''$, $C'D'' = \zeta'$, e pongasi $n' = r''r'''$ sen $2f''$, $n'' = r'r'''$ sen $2f'''$, $n''' = r'r''$ sen $2f'$.

Dovremo calcolare le seguenti formule come preliminari all'operazione . . . (1) $\tang \gamma = \dfrac{\tang \beta}{\sen(\alpha - A)}$; (2) $\tang \delta = \dfrac{\tang(\alpha - A)}{\cos \gamma}$, le quali si applicheranno alle tre osservazioni.

Per risolvere il triangolo $A'D'''A''$, calcoleremo le seguenti formule:

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\iota'''\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A'D'''+A''D'')=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A''-A')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')\\
\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\iota'''\cos\tfrac{1}{2}(A'D'''+A''D'')=\cos\tfrac{1}{2}(A''-A')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma')\\
\cos\tfrac{1}{2}\iota'''\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A'D'''-A''D'')=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A''-A')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')\\
\cos\tfrac{1}{2}\iota'''\cos\tfrac{1}{2}(A'D'''-A''D'')=\cos\tfrac{1}{2}(A''-A')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma')
\end{array}\right\}\quad(3)$$

Simili equazioni valeranno per gli altri due $A'D''A'''$, $A''D'A'''$. Da queste otterransi gli elementi cercati cogli stessi precetti che al § 21 abbiamo dichiarati per le equazioni (B) del § 20 . . . (4)

$$\operatorname{tg}(\delta''-\sigma)=\frac{\operatorname{tg}\beta'\operatorname{sen}(\alpha'''-A'')-\operatorname{tg}\beta'''\operatorname{sen}(\alpha'-A'')}{\cos\gamma''[\operatorname{tg}\beta'\cos(\alpha'''-A'')-\operatorname{tg}\beta'''\cos(\alpha'-A'')]+\operatorname{sen}\gamma''\operatorname{sen}(\alpha'''-\alpha')},$$

la quale porgerà $\sigma=b\,B''$. In seguito pongasi

$$\left.\begin{array}{l}
a=\dfrac{R'\operatorname{sen}\delta'\operatorname{sen}(A'''D''-\delta''')}{R'''\operatorname{sen}\delta'''\operatorname{sen}(A'D''-\delta')};\quad b=\dfrac{R''\operatorname{sen}\delta''\operatorname{sen}(A'''D'-\delta''')}{R'''\operatorname{sen}\delta'''\operatorname{sen}(A''D'-\delta''+\sigma)};\\
c=\dfrac{1}{2R'''^3\operatorname{sen}^3\delta''\operatorname{sen}\sigma};
\end{array}\right\}\quad(5)$$

ove è da osservarsi che il costante b si può calcolare eziandio per riprova del calcolo dalla seguente equazione

$$b=a\,\frac{R''\operatorname{sen}\delta''\operatorname{sen}(A'D'''-\delta'')}{R'\operatorname{sen}\delta'\operatorname{sen}(A''D'''-\delta''+\sigma)}\quad\ldots\quad(5)'$$

(6) $d=\left(\dfrac{b}{\cos\sigma}-a\right):\left(\dfrac{b}{\cos\sigma}-1\right);\quad e=\operatorname{tang}\sigma:\left(\dfrac{b}{\cos\sigma}-1\right);$

(7) $k'=\dfrac{R'\operatorname{sen}\delta'}{\operatorname{sen}(A'D''-\delta')};\quad \lambda'=\dfrac{\cos(A'D''-\delta')}{R'\operatorname{sen}\delta'};$

(8) $k'''=\dfrac{R'''\operatorname{sen}\delta'''}{\operatorname{sen}(A'''D''-\delta''')};\quad \lambda'''=\dfrac{\cos(A'''D''-\delta''')}{R'''\operatorname{sen}\delta'''}.$

2.° *Operazioni dipendenti dalle continue approssimazioni.*

(I) $P=\dfrac{h'\theta'}{h'''\theta''};\qquad Q=\dfrac{r''r''\theta'\theta''}{r'r'''h'h'''\cos f'\cos f''\cos f'''};$

(II) $\operatorname{tang}\omega=\dfrac{e(P+a)}{P+d};\qquad$ (III) $c\,Q\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}^4 z=\operatorname{sen}(z-\omega-\sigma),$

dalla quale in ogni approssimazione deducasi colle false posizioni z, e si escludano i valori negativi, i positivi maggiori di δ'', e quello che molto a δ'' avvicinasi.

(IV) $r''=\dfrac{R''\operatorname{sen}\delta''}{\operatorname{sen}z};\quad \dfrac{n''r''}{n'}=\dfrac{(a+P)R''\operatorname{sen}\delta''}{b\operatorname{sen}(z-\sigma)};\quad \dfrac{n''r''}{n'''}=\dfrac{1}{P}\,\dfrac{n''r''}{n'};$

Digitized by Google

$$(V)\quad \begin{cases} p' = \dfrac{n'' r''}{n'} \dfrac{\operatorname{sen} \iota'}{\operatorname{sen} \iota''} \operatorname{sen}(z + A'' D' - \delta'') ; \\ p''' = \dfrac{n'' r''}{n'''} \dfrac{\operatorname{sen} \iota'''}{\operatorname{sen} \iota''} \operatorname{sen}(z + A'' D''' - \delta'') ; \end{cases}$$

$$(VI)\quad \begin{cases} r' \operatorname{sen} \zeta' = p' & r''' \operatorname{sen} \zeta''' = p''' \\ r' \cos \zeta' = k'(\lambda' p' - 1) & r''' \cos \zeta''' = k'''(\lambda''' p''' - 1) . \end{cases}$$

Avendo determinato r', r''', ζ', ζ''', si otterrà f''' dalla risoluzione del triangolo $C' D'' C'''$, da cui ritenute le precedenti denominazioni, e ponendo in oltre l'angolo in $C' = u'$, l'angolo in $C''' = 180 - u'''$, avremo

$$(VII)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} f''' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u''' + u') = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \iota'' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta''') \\ \operatorname{sen} f''' \cos \tfrac{1}{2}(u''' + u') = \cos \tfrac{1}{2} \iota'' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta''') \\ \cos f''' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u''' - u') = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \iota'' \cos \tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta''') \\ \cos f''' \cos \tfrac{1}{2}(u''' - u') = \cos \tfrac{1}{2} \iota'' \cos \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta''') ; \end{cases}$$

$$(VIII)\quad \operatorname{sen} 2 f' = \frac{n'''}{n'' r''} r''' \operatorname{sen} 2 f''' ; \quad \operatorname{sen} 2 f'' = \frac{n'}{n'' r''} r' \operatorname{sen} 2 f''' .$$

Avendo coi precetti del § 359 dedotto dalle precedenti equazioni i veri valori di P, Q, r', r'', f''', u', u''' ec. si determinino gli elementi tutti dell'orbita mediante r', r''', f''', θ''' dei §§ 343-347. Si procederà poi alla risoluzione del triangolo $\Omega A' C'$, in cui $A' C' = A' D'' - \zeta'$, l'angolo in $A' = 180° - \gamma'$, in $C' = u'$. Ponendo adunque $\Omega C' = g'$, $\Omega A' = h'$, l'angolo in $\Omega = i$, avremo g', h', i dalle seguenti equazioni

$$(IX)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(g' + h') = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A' D'' - \zeta') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\gamma' + u') \\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(g' + h') = \cos \tfrac{1}{2}(A' D'' - \zeta') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\gamma' - u') \\ \cos \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(g' - h') = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A' D'' - \zeta') \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' + u') \\ \cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(g' - h') = \cos \tfrac{1}{2}(A' D'' - \zeta') \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' - u') . \end{cases}$$

Trovati g', h', i, sarà i l'inclinazione dell'orbita all'eclittica. Rappresentisi per Ω la longitudine del nodo ascendente, avremo $\Omega = A' - h'$. Per ultimo sia v' l'anomalia vera del pianeta nella prima osservazione, M' la corrispondente anomalia media, π la longitudine del perielio. Sarà $\pi = g' + \Omega - v'$, e la longitudine media corrispondente alla prima osservazione $= M' + \pi$, donde poi formerassi l'epoca dei moti medj per un altro tempo qualunque preso ad origine.

363. *Esempio numerico.* Sia proposto di rintracciare l'orbita ellittica della cometa (74), la quale nella sua apparizione del 1826 non potè rappresentarsi con un'orbita parabolica, e venne in seguito dai signori Clausen e Gambart riconosciuta per identica a quella osservata negli anni 1772, 1806, e di cui attendesi il ritorno nel 1832. Sceglieremo perciò le tre seguenti osservazioni; la prima del 9 Marzo

1826 fatta dal signor Gambart in Marsiglia; la seconda e la terza da me fatte all' equatoriale di questo Osservatorio nei giorni 25 Marzo e 9 di Aprile dello stesso anno. Le osservazioni originali si troveranno in una mia Memoria letta all' Accademia di Padova nel vol. III dei suoi nuovi Atti che si sta imprimendo, dalla quale prenderò gli elementi del calcolo.

Passando pertanto dalle AR e declinazioni ivi riferite alle corrispondenti longitudini e latitudini, liberandole dall' effetto dell' aberrazione, della nutazione e della paralasse, e prendendo i luoghi della terra dalle tavole del signor Carlini, dopo di avere riferito le longitudini sì della cometa, che della terra all' equinozio medio del 9 Marzo, ed espresso il tempo medio in giorni dal principio dell' anno 1826, formansi i seguenti valori fondamentali per il calcolo dell' orbita:

Tempo medio	longit. di cometa $= \alpha$	latit. di cometa $= \beta$	longit. di Terra $= A$	log. dist. di Ter. da Sole $=$ log. R
68^{s},35849	38° 41′ 21″,8	— 4° 29′ 2″,1	168° 44′ 45″,0	9,9972827
84,32315	57 6 9,7	— 8 52 45,0	184 36 22,2	9,9992029
98,35869	75 35 12,9	—12 25 34,3	198 25 59,8	0,0009862

Quindi si formerà $t' = 15^{s},96466$; $t'' = 14^{s},03554$; $t''' = 30^{s},00020$, e però $\log \theta' = 9,4387410$; $\log \theta'' = 9,3827796$; $\log \theta''' = 9,7127056$.

Il calcolo delle equazioni (1), (2) darà γ, δ, dove per seguire una norma fissa, e togliere ogni indeterminazione si prenderà γ per modo che δ risulti positivo, e minore di 180. Si troverà così

$\delta' = 129\ 54'\ 33'',0$; $\delta'' = 126°\ 58'\ 42'',1$; $\delta''' = 121°\ 59'\ 2'',3$

$\gamma' = 185\ 50\ 59,1$; $\gamma'' = 191\ 8\ 25,4$; $\gamma''' = 194\ 41\ 46,3$.

Le equazioni (3), e le loro derivate daranno

$A'\ D''' = 328°\ 7'\ 2'',8$; $A''\ D''' = 343°\ 49'\ 20'',8$; $i''' = 5°\ 44'\ 15'',52$

$A'\ D'' = 313\ 50\ 25,15$; $A'''\ D'' = 343\ 9\ 21,45$; $i'' = 10\ 1\ 55,8$

$A''\ D' = 312\ 6\ 43,47$; $A'''\ D' = 325\ 35\ 56,09$; $i' = 4\ 41\ 17,1$.

L' equazione (4) dà $\delta'' - \sigma = 127°\ 35'\ 7'',86$; però $\sigma = -0°,36'\ 25,76$.

Le equazioni (5) danno $\log a = 0,9350124 +$; $a = +8,610182$;

$\log b = 0,6776967 +$; $\log c = 1,9687758 -$.

L' equazione (5)′ darà $\log b = 0,6777053 +$. Non concordando questo esattamente col valore precedente per qualche picciola inesattezza delle parti proporzionali, ho ritenuto nelle cose seguenti il suo medio valore, cioè $\log b = 0,6777010 +$.

In seguito dietro le equazioni (6), (7), (8) si troverà

$\log d = 0,0099966 -$; $d = -1,023285$; $\log e = 7,4498557 -$; $\log k' = 1,0460570 -$; $\log k''' = 0,1110445 -$; $\log \lambda' = 0,1168635 -$; $\log \lambda''' = 9,9471606 -$.

Ultimato così il calcolo dei costanti, procedesi alla prima ipotesi, in cui ponesi $P = \frac{\theta'}{\theta''}$; $Q = \theta' \theta''$. Dietro le equazioni (I) . . . (VI) si troverà $\log P = 0{,}0559614+$; $P = 1{,}137526$; $\log Q = 8{,}8215206+$; $\log \operatorname{tang} \omega = 9{,}3809363-$; $\omega = -13^\circ 31' 2'',84$; $\omega + \sigma = -14^\circ 7' 28'',60$. $\log c\, Q \operatorname{sen} \omega = 0{,}1590324+$; $1{,}442223 \operatorname{sen}^4 z = \operatorname{sen}(z + 14^\circ 7' 28'',60)$, la quale risoluta con le false posizioni darà $z = 65^\circ 19' 0'',9$;

$\log r'' = 9{,}9432872+$; $\log \frac{n'' r''}{n'} = 0{,}2524031+$; $\log \frac{n'' r''}{n'''} = 0{,}1964415$;

$\log p' = \log r' \operatorname{sen} \zeta' = 9{,}8979543-$; $\log p'' = \log r''' \operatorname{sen} \zeta''' = 9{,}9454189-$
$\log r' \cos \zeta' = 9{,}5864866-$; $\log r''' \cos \zeta''' = 9{,}4517438+$;

donde si trarrà $\zeta' = 243^\circ 58' 54'',4$; $\zeta''' = 287^\circ 47' 23'',0$;
$\log r' = 9{,}9443615+$; $\log r''' = 9{,}9666979+$.

Dopo ciò, le equazioni (VII), (VIII) daranno

$u' = 193^\circ 35' 50'',1$; $u''' = 192^\circ 48' 58'',9$; $f''' = 22^\circ 26' 24'',76$;
$2f' = 24\ 33\ 59,8$; $2f'' = 20\ 18\ 50,3$.

La loro somma dovrebbe uguagliare $2f'''$; superandola di $0'',6$, se n'è diviso la differenza metà per parte, e si è ritenuto

$$2f' = 24^\circ 33' 59'',5; \quad 2f'' = 20^\circ 18' 50'',0.$$

Dietro i valori precedenti s'incomincia un doppio calcolo degli elementi procedendo fino alla quantità indicata per y nella tavola III. Il primo sistema si appoggia ai valori di $\log r'$, $\log r''$, $2f'$, θ'; il secondo ai valori di $\log r''$, $\log r'''$, $2f''$, θ''; la quantità indicata per y sarà nel 1.° sistema $= h'''$; nel 2.° sistema $= h'$. Seguendo le tracce dell'esempio del § 347, si troverà

$$\log h''' = 0{,}0082518; \quad \log h' = 0{,}0058507.$$

Possiamo ora mediante i ritrovati valori di r', r'', r''', f', f'', f''' assegnare dietro le equazioni (I) per P e Q dei valori più esatti per procedere ad una seconda approssimazione. Avremo così i seguenti valori corretti

$$\log P = 0{,}0535603; \quad P = 1{,}131255; \quad \log Q = 8{,}8340479.$$

Questa seconda approssimazione spingesi avanti fino allo stesso punto della prima, e si otterranno così dei nuovi valori di P, Q, coi quali si tornerà a cominciare una terza approssimazione, e da questa si passerà ad una quarta, continuando finchè i valori di P e di Q, dai quali si parte, non differiscano da quelli ai quali si perviene. In questo nostro esempio la quarta approssimazione si avvicina sì fattamente al vero da renderne inutile una quinta, come si può scorgere dalla seguente tavoletta, nella quale per comodo di coloro che per utile esercizio vorranno ripetere i calcoli, si sono riuniti i risultamenti di queste successive approssimazioni.

	II. Approssim.	III. Approssim.	IV. Approssim.
$\log P =$	0,0535603 +	0,0537431 +	0,0537531 +
$\log Q =$	8,8340479 +	8,8335341 +	8,8335771 +
$-(\omega+\sigma) =$	+ 14° 52′ 10″,8	+ 14° 48′ 37″,0	+ 14° 48′ 48″,6
$c\,Q \operatorname{sen} \omega =$	+ 1,564597	+ 1,556370	+ 1,556873
$z =$	62° 43′ 52″,5	62° 53′ 19″,15	62° 52′ 44″,3
$\log r'' =$	9,9528381 +	9,9522251 +	9,9522628 +
$\log n'' r'' : n' =$	0,2614187 +	0,2608428 +	0,2608783 +
$\log n'' r'' : n''' =$	0,2078584 +	0,2070997 +	0,2071452 +
$\log r' \operatorname{sen} \zeta' =$	9,8995069 —	9,8994144 —	9,8994203 —
$\log r' \cos \zeta' =$	9,6305352 —	9,6280408 —	9,6281954 —
$\log r''' \operatorname{sen} \zeta''' =$	9,9605995 —	9,9596376 —	9,9596958 —
$\log r''' \cos \zeta''' =$	9,3928753 +	9,3969167 +	9,3966750 +
$\log r' =$	9,9547634 +	9,9541336 +	9,9541726 +
$\log r''' =$	9,9759411 +	9,9753243 +	9,9753615 +
$\zeta' =$	241° 42′ 22″,33	241° 50′ 17″,7	241° 49′ 48″,3
$\zeta''' =$	285 8 23,60	285 18 25,7	285 17 49,2
$u' =$	193 52 46,66	193 51 54,56	193 51 38,81
$u''' =$	192 38 22,78	192 38 51,28	192 38 49,37
$2f''' =$	44 30 22,24	44 32 28,28	44 32 21,2
$2f' =$	24 15 52,3	24 17 20,6	
$2f'' =$	20 14 29,9	20 15 7,7	
$\log h''' =$	0,0077072 +	0,0077403 +	
$\log h' =$	0,0054889 +	0,0055120 +	

Confrontando i numeri della quarta approssimazione con quelli della terza si scorgono sì poco differenti che tosto si comprende essere inutile il procedere ad una quinta. Nulla pertanto più resta che calcolare gli elementi dell'orbita ellittica che passa per l'estremità dei raggi vettori r', r''' comprendenti fra loro l'angolo $2f'''$ presi dalla IV approssimazione. Seguendo i precetti e le tracce dell'esempio riferito al § 347 si troverà $\log \gamma = 0,0268077$; $x = 0,00689749$; $g = 9° 31' 40'',56$; donde si formerà $\log a = 0,4697873$; $\log b = 0,3244940$; $\log e = \log \operatorname{sen} \varphi = 9,8441346$; $\varphi = 44° 18' 9'',7$. In seguito si troverà $E' = -5° 44' 44'',54$; $E''' = 13° 18' 36'',60$; $v' = -13° 35' 0'',7$; $v''' = 30° 57' 20'',5$; $z = -1° 44' 21'',67$; $z''' = 4° 5' 49'',52$. Dal semiasse maggiore si otterrà il log. del moto medio diurno siderale $= 2,8453256$; il moto medio diurno $= 700'',367$; e però la durata della rivoluzione siderale $= 1850^s,4$; i tempi impiegati a trascorrere le anomalie medie z', $z''' = -8^s,94055$; $= 21,05971$; quindi il passaggio al perielio dalla prima osservazione $= 77^s,29904$; dalla seconda $= 77^s,29898$, delle quali due determi-

nazioni prenderemo il medio. Per ultimo il calcolo delle equazioni (IX) darà per determinare la posizione del piano dell'orbita e del perielio $i = 13^\circ\ 15'\ 12'',1$; $g' = 205^\circ\ 0'\ 48'',7$; $h' = 276^\circ\ 20'\ 53'',5$; e gli elementi tutti risulteranno come segue:

pass. al perielio = $77^{\text{r}},29901$ dal pr. del 1826; T. m. in Padova;
log a = 0,4697873; log e = 9.8441346; log moto diur. = 2,8453256;
longitudine del nodo ascend. = $252^\circ\ 23'\ 51'',5$ } dall'equin. medio
del perielio = $110\ 59\ 40,9$ } del 9 Marzo.
inclinazione all'eclittica = $13\ 15\ 12,1$;
tempo della rivoluzione siderale = $1850^{\text{g}},4$.

Se ora per i tempi delle tre osservazioni fondamentali si calcola la posizione geocentrica della cometa dietro questi elementi si troveranno per ordine colle posizioni osservate le seguenti piccolissime differenze

longit. osserv. — longit. calcol. = $-0'',1$; $+0'',1$; $-0'',2$
latitud. osserv. — latitud. calcol. = $+0,0$; $+0,9$; $+0,1$.

Vogliamo tuttavia osservare, che non ostante un sì egregio accordo, i trovati elementi differiscono sensibilmente dai veri, sopra tutto per ciò che riguarda il tempo della rivoluzione, e non possono servire che come una prima approssimazione, che devesi correggere in seguito con osservazioni più remote. Ciò si deve ripetere dagli errori delle osservazioni, e sopra tutto dalle declinazioni che erano difficili a stimarsi con precisione per la estensione del nucleo; questi conducono a latitudini erronee, e siccome piccola è l'inclinazione, così hanno sugli elementi una grande influenza. Questo disgraziato accidente avverrà quasi sempre nei pianeti e nelle comete di piccola inclinazione, e per queste circostanze anche per una prima approssimazione è partito più sano appoggiare il calcolo degli elementi a quattro osservazioni, due delle quali siano complete. Ma lo sviluppo di questo metodo ci porterebbe troppo in lungo, e per esso rimandiamo all'opera di Gauss più volte citata (pag. 192 e seg.).

Metodo per determinare l'orbita di una nuova cometa.

364. Il metodo che abbiamo esposto per determinare l'orbita di un pianeta si può applicare (come abbiamo veduto nell'esempio precedente) alla ricerca dell'orbita delle comete, assumendo che esse descrivano orbite ellittiche molto allungate intorno al Sole. La grande eccentricità di queste ellissi non le rende visibili che nelle vicinanze del perielio, e perciò le loro osservazioni si possono il più delle volte rappresentare con una parabola, la quale nelle vicinanze del perielio quasi confondesi con l'orbita ellittica. In questa supposizione il cal-

colo degli elementi rendesi alquanto più semplice, e vista la sua importanza, esporremo fra i diversi metodi proposti dai più celebri Matematici quello immaginato dal signor Olbers valentissimo astronomo di Brema da esso reso pubblico in una pregevole operetta stampata a Weimar in tedesco nell'anno 1797 col titolo *Abhandlung über die leichteste, und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen*. Fondasi questo metodo sull'ipotesi che gl'intervalli di tempo fra le tre osservazioni non sieno molto grandi, e che il raggio vettore della media osservazione tagli la corda dell'arco fra la prima e terza osservazione dalla cometa descritto in parti proporzionali ai tempi intercetti fra la prima e seconda, fra la seconda e terza osservazione, la quale supposizione facilmente scorgesi coincidere con l'altra, che i settori parabolici compresi fra la prima e seconda osservazione, e fra la seconda e la terza si riguardino come triangoli rettilinei. In seguito, avendo determinato i primi prossimi elementi parabolici, dà le formule necessarie per rettificare l'errore dell'assunta ipotesi, propone i metodi più spediti per correggere con tre osservazioni molto fra loro distanti i ritrovati elementi, e compiesi l'opera colla tavola del moto parabolico costruita dal sig. Barker, e col registro delle comete fino a quell'epoca osservate e calcolate. Per servire alla brevità ricaveremo dalle cose precedenti la soluzione del signor Olbers, non cessando di raccomandare la lettura della citata opera, nella quale si contengono in oltre molte eccellenti riflessioni sui metodi diversi proposti per il calcolo primo di un'orbita parabolica.

365. Avendo pertanto scelto tre buone osservazioni, che non comprendano un intervallo di tempo soverchiamente grande (non maggiore d'ordinario di 15 in 20 giorni), e che sieno presso che equidistanti, si calcolino le longitudini e latitudini della cometa per ciascheduna osservazione dietro le AR e declinazioni direttamente osservate, come anche le longitudini ed i raggi vettori della terra dietro le tavole del Sole.

Sia per una qualunque delle tre osservazioni la longitudine della terra (ossia la longitudine del Sole $+ 180°$) $= A$, la distanza della terra dal Sole $= R$; la longitudine geocentrica della cometa $= \alpha$; la sua latitudine supposta boreale e positiva $= \beta$; la sua distanza dal centro della terra projettata nel piano dell'eclittica $= \rho$. La longitudine, la latitudine eliocentrica e la sua distanza dal Sole sieno rispettivamente indicate per l, λ, r, e stabiliscasi che queste quantità con un accento, con due, con tre sieno relative alla prima, seconda, terza osservazione.

Gl'intervalli di tempo fra la prima e seconda, fra la seconda e terza, fra la prima e terza osservazione sieno indicati da t', t'', t''';

e le corde corrispondenti a questi intervalli sieno c', c'', c'''. Sieno in oltre per una qualunque osservazione le coordinate eliocentriche della cometa rapporto al piano dell'eclittica x, y, z, mentre ξ, η, ζ sono le coordinate geocentriche corrispondenti; quelle della terra sieno rappresentate per X, Y, le quali denominazioni debbano intendersi applicate alla prima, seconda, terza osservazione, secondo che s'impiegheranno uno, due, tre accenti.

Ciò premesso, avremo, come nei §§ 242-348, le seguenti equazioni

$$\left.\begin{array}{ll} x = X + \xi, \text{ ovvero } & r\cos\lambda\cos l = \varrho\cos\alpha + R\cos A \\ y = Y + \eta \;\ldots\ldots & r\cos\lambda\,\mathrm{sen}\, l = \varrho\,\mathrm{sen}\,\alpha + R\,\mathrm{sen}\, A \\ z = \zeta \;\ldots\ldots\ldots & r\,\mathrm{sen}\,\lambda = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta \end{array}\right\} \text{(A)}$$

dalle quali conoscendo ϱ, facilmente si determinano l, λ, r. In seguito, sommando i quadrati delle equazioni (A), avremo

$$r^2 = R^2 + 2R\varrho\cos(\alpha - A) + \varrho^2\sec^2\beta \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

che darà r', r'', r''' coll'opportuna apposizione degli accenti.

Dalla Geometria analitica si ha l'equazione

$c'^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$, ossia

$c'^2 = r'^2 + r''^2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'')$ a motivo di

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Sostituendo ora i valori di x', x'', y', y'' ec. espressi per ϱ', α', ϱ'', α'' ec. dalle equazioni (A) si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} c'^2 = r'^2 + r''^2 - 2R'R''\cos(A'' - A') - 2R'\varrho''\cos(\alpha'' - A') \\ \quad - 2R''\varrho'\cos(\alpha' - A'') - 2\varrho'\varrho''\cos(\alpha'' - \alpha') - 2\varrho'\varrho''\,\mathrm{tang}\,\beta'\,\mathrm{tang}\,\beta'' \end{array}\right\} \text{(C)}$$

Quest'ultima equazione darà eziandio i valori di c''^2, c'''^2 con la permutazione delle quantità; così otterrassi c''^2 ponendo due accenti sopra quelle lettere che ne hanno uno solo, tre sopra quelle che ne hanno due, e si avrà c'''^2 ponendo semplicemente tre accenti in luogo di due.

Frattanto l'equazione (9) del § 332 porge le tre equazioni

$$\begin{array}{l} 6kt' = (r'' + r' + c')^{3/2} - (r'' + r' - c')^{3/2} \\ 6kt'' = (r''' + r'' + c'')^{3/2} - (r''' + r'' - c'')^{3/2} \\ 6kt''' = (r''' + r' + c''')^{3/2} - (r''' + r' - c''')^{3/2} \end{array}$$

nelle quali se introducansi i valori di r', r'', r''', c', c'', c''' si avranno tre equazioni fra le incognite ϱ', ϱ'', ϱ''', e però sarà possibile la loro determinazione. L'eliminazione però delle incognite in tanta generalità è impraticabile, e perciò convien rinunziare a questa strada. Frattanto è bene osservare che per determinare un'orbita parabolica abbiamo più equazioni del bisogno, poichè risulta dai §§ 331-332 essere l'orbita parabolica completamente determinata dalle sole quantità r', r''', c'''. D'altronde la posizione del piano in cui essa giace è pienamente determinata dal centro del Sole, e dai punti corrispondenti alla prima

e terza osservazione. Quindi se l'orbita dalla cometa descritta è realmente una parabola, devono i suoi elementi soddisfare eziandio alla seconda osservazione, e se ciò accaderà, sarà confermata l'ipotesi del moto parabolico.

366. Ritenuta l'ipotesi che t', t'' comprendano un picciolo numero di giorni, le equazioni (4), (5), (6) § 350 daranno con molta semplicità i rapporti delle distanze ρ', ρ'', ρ'''. Ma per le orbite paraboliche non avendosi bisogno che delle sole quantità r', r''', c''' contenenti ρ', ρ''', così basterà considerare l'equazione (5), da cui deducesi il rapporto di $\rho''' : \rho'$. Da questa equazione si ottiene

$$\rho''' = -\frac{(1, 2, \mathrm{II})}{(3, 2, \mathrm{II})}\frac{n'}{n'''}\rho' - \frac{(\mathrm{I}, 2, \mathrm{II})R'}{(3, 2, \mathrm{II})}\frac{n'}{n'''} - \frac{(\mathrm{III}, 2, \mathrm{II})}{(3, 2, \mathrm{II})}R''' \ldots (a)$$

che per semplicità scriveremo sotto la forma

$$\rho''' = G\frac{n'}{n'''}\rho' + H\frac{n'}{n'''} - F \ldots (b)$$

ove i coefficienti G, H, F facilmente si riducono a numeri coi dati delle osservazioni, e colle tavole solari, se come operazione preliminare si calcolino i simboli (1, 2, II), (I, 2, II) ec. che entrano nella loro composizione. Per il calcolo numerico di questi simboli, se pongasi la latitudine della terra $B = 0$, avremo le quattro seguenti equazioni (§ 349)

$$-(1, 2, \mathrm{II}) = \tang\beta' \operatorname{sen}(\alpha'' - A'') - \tang\beta'' \operatorname{sen}(\alpha' - A'') \quad . \quad (1)$$
$$(3, 2, \mathrm{II}) = \tang\beta'' \operatorname{sen}(\alpha''' - A'') - \tang\beta''' \operatorname{sen}(\alpha'' - A'') \quad . \quad (2)$$
$$-(\mathrm{I}, 2, \mathrm{II})R' = \tang\beta'' \operatorname{sen}(A'' - A')R' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$(\mathrm{III}, 2, \mathrm{II})R''' = \tang\beta'' \operatorname{sen}(A''' - A')R''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Il vero valore della frazione $\frac{n'}{n'''}$ è tuttavia incognito, ed

$= \frac{r''' \operatorname{sen}(v''' - v'')}{r' \operatorname{sen}(v'' - v')}$, $v''' - v''$, $v'' - v'$ essendo gli angoli compresi fra r'', r'''; r', r''' rappresentati da $2f''$, $2f'$. Se però in luogo di n', n''' sostituiscansi i loro valori prossimi dati al § 351, si avrà

$\frac{n'}{n'''} = \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{6\,r''^3}\right) = \frac{t''}{t'}$ primo valore prossimo, il quale sarà eziandio più esatto, se pongasi $t'' = t'$, cioè se l'osservazione intermedia si scelga precisamente nel mezzo dell'intervallo di tempo che separa le due estreme. Questa prima approssimazione equivale a considerare come triangoli rettilinei i settori parabolici compresi fra la prima e seconda osservazione, e fra la seconda e la terza, ed uguali respettivamente ad n''', n', giacchè i predetti settori parabolici soltanto stanno fra loro : : t' : t''; in conseguenza, giusta lo spirito degl'infini-

tamente piccioli, anche i settori ellittici dal raggio vettore della terra percorsi negli stessi intervalli di tempo devono riguardarsi come triangoli rettilinei, e respettivamente rappresentati da $\frac{1}{2} R' R'' \operatorname{sen}(A'' - A')$; $\frac{1}{2} R'' R''' \operatorname{sen}(A''' - A'')$. Quindi la legge delle aree proporzionali ai tempi darà

$$R' R'' \operatorname{sen}(A'' - A') : R'' R''' \operatorname{sen}(A''' - A'') :: t' : t'' :: n''' : n',$$

e però in virtù di questa proporzione gli ultimi due termini dell'equazione (a) si distruggono, ed essa semplicemente riducesi alla forma $\rho''' = M \rho'$, ponendo per brevità

$$M = \frac{\operatorname{tang} \beta' \operatorname{sen}(\alpha'' - A'') - \operatorname{tang} \beta'' \operatorname{sen}(\alpha' - A'')}{\operatorname{tang} \beta'' \operatorname{sen}(\alpha''' - A'') - \operatorname{tang} \beta''' \operatorname{sen}(\alpha'' - A'')} \frac{t''}{t'} = G \frac{t''}{t'} \quad . \quad (5)$$

Allorquando siasi calcolato M in numeri, se le equazioni (B), (C) si applichino alla prima e terza osservazione, ed in luogo di ρ''' scrivasi $M \rho'$, otterremo per calcolare r', r''', c''' le seguenti

$$\left.\begin{aligned} r'^2 &= R'^2 + 2 R' \cos(\alpha' - A') \rho' + \sec^2 \beta' \rho'^2 \\ r'''^2 &= R'''^2 + 2 M R''' \cos(\alpha''' - A''') \rho' + M^2 \sec^2 \beta''' \rho'^2 \\ c'''^2 &= r'^2 + r'''^2 - 2 R' R''' \cos(A''' - A') - 2 M R' \cos(\alpha''' - A') \rho' \\ &\quad - 2 R''' \cos(\alpha' - A''') \rho' - 2 M \cos(\alpha''' - \alpha') \rho'^2 - 2 M \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \beta''' \rho'^2 \end{aligned}\right\} (D)$$

Se ora fingiamo sostituiti i valori di r', r''', c''' espressi per ρ' nell'equazione

$$t''' = \frac{(r''' + r' + c''')^{3/2} - (r''' + r' - c''')^{3/2}}{6 k} \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

questa ordinata conterrebbe la sola incognita ρ', dalla quale dipende la ricerca degli elementi dell'orbita. La risoluzione diretta di questa equazione supera le attuali forze dell'analisi, e però speditamente otterrassi il valore di ρ' col mezzo delle false posizioni, procedendo come segue.

1.° Riducansi a numeri con ogni cura il valore di M, ed i coefficienti di ρ^2, ρ', ρ'^2 nelle equazioni (D). 2.° Si ponga $\rho' = 1$, ed in questa ipotesi si calcolino r', r''', c''', che sostituiti nel secondo membro dell'equazione (E) daranno un valore τ, il quale confrontato con t''' farà tosto conoscere se debbasi ρ' aumentare o diminuire. *Brevi calamo* si stabiliscano due nuove ipotesi per trovare fra quali limiti cada ρ', ed indi con un calcolo più rigoroso si andranno ristringendo questi limiti finchè trovisi quel valore di ρ' che soddisfa alle equazioni (D), (E). Nel calcolo dell'equazione (E), qualora t''' sia espresso in giorni, il denominatore $6 k$ rimane costante, e si ha
comp. log $6 k = 0{,}9862673$.

367. Dopo di aver trovato i veri valori numerici di ρ', r', r''', c''', si avrà $\rho''' = M \rho'$, ed in seguito facilissimo riuscirà il calcolo degli elementi parabolici dietro le formule riferite al § 331. La via che qui indichiamo sembra la più spedita per il calcolo numerico; si calcoli

da bel principio l'angolo g compreso fra r', r''' colla equazione $\text{sen}\,\frac{1}{2}\,g = \sqrt{\left(\frac{(c''' + r''' - r')(c''' - r''' + r')}{2\sqrt{(r'\,r''')}}\right)}$; quindi si avrà la distanza perielia q, e l'anomalia vera v' nella prima osservazione dal calcolo delle equazioni (1), (2) § 331, nelle quali si cangerà r in r'; r' in r'''. Trovato v', l'anomalia v''' nella terza osservazione sarà $= v' + g$.

In seguito mediante la tavola I del moto parabolico si calcolerà il tempo decorso dopo il passaggio per il perielio dietro i valori di q e di v' già ottenuti, il qual tempo se dicasi t, sarà dato eziandio dall'equazione $t = (r' + 2\,q)\sqrt{(r' - q)} : 3\,k\sqrt{\frac{1}{2}}$ del § 332, nella quale si ha c. log. $3\,k\sqrt{\frac{1}{2}} = 1{,}437812\,3$. Se la cometa ha passato il perielio, si toglierà t dal tempo della prima osservazione, e ad essa si aggiungerà, se non lo ha ancora oltrepassato, e così si formerà l'istante del passaggio al perielio, che per riscontro delle operazioni si ricaverà in ambedue i modi. In modo del tutto simile ricaverassi dall'anomalia v''' e da q il passaggio al perielio, il quale, se coinciderà col precedente, servirà di riscontro al calcolo.

368. Allorquando l'operazione sia stata condotta fino a questo punto, si potrà correggere l'errore del rapporto $t'' : t'$ impiegato in luogo di $n' : n'''$, se pure ciò giudicherassi opportuno, e dovrà intraprendersi questa correzione se gl'intervalli t'', t' sieno considerabili, ed il moto elioceptrico sia pur esso abbastanza grande. In questa vista avendo già dalle operazioni precedenti ottenuto le anomalie vere v', v''', si calcoli eziandio l'anomalia v'' per l'osservazione di mezzo. Si avrà allora con più precisione $\frac{n'}{n'''} = \frac{r'''\,\text{sen}\,(v''' - v'')}{r'\,\text{sen}\,(v'' - v')}$, che ridotto a numeri, e sostituito nell'equazione (b) del § 366, la farà cambiare in un'altra della forma $\rho''' = P\,\rho' + Q$, $P\,Q$ essendo dati in numeri, e Q molto picciolo. Siccome ρ' è già prossimamente conosciuto, se indichiamo per (ρ) il valore di ρ' trovato colla prima approssimazione, potremo in luogo della precedente equazione impiegare la seguente

$$\rho''' = \left(P + \frac{Q}{(\rho)}\right)\rho' = M'\,\rho' \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Ottenuto in tal guisa il rapporto M' più esatto di quello precedentemente impiegato, si calcoleranno di nuovo per la prima e per la terza osservazione i coefficienti delle equazioni (D), ed indi si proseguirà al calcolo degli elementi parabolici dietro i precetti superiori. Se fra questi ed i precedenti si trovasse una notabile differenza, si riprincipierà una nuova approssimazione che si condurrà a fine allo stesso modo; raramente accaderà di dover progredire alla terza approssimazione, mentre sarà bastante il più delle volte la seconda. Pri-

ma però d'intraprendere la seconda correzione sarà bene applicare alle osservazioni della cometa le picciole correzioni dipendenti dall'aberrazione della luce e dalla paralasse, per il calcolo delle quali potremo adoperare le sue distanze dalla terra ottenute colla prima approssimazione. Se poi queste picciole correzioni voglionsi trascurare, o se già siano state fino da principio impiegate dietro qualche stima della distanza della cometa dalla terra, non sarà necessario rifondere per intero il calcolo delle equazioni (D) nella seconda, e nelle altre successive approssimazioni. Pongasi in fatti $\frac{M'}{M} = K$, cioè $M' = MK$, ed è palese che avremo i coefficienti di ρ', ρ'' corretti, se coi logaritmi dei diversi loro termini ottenuti nella prima approssimazione sommeremo $\log K$, ovvero $2 \log K$, secondo che essi contenevano M, ovvero M'. Formati così i logaritmi parziali corretti, i numeri corrispondenti opportunamente impiegati dietro l'enunziato delle formule daranno sull'istante le equazioni corrette.

369. Rimane ora a determinare la posizione del piano dell'orbita, per il che innanzi tutto fa duopo calcolare le longitudini e latitudini eliocentriche della cometa nella prima e terza osservazione. A tale oggetto si riprendano le equazioni (A) del § 365; se si sommi la prima moltiplicata per $-\operatorname{sen}\alpha$ con la seconda moltiplicata per $\cos\alpha$; indi la prima moltiplicata per $\cos\alpha$ con la seconda moltiplicata per $\operatorname{sen}\alpha$, si cangeranno nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} r\cos\lambda \operatorname{sen}(l-\alpha) &= R\operatorname{sen}(A-\alpha) \\ r\cos\lambda\cos(l-\alpha) &= R\cos(A-\alpha)+\rho \\ r\operatorname{sen}\lambda &= \rho\operatorname{tang}\beta \end{aligned}\right\} \quad (F)$$

le quali colla opportuna applicazione degli apici daranno le quantità l, λ, r per la prima e terza osservazione. In fatti calcolati i logaritmi dei secondi membri, si avrà (togliendo il logaritmo della seconda da quello della prima) $\log\operatorname{tang}(l-\alpha)$, da cui si formerà l'angolo $l-\alpha$, e quindi l. In seguito si formerà dalle prime due $\log r\cos\lambda$, che combinato con $\log r\operatorname{sen}\lambda$ farà conoscere le due quantità r, λ. Se i valori di r così ottenuti nella prima e terza osservazione coincideranno con quelli già ricavati dalla risoluzione delle equazioni (D), avremo un'esimia conferma delle fatte operazioni.

Se indichiamo per Ω la longitudine del nodo ascendente, per i l'inclinazione, la Trigonometria sferica darà (come nel § 233)

$$\operatorname{tang}\lambda' = \operatorname{tang} i \operatorname{sen}(l'-\Omega); \quad \operatorname{tang}\lambda''' = \operatorname{tang} i \operatorname{sen}(l'''-\Omega);$$

dalle quali si ricaveranno le incognite Ω ed i. Divisa in fatti la loro somma per la loro differenza, con facili riduzioni si trae

$$\operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(l'+l''')-\Omega\right] = \frac{\operatorname{sen}(\lambda'''+\lambda')}{\operatorname{sen}(\lambda'''-\lambda')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l'''-l') \quad . \quad . \quad (G)$$

donde si formerà $\Omega = \frac{1}{2}(l''' + l') - [\frac{1}{2}(l' + l''') - \Omega]$. In seguito si avrà . . . $\tang i = \frac{\tang \lambda'}{\sen (l' - \Omega)} = \frac{\tang \lambda'''}{\sen (l''' - \Omega)}$ . . . (H)

Per ultimo, chiamando P la distanza della cometa dal nodo, in una qualunque osservazione avremo (§ 232)

$$\cos P = \cos \lambda \cos (l - \Omega), \text{ ovvero } \tang P = \frac{\tang (l - \Omega)}{\cos i} \quad . \quad (L)$$

e qualora siensi calcolati P', P''', dovrà essere $P''' - P' = g$, lo che servirà di nuova riprova. La longitudine del perielio sarà in fine $= P' + \Omega - v'$, ovvero $P''' + \Omega - v'''$.

Trovati così gli elementi tutti dell'orbita parabolica, questa per la natura stessa della riferita soluzione deve esattamente soddisfare alla prima ed alla terza osservazione, fatta astrazione dalle picciole differenze introdotte per sì lunga serie di operazioni dalla inesattezza delle parti proporzionali per la imperfezione delle tavole. Raramente però succederà, che sì bene soddisfaccia all'osservazione di mezzo, sì perchè in quella vengonsi a rifondere gli errori delle osservazioni, spesso non sì leggeri nelle comete, sì perchè può non essere consentanea al vero l'assunta ipotesi dell'orbita parabolica. Si calcolerà pertanto la posizione geocentrica della cometa pel tempo dell'osservazione media nella ritrovata orbita, e dalla grandezza delle differenze con l'osservata argomenteremo, se piuttosto ci dobbiamo rivolgere alla ricerca di un'orbita ellittica, o ad una correzione degli elementi parabolici impiegando osservazioni più lontane che abbraccino tutto il tempo per cui fu visibile dalla terra coi metodi che fra poco esporremo.

370. *Scolio*. Suppongono le regole ed i precetti superiori che la cometa si aggiri intorno al Sole nella costante direzione dall'occidente all'oriente, siccome nei pianeti accade, e che quindi le longitudini eliocentriche vadano col tempo crescendo; ed in vero osservando le consuete regole dei segni nelle funzioni trigonometriche, e facendo crescere le inclinazioni all'eclittica da 0° fino a 180° si possono sempre impiegare gli esposti precetti, lo che riesce più comodo e più uniforme. Siccome però molti Astronomi ritengono per la inclinazione all'eclittica sempre un angolo $< 90°$, così è opportuno indicare quali cambiamenti si esigano in questo sistema tanto negli elementi, come nel calcolo delle posizioni geocentriche. Distinguonsi pertanto le comete in comete di *moto diretto*, e di *moto retrogrado;* quando col mezzo delle equazioni (F) siansi calcolati l', l''', la cometa avrà *moto diretto* se sia $l''' > l'$; *moto retrogrado* se $l''' < l'$; nell'uno e nell'altro caso l'equazione (G) darà allo stesso modo la posizione del nodo ascendente; le equazioni (H) daranno tang i positiva o negativa secondo che la cometa è diretta o retrograda. Se prendesi nel secon-

Digitized by Google

do caso per i l'angolo ottuso, le regole dei segni daranno i residui elementi, ed allora si dovranno impiegare pel calcolo delle posizioni geocentriche le regole del moto diretto. Ma se per i prendesi l'angolo acuto che gli corrisponde, si dovranno riguardare come negative le quantità P, v, e perciò la longitudine del perielio sarà $\Omega + v - P$. Per assegnare poi la posizione geocentrica degli elementi ad un tempo determinato dopo il passaggio per il perielio, si toglierà l'anomalia vera calcolata dalla tavola I dalla longitudine del perielio; si avrà la longitudine nell'orbita, da cui togliendo la longitudine del nodo, si avrà l'argomento di latitudine. Col suo mezzo si calcolerà la riduzione all'ecclittica riguardando cos i come positivo, e la latitudine eliocentrica, fingendo sen i come negativo.

371. Per più chiara intelligenza delle esposte dottrine riferiremo un esempio numerico, intraprendendo il calcolo dell'orbita della prima cometa del 1824 riferita nel nostro Catalogo al n.° 126, e prendendo a base tre osservazioni da me fatte all'equatoriale dell'Osservatorio di Padova. Le osservazioni originali in un cogli elementi da esse dedotti e corretti sulla loro totalità si trovano nel secondo volume dei nuovi *Atti dell'Accademia di Padova* in una mia Memoria, dalla quale prendo gli elementi del calcolo. Avvertirò che le osservazioni sono state liberate dall'effetto della paralasse dell'aberrazione, e ridotte all'equinozio medio. I luoghi della terra sono stati calcolati sulle tavole del signor Carlini.

1824	Tem. med. in Padova	Longit. di cometa $= \alpha$	Longit. di terra $= A$	Latit. di cometa $= \beta$	Log. dist. di ter. da Sol. $=$ log. R
Gennajo	$5^{g},75885$	244° 3′ 44″	104° 55′ 16″	43° 6′ 12″	9,9926843
	18 ,76518	206 1 8	118 10 3	66 40 29	9,9929974
	30 ,49422	120 49 4	130 5 26	57 30 45	9,9936378

Si formeranno quindi i seguenti valori

$t' = 13,00633$; $t'' = 11,72904$; $t''' = 24,73537$; $\log t'' : t' = 9,9551077$;

$\alpha' - A' = 139° 8' 28''$; $A'' - A' = 13° 14' 47''$; $\alpha' - A''' = 113° 58' 18''$; $\alpha' - A'' = 125° 53' 41''$
$\alpha'' - A'' = 87\ 51\ 5$; $A''' - A'' = 11\ 55\ 23$; $\alpha''' - A' = 15\ 53\ 48$; $\alpha''' - A'' = 2\ 39\ 11$
$\alpha''' - A''' = -9\ 16\ 22$; $A''' - A' = 25\ 10\ 10$; $\alpha''' - \alpha' = -123\ 14\ 40$;

Il calcolo delle equazioni (1), (2), (3), (4) § 366 darà

$\log -(1, 2, \mathrm{II}) = 9,9747437 -$ $\log -(\mathrm{I}, 2, \mathrm{II})\, R' = 9,7181136 +$
$\log\ (3, 2, \mathrm{II}) = 0,1649771 -$ $\log -(\mathrm{III}, 2, \mathrm{II})\, R''' = 9,6740939 -$

donde si formerà

$\log G = 9,8097666 +$; $\log H = 9,5531365 -$; $\log - F = 9,5091168 +$.

I. Approssimazione, in cui si pone $n' : n''' :: t'' : t'$.

Dall' equazione $M = G \frac{t''}{t'}$ si avrà $\log M = 9,7648743 +$; indi il calcolo delle equazioni (D) darà

$$r'^2 = 0,966871 - 1,487379\,\varrho' + 1,875894\,\varrho'^2$$
$$r'''^2 = 0,971126 + 1,131956\,\varrho' + 1,173851\,\varrho'^2$$
$$c'''^2 = 0,184009 - 0,655332\,\varrho' + 1,977178\,\varrho'^2$$

e si dovrà trovare tal valore di ϱ', che soddisfaccia all' equazione

$$\frac{(r' + r''' + c''')^{3/2}}{6\,k} - \frac{(r' + r''' - c''')^{3/2}}{6\,k} = t''' = 24^s,73537.$$

Con pochi e grossolani tentativi si trova ϱ' prossimamente $= 0,488$. Laonde stabilisco le due seguenti ipotesi

	ϱ'	$= 0,4875$	. . .	$= 0,4885$
donde trovo . .	r'	$= 0,829212$	. . .	$= 0,829417$
	r'''	$= 1,342359$	. . .	$= 1,343207$
	c'''	$= 0,578293$	. . .	$= 0,579394$
	t'''	$= 24,69565$	. . .	$= 24,74846$.

Confrontando ora gl' intervalli di tempo calcolati con quello osservato, si troverà l' errore della prima ipotesi $= -0^s,03972$, della seconda $= +0,01309$; essendo la differenza dei tempi nelle due ipotesi $= 0,05281$. Facendo la proporzione $0^s,05281 : 0,001 :: 0^s,03972 : x$, il quarto termine rappresenterà la correzione della distanza nella prima ipotesi; sarà così $x = 0,0007521$; e perciò $\varrho' = 0,4882521$. Questo valore in fatti darà

$r' = 0,829367$; $r''' = 1,342996$; $c''' = 0,579121$, $t''' = 24^s,73536$, che differisce di una sola unità nell' ultima cifra dall' osservato. Frattanto essendo $r''' > r'$, è palese che la cometa ha già passato il perielio. Procederemo al calcolo dell' angolo g § 367, e si troverà $\frac{1}{2} g = 7^\circ\, 16'\, 52'',5$; in seguito le equazioni (1), (2) del § 331 daranno $v' = 116^\circ\, 49'\, 11'',4$; $\log q = 0,3571422$; $v''' = v' + g = 131^\circ\, 22'\, 56'',4$.

La tavola I del moto parabolico darà il tempo opportuno a trascorrere le anomalie vere v', v'''; coi precetti che in essa si espongono si otterrà da v' $27^s,30740$, da v''' $52^s,04271$; quindi il tempo del passaggio pel perielio sarà $= 343^s,45145$ dalla prima; $= 343^s,45151$ dalla seconda osservazione contato dal principio del 1823.

II. Approssimazione in cui si ha $\frac{n'}{n'''} = \frac{r''' \operatorname{sen}(v''' - v'')}{r' \operatorname{sen}(v'' - v')}$.

Colla tavola I del moto parabolico calcolando v'' per la seconda osservazione, si troverà $v'' = 126^\circ\, 9'\, 53'',3$; perciò $v''' - v'' = 5^\circ\, 16\, 3'',1$; $v'' - v' = 9^\circ\, 20'\, 41'',9$; $\log n' : n''' = 9,9616721$, ed il calcolo dell' equazione (c) § 368 darà $\log P = 9,7714387$; $\log Q = 7,6294096 -$,

donde si formerà $\log M' = 9,7649775$, e $\log K = 0,0001032$. Con questi dati si potranno correggere le equazioni (D) dietro i superiori precetti; si otterrà così

$$r'^2 = 0,966871 - 1,487379\ \varrho' + 1,875894\ \varrho'^2$$
$$r'''^2 = 0,971126 + 1,132225\ \varrho' + 1,174409\ \varrho'^2$$
$$c'''^2 = 0,184009 - 0,655325\ \varrho' + 1,977482\ \varrho'$$

operando come superiormente, con pochi tentativi si troverà $\varrho' = 0,4881890$; da questo valore di ϱ' si ottiene $r' = 0,829354$; $r''' = 1,343042$; $c''' = 0,579117$; $t''' = 24^s,73540$ con differenza trascurabile con l'osservato. In seguito si troverà $g = 14^\circ\ 33'\ 20'',5$; $v' = 116^\circ\ 51'\ 0'',4$; $v''' = v' + g = 131^\circ\ 24'\ 20'',9$; $\log q = 9,3567612$. Col mezzo della prima anomalia si troverà il passaggio al perielio $= 343,45616$, e della seconda $343^s,45632$; prendendo il medio dei due risultamenti, si avrà il passaggio al perielio 343,45624 dal principio del 1823.

Resta a determinare la posizione del piano dell'orbita e la longitudine del perielio. A tale oggetto, mediante le equazioni F (§ 369), si calcolino per la prima e per la terza osservazione le longitudini e latitudini eliocentriche, si otterrà così

$$l' = 132^\circ\ 23'\ 59'',0;\quad \lambda' = 33^\circ\ 25'\ 44'',0;\quad \log r' = 9,9187402;$$
$$l''' = 128\ \ 1\ \ 8\ ,6;\quad \lambda''' = 19\ \ 24\ \ 24\ ,9;\quad \log r''' = 0,1280894.$$

I valori di r', r''' corrispondenti a questi logaritmi concordano esattamente coi superiori, e confermano le operazioni; essendo poi $l''' < l'$, la cometa avrà moto retrogrado. Noi riterremo per il calcolo della posizione dell'orbita, e per il calcolo delle posizioni geocentriche i precetti del moto diretto, attribuendo ad essa un'inclinazione all'eclittica dalla parte di oriente $> 90^\circ$. In tal caso si dovrà procedere nel modo seguente.

Per il calcolo dell'equazione (G) si troverà

$$\tfrac{1}{2}(l''' + l') = 130^\circ\ 12'\ 33'',8;\quad \tfrac{1}{2}(l''' - l') = -\ \ 2^\circ\ 11'\ 25'',2;$$
$$\lambda''' + \lambda' = 52\ \ 50\ \ 8\ ,9;\quad \lambda''' - \lambda' = -\ 14\ \ 1\ \ 19\ ,1;$$

con questi numeri l'equazione (G) darà $\tfrac{1}{2}(l''' + l') - \Omega = 187^\circ\ 10'\ 11'',6$, il quale tolto da $\tfrac{1}{2}(l''' + l')$ darà $\Omega = 303^\circ\ 2'\ 22'',2$.

Trovato Ω, le due equazioni (H) si accordano a dare $\log \operatorname{tang} i = 0,6083810$—; però $i = 103^\circ\ 50'\ 28'',6$. Per ultimo le equazioni (L) daranno $P' = 145^\circ\ 25'\ 56'',9$; $P''' = 159^\circ\ 59'\ 17'',8$, donde si ottiene $g = P''' - P' = 14^\circ\ 33'\ 20'',9$, che supera di $0'',4$ il valore di g superiormente trovato per le irregolarità delle parti proporzionali. Dietro ciò, sarà la longitudine del perigeo $= \Omega + P' - v'$, ovvero $= \Omega + P''' - v'''$, che posta $= \pi$, diviene $\pi = 331^\circ\ 37'\ 18'',7$; ovvero $= 331^\circ\ 37'\ 19'',1$. Prendendo il medio di questi due risultamenti, e riunendo i trovati elementi, avremo i seguenti numeri.

Digitized by Google

Passaggio al perielio, tempo medio in Padova $= 343^{\circ},45624$ dal principio del 1823; $\log q = 9,3567612$; distanza per. $q = 0,227385$.

longitudine del perielio $= 331^{\circ}\ 37'\ 18'',9$
longitudine del nodo . $= 303\ \ 2\ \ 22,2$
inclinazione . . . . $= 103\ \ 50\ \ 28',6$.

Se poi si vorranno ritenere per il calcolo delle posizioni geocentriche i precetti ordinarj del moto retrogrado, si dovranno cangiare l'inclinazione e la longitudine del perielio nei due seguenti

$$i = 76^{\circ}\ 9'\ 31'',4$$
$$\pi = \Omega + v - P = 274\ \ 27\ \ 25,6.$$

Scolio. Gli elementi dell'orbita da noi ottenuti, sebbene fondati sopra tre osservazioni non molto fra loro lontane, sono pochissimo differenti da quelli altre volte da me ottenuti, e da quelli del sig. Enke riferiti nel Catalogo delle comete in fine del primo volume. Rappresentano assai bene le osservazioni estreme, allontanandosi da quella di mezzo perchè in essa vengonsi a rifondere gli errori delle osservazioni e della ipotesi parabolica. In fatti il confronto delle posizioni calcolate con le osservate dà per ordine le seguenti differenze

longit. osserv. — longit. calcol. $= -0'',8$; $-113'',6$; $-1'',0$;
latit. osserv. — latit. calcol. $= +0,4$; $+45,2$; $-0,8$;

donde apparisce, che abbisognano ancora di una leggera correzione. Come poi debba intraprendersi il calcolo di questa correzione apparirà dall'articolo seguente.

Metodi per correggere con tre o più osservazioni molto fra loro distanti gli elementi dell'orbita parabolica di una cometa.

1.° *Metodo, in cui s' inducono delle picciole variazioni nella posizione del piano dell'orbita già presso a poco conosciuta.*

372. Abbiamo già dimostrato al § 230, che supposta conosciuta la posizione del piano dell'orbita di un pianeta o di una cometa, si possono con facilità determinare le sue posizioni eliocentriche, date essendone le longitudini e latitudini geocentriche osservate. Se cambiasi in quel § g in ϱ, A in $180^{\circ} + A$, ω in Ω, per ridursi alle denominazioni attuali, avremo $\varrho = \dfrac{R \operatorname{tang} i \operatorname{sen}(A - \Omega)}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang} i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega)}$, la qual formula si renderà comoda al calcolo logaritmico introducendo un angolo ausiliario. Così ponendo $\operatorname{tang}\phi = \dfrac{\operatorname{tang} i \cos(\alpha - \Omega)}{\operatorname{tang}\beta}$ . . . (1)

si ha $\varrho = \dfrac{R \operatorname{sen}(A - \Omega) \operatorname{sen}\phi}{\cos(\alpha - \Omega + \phi)}$ . . . (2)

Ottenuto ϱ da questa equazione, il calcolo delle equazioni (F), (L)

(§ 369) farà conoscere in modo facile e spedito le quantità l, λ, r, P per ogni osservazione.

Ciò premesso, ecco a che cosa riducesi questo primo metodo. Si scelgano tre buone osservazioni il più che sia possibile fra loro distanti, ed avendovi applicato l'aberrazione, nutazione e paralasse, si riducano le longitudini osservate ad una stessa posizione dell'equinozio, per esempio a quella della media osservazione, alla quale pure riducansi le longitudini del Sole date dalle tavole coll'applicarvi opportunamente la precessione degli equinozj. Indi si calcolino per ciascuna osservazione le quantità r, P nelle seguenti tre ipotesi: 1.° assumendo per Ω ed i loro valori prossimi dei precedenti elementi; 2.° facendo variare Ω di una picciola quantità p, per esempio di 20′, e ritenendo il primo valore di i; 3.° facendo variare i di un'altra picciola quantità q, ritenendo Ω come nella prima ipotesi. Sieno in qualunque delle tre ipotesi r', r'', r''', P', P'', P''' i valori di r, P. Saranno $P''-P'$, $P'''-P'$ gli angoli compresi fra r' ed r'', r' ed r''', che nomineremo g', g'''. Avendo calcolato con precisione queste quantità, col mezzo dell'equazione (8) (§ 332), o più speditamente col mezzo della tavola del signor Burkardt ivi citata si calcolino gl'intervalli di tempo fra la prima e seconda osservazione, che porremo τ, $\tau+m$, $\tau+n$, ed anche fra la prima e terza osservazione, e sieno τ', $\tau'+m'$, $\tau'+n'$. Sieno ora t', t''' gl'intervalli di tempo osservati, ed $\Omega+px$, $i+qy$ i veri valori di Ω ed i, cosicchè x, y sieno le quantità per cui devonsi moltiplicare le variazioni p, q arbitrariamente date ad Ω, i. Riguardando t', t''' come funzioni di $\Omega+px$, $i+qy$ avremo per determinare x, y le due equazioni

$$t'=\tau+mx+ny\,;\qquad t'''=\tau'+m'x+n'y\quad .\ .\ .\ (3)$$

In fatti pongasi $\tau=\varphi(\Omega, i)$; dando ad Ω, i delle piccole variazioni p, q tali che sia permesso trascurarne le potenze superiori alla prima, avremo per il teorema di Taylor $\tau+m=\tau+\left(\frac{d\tau}{d\Omega}\right)p$;

$$\tau+n=\tau+\left(\frac{d\tau}{di}\right)q\,;\quad \text{cioè}\quad m=\left(\frac{d\tau}{d\Omega}\right)p,\quad n=\left(\frac{d\tau}{di}\right)q.$$

Se ora in virtù delle correzioni px, qy; τ si converte in t', avremo

$$t'=\varphi(\Omega+px, i+qy)=\tau+\left(\frac{d\tau}{d\Omega}\right)px+\left(\frac{d\tau}{di}\right)qy=\tau+mx+qy.$$

Con un modo analogo si ricaverà la seconda delle equazioni (3).

Trovati x, y e quindi i veri valori di Ω ed i, si calcoleranno i veri valori di r', r''', g''', col mezzo dei quali si potranno ottenere i veri valori di v', q dalle equazioni (1), (2) del § 331, ed in seguito il passaggio al perielio, e la posizione del piano dell'orbita si ricave-

ranno coi precetti superiori (§§ 367, 369). Non sarà poi necessario calcolare da capo i valori di r', r''', g''', poichè se nelle tre sopra descritte ipotesi una qualunque quantità B corrisponde ai tre stati B, $B+f$, $B+h$, il suo vero valore sarà rappresentato da $B+fx+hy$.

2.° *Metodo, in cui si fanno variare di picciole quantità le distanze accorciate già presso a poco conosciute in virtù dei precedenti elementi.*

373. Il metodo precedente cessa di potersi applicare se sia $i=0$, o molto picciolo, o se la cometa in una delle tre osservazioni sia verso la sua congiunzione, e molto vicina ai nodi. Il seguente potrà con vantaggio sempre adoperarsi. Si preparino, come sopra, tre buone osservazioni, e molto fra loro distanti; per l'epoca della prima e terza osservazione si deducano dai dati elementi i valori prossimi di ϱ, che supporremo rappresentati da ϱ', ϱ''', e sottoposti a picciole modificazioni. In seguito si calcolino, come sopra, mediante le equazioni (F), (L) del § 369 le quantità r', l', λ', P', r''', l''', λ''', P''', e pongasi $P'''-P'=g$ nelle seguenti tre ipotesi

	I. ipotesi	II. ipotesi	III. ipotesi	valori cercati
valori supposti di ϱ'	ϱ'	$\varrho'+p$	ϱ'	$\varrho'+px$
di ϱ'''	ϱ'''	ϱ'''	$\varrho'''+q$	$\varrho'''+qy$

ove supponiamo che p, q rappresentino picciole quantità, per esempio la centesima parte del totale. Ottenuti r', r''', g, si prosegua al calcolo degl'intervalli di tempo fra la prima e terza osservazione, che rappresenteremo per τ, $\tau+m$, $\tau+n$. Alle distanze vere $\varrho'+px$, $\varrho'''+qy$ corrisponderà adunque l'intervallo $\tau+mx+ny$, il quale dovendo essere uguale all'osservato t''' darà fra x ed y l'equazione

$$t'''=\tau+mx+ny \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Per ottenere una seconda equazione fra x ed y, si compia in virtù dei precetti precedentemente esposti il calcolo degli elementi parabolici in ciascheduna ipotesi; si avranno così tre sistemi di elementi, ed in ciascheduno di essi si calcoli la longitudine, ovvero la latitudine geocentrica per il dato tempo della seconda osservazione, trascegliendo quella che è sottoposta a maggiori variazioni diurne. Si calcolino per esempio le longitudini, e sieno rappresentate rispettivamente da a, $a+l$, $a+s$, mentre quella data dall'osservazione sia $=\alpha''$. Avrà luogo la seguente equazione

$$\alpha''=a+lx+sy \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ottenuti i valori di x, y facilmente si ricaveranno i veri elementi dell'orbita della cometa dai tre sistemi già calcolati nelle sopraddescritte ipotesi, poichè se i tre stati di uno qualunque si rappresentano per B, $B+f$, $B+g$, il suo vero valore sarà dato da $B+fx+gy$.

374. 3.° *Metodo*. Si scelgano tutte le buone osservazioni che si possono ottenere, e spogliate dall'aberrazione e paralasse si riducano all'equinozio medio, o ad una qualche posizione dell'equinozio medio per una data osservazione. Quindi si calcolino in ogni osservazione la longitudine geocentrica l' e la latitudine λ' nei dati prossimi elementi, e dietro i precetti del § 335 si ricavino i valori di dl', $d\lambda'$ ordinati per le indeterminate dq, $d\tau$, $d\pi$, di, $d\omega$. Se ora sieno α, β i valori di l', λ' osservati, avremo per ogni osservazione le equazioni di condizione $\alpha = l' + dl'$, $\beta = \lambda' + d\lambda'$, le quali combinate insieme col metodo dei minimi quadrati daranno le correzioni cercate per modo che gli errori delle osservazioni abbiano nei risultamenti la minore influenza.

Egli è pressochè inutile avvertire che questi metodi suppongono le correzioni cercate sì picciole da rendere nulla l'influenza delle loro potenze seconde trascurate. Se esse riuscissero considerabili, si dovrebbero riguardare i nuovi elementi come al vero più vicini dei precedenti, e partendo da essi intraprendere una seconda correzione ec.

Scolio. Oltre i tre riferiti metodi, altri pure ne usano gli Astronomi fondati sopra picciole variazioni date alle longitudini eliocentriche, od alle distanze della cometa dal Sole, od anche alla distanza periclia, ed al tempo del passaggio pel periclio. Quest'ultimo metodo è molto spedito, se si seguano i precetti proposti dal signor La-Place nella sua celebre opera intitolata: *Theorie du mouvement, et de la figure elliptique des planetes*. Paris 1784, ed anche nel volume I della sua Meccanica celeste, alle quali noi rimandiamo i nostri lettori.

Del calcolo dell'orbita ellittica delle comete dietro le osservazioni fatte dal centro della terra.

375. Se ora con un'orbita parabolica non si possa rappresentare con sufficiente esattezza il complesso delle buone osservazioni di una cometa per tutto il tempo della sua apparizione, o se nel catalogo delle comete osservate e calcolate nei tempi trascorsi, se ne incontri una, i cui elementi parabolici molto si avvicinino a quelli ottenuti dalle attuali osservazioni, si può con verosimiglianza di buona riuscita indagarne l'orbita ellittica, e tentare di assegnarne il periodo. Quest'ultima circostanza si è per la prima volta presentata all'Halley, il quale osservò una grande somiglianza fra le orbite delle comete apparse negli anni 1531, 1607, 1682 in modo da indurlo nel sospetto della loro identità, e nel 1705 con somma riserva ne annunziò il ritorno per il 1758, il quale poi si verificò nel successivo anno 1759. Fu appunto nel 1758 che Clairaut intraprese il molesto calcolo delle

perturbazioni, alle quali dovette essere sottoposta per l'azione di Giove e di Saturno, mostrando doversi da queste estranee attrazioni ripetere la cagione del suo ritardo, ed ebbe la soddisfazione di vedere pienamente avverata la congettura di Halley, e verificati i risultamenti dei suoi calcoli.

Oltre la cometa di Halley (che è la (15) del catalogo) a molte altre hanno assegnato gli Astronomi delle orbite ellittiche; nel che furono in particolare modo benemeriti il P. Asclepi, Lexell, Burkardt, Gauss, Enke, Nicolai, Gambardt ed altri; i loro periodi però rimangono incertissimi per la influenza grandissima che in essi esercitano sì gli errori delle osservazioni, che le estranee attrazioni, e per la recente data a cui risale l'esattezza delle osservazioni dovuta all'odierno perfezionamento degli stromenti, sicchè poco si può contare sul risultamento di questi penosi calcoli, e conviene confessare, che molto ci resta ancora a desiderare intorno alla loro teoria. Toccherà alle future generazioni di dicifrare i paradossi osservati sul moto di questi astri singolari, che sembrano omai potersi ridurre a due classi, cioè di lungo e di mediocre periodo. Sono da riporsi in quest'ultima categoria la prima cometa del 1770 (n.° 71 del catalogo), le cui osservazioni da Lexell e da Burkardt non si poterono rappresentare che in un'ellisse di circa cinque anni e mezzo, e che tuttavia non è più ricomparsa; forse perchè essendo passata molto vicina a Giove, la sua potente attrazione ha indotto dei fortissimi cambiamenti nei parametri della sua orbita, e ce ne ha fatto perdere la traccia; e due altre comete scoperte in questi ultimi tempi, la prima scoperta da Pons verso la fine del 1818, la cui teoria è per intero dovuta al chiarissimo sig. Enke, il quale dimostrò avvolgersi in un'ellisse di circa 1202 giorni, ed essere identica alle comete osservate negli anni 1786, 1795, 1805; ricomparsa e con somma fedeltà rappresentata dalla sua teoria negli anni 1822, 1825, 1828; la seconda fu scoperta nel 1826 dal sig. capitano Biela, in seguito da Clausen, dallo stesso discopritore, da Olbers e da Gambardt riconosciuta per identica a quelle osservate nel 1806 e nel 1772 riferita sotto il n.° (74). Se si eccettuino quelle che abbiamo fin qui nominato, l'osservazione non ha per anco verificato il ritorno delle altre, delle quali è stata calcolata l'orbita ellittica, ond'è che importantissime si rendono per il perfezionamento dell'Astronomia le osservazioni delle comete, dalle quali sole sembra doversi attendere la soluzione di molte gravi questioni sul sistema del mondo, ed in particolare sull'esistenza di un etere sottilissimo disseminato per lo spazio sospettato già da Newton e ad Enke con ogni verosimiglianza additato da un acceleramento sensibile nel moto medio della sua cometa di 1202 giorni, corrispondente al n.° (86).

Siccome una completa teoria intorno al calcolo dell'orbita ellittica

delle comete richiederebbe molti esempii numerici, e troppo ci allontanerebbe dai limiti che ci siamo prefissi, così procureremo d'indicare nelle cose seguenti il più brevemente che ci sarà possibile la via da tenersi nelle diverse circostanze per il calcolo degli elementi ellittici, quando sulla totalità delle osservazioni siasi già calcolata un'orbita che presso a poco le rappresenta, e per procedere con ordine dovremo distinguere tre casi: 1.° quello cioè di un'orbita pochissimo differente dalla parabola; 2.° quello di un'orbita notabilmente dalla parabola differente; 3.° quello di un'orbita ellittica, della quale conoscasi l'asse maggiore, e per conseguenza anche il moto medio diurno.

Caso I. Calcolo delle orbite ellittiche od iperboliche pochissimo dalla parabola differenti.

376. Quando sia stata già calcolata sopra tre prime osservazioni l'orbita di una cometa nell'ipotesi parabolica, e siasi tentato di correggerne gli elementi sopra quattro o cinque buone osservazioni distribuite per tutta la durata della sua apparizione se gli elementi così corretti si allontanino pochissimo dalle posizioni osservate, ed in modo che le differenze vadano variando con una certa regolarità si dovrà concluderne, che l'ipotesi del moto parabolico quantunque prossima al vero, non è però valevole a rappresentare con ogni esattezza il moto della cometa, ed in tale circostanza si dovrà ricorrere al calcolo di un'orbita ellittica, od anche iperbolica. In tal caso i veri elementi differiranno pochissimo dai parabolici, e supponendo tali differenze sì picciole, che le loro potenze superiori alla prima siano trascurabili, si potranno determinare comodamente col mezzo di alcune equazioni lineari di condizione, che si stabiliranno nel modo seguente.

Si scelgano quattro o cinque buone osservazioni le più remote che sianvi in quella apparizione, e distribuite per tutta l'orbita, si correggano dalla aberrazione, nutazione e paralasse; e le longitudini così corrette riducansi ad una posizione fissa dell'equinozio, alla quale si riducano pure le longitudini del Sole calcolate dietro le migliori tavole. Siano, come nelle cose precedenti, gli elementi parabolici ottenuti rappresentati dai seguenti simboli; il passaggio al perielio espresso in giorni valutati dal principio dell'anno, o da una data epoca fissa qualunque $= \tau$; la distanza perielia $= q$; la longitudine del perielio $= \pi$; la longitudine del nodo $= \omega$; l'inclinazione all'eccettica $= i$, che fingeremo contata da 0° fino a 180°. Supponiamo che i veri elementi siano rappresentati per $\tau + d\tau$, $q + dq$, $\pi + d\pi$, $\omega + d\omega$, $i + di$, e l'eccentricità dell'orbita (la quale nella parabola è $= 1$) sia $= 1 - \alpha$, dovendosi riguardare α come una piccolissima frazione. Siano l', λ' la longitudine e latitudine geocentrica in una qualunque delle assunte osservazioni, calcolate dietro gli elementi parabolici τ, q, π, ω, i; mentre le stesse quantità date dall'osservazione siano α', β'.

Dovranno avere luogo le seguenti equazioni di condizione

$$\alpha' = l' + A\,d\tau + B\,dq + C\,d\pi + F\,d\omega + G\,di + H\alpha \quad (1)$$
$$\beta' = \lambda' + a\,d\tau + b\,dq + c\,d\pi + f\,d\omega + g\,di + h\alpha \quad (2)$$

nelle quali si dovranno calcolare diligentemente i coefficienti A, a, B, b ec. Quanto ai primi cinque si calcoleranno comodamente con tavole a cinque cifre dietro i precetti esposti ai §§ 335, 336, ove insegnammo a trovare la variazione della longitudine e latitudine geocentrica per picciole variazioni date agli elementi dell' orbita parabolica, e si potrebbe dietro le formule generali del primo volume assegnare eziandio la espressione generale di H e di h. Ma per le orbite molto eccentriche questi due coefficienti si determineranno più comodamente col metodo seguente, che si potrà adoprare stimandolo opportuno eziandio per gli altri. Si dia ad α un piccolissimo valore arbitrario, per es. 0,02; ritenendo gli altri elementi il loro primitivo valore, si verrà a cambiare così l' orbita parabolica in una ellisse ad essa molto vicina della stessa distanza perielia, nella quale si calcolino per il dato tempo la longitudine e la latitudine geocentrica, che fingeremo rappresentate per l'', λ''. Sarà $l'' = l' + H(0,02)$; $\beta' = \lambda' + h(0,02)$; donde si otterrà $H = \frac{l'' - l'}{0,02}$; $h = \frac{\lambda'' - \lambda'}{0,02}$.

Ottenuti i valori dei coefficienti A, B, C ec. nelle equazioni (1), (2) per tutte le osservazioni, si risolveranno col metodo dei minimi quadrati, e sommate col loro segno le trovate correzioni ai rispettivi valori degli elementi parabolici, avremo gli elementi dell' orbita della cometa; la quale sarà un' ellisse se α risulta positivo; un' iperbola se è negativo.

Detto a il semiasse maggiore dell' orbita, quando essa è un' ellisse, T il tempo della rivoluzione periodica, si avrà (§ 323)

$$a = \frac{q}{1-e} = \frac{q}{\alpha} \qquad T = \frac{2\pi}{k}\,a^{3:2} = \frac{2\pi}{k}\left(\frac{q}{\alpha}\right)^{3:2};$$

donde chiaramente apparisce, che un picciolo errore in α produce enormi differenze nel tempo della rivoluzione periodica, e che perciò non si può sperare di ottenere questo elemento con qualche precisione nelle comete molto vicine alla parabola dietro le osservazioni di una sola apparizione.

Caso II. Calcolo delle orbite ellittiche notabilmente diverse dalla parabola.

377. Se non si possono con un' orbita parabolica rappresentare entro discreti limiti le osservazioni di una cometa, se le differenze fra l' orbita parabolica determinata con qualche primo tentativo, e le posizioni osservate vadano crescendo con rapidità, e si dovrà concludere che questa si allontana notabilmente dal vero, ed in allora si ricor-

rerà al calcolo di un' orbita ellittica direttamente col metodo di Gauss da noi sopra riferito, ed illustrato con un esempio desunto appunto da una cometa di questa categoria. Accaderà di raro che gli elementi così ottenuti non abbisognino di forti correzioni, perchè gli errori delle osservazioni esercitano in essi una pericolosa influenza, e siccome d'ordinario le latitudini nelle osservazioni di questi astri informi riescono sempre più incerte delle longitudini, così a queste piuttosto appoggeremo la correzione dei medesimi nel seguente metodo, il quale avrà il vantaggio di potersi inoltre applicare a quei pianeti ed a quelle comete, delle quali mediocre risulta l'inclinazione all'eclittica.

Si scelgano quattro osservazioni distribuite per tutta la durata dell'apparizioni; dalle AR e declinazioni osservate si deducano le longitudini e latitudini, alle quali si applichino le correzioni dipendenti dalla aberrazione della luce, dalla paralasse, dalla nutazione, e si riducano ad una determinata posizione dell'equinozio medio. Basterà avere le latitudini osservate in due sole osservazioni, per es. nelle due osservazioni estreme, e nelle due intermedie le sole longitudini; per tutte quattro poi si preparino colle migliori tavole i luoghi del Sole. Siccome gli elementi ellittici ottenuti per una prima approssimazione non molto discorderanno dal vero, si calcolino col loro mezzo le distanze accorciate della cometa dalla terra nella prima e quarta osservazione, e si chiamino ϱ', ϱ''; saranno queste prossime alle vere, e fingiamo che le loro correzioni siano tanto piccole da poterne trascurare le potenze seconda, terza ec. Per determinare queste picciole correzioni daremo alle distanze prossime ϱ', ϱ'' dei piccioli incrementi p, q uguali ad un cinquantesimo o ad un centesimo del loro valore totale, formando le tre seguenti ipotesi.

	I. ipotesi	II. ipotesi	III. ipotesi	valori cercati
valori assunti di ϱ'	ϱ'	$\varrho' + p$	ϱ'	$\varrho' + px$
di ϱ''	ϱ''	ϱ''	$\varrho'' + q$	$\varrho'' + qy$

In ciascheduna ipotesi coi precetti esposti al § 369 si calcoleranno le longitudini e le latitudini eliocentriche della cometa ed il raggio vettore, o distanza dal Sole tanto per la prima come per la quarta osservazione, e da queste quantità si dedurranno la posizione del piano dell'orbita e le distanze dal nodo, che fingeremo rappresentate per P', P''. Sarà $P'' - P'$ l'angolo compreso fra i raggi vettori r', r'', che porremo $= 2f$; mediante r', r'', $2f$ dietro la scorta dell'esempio (§ 347) si calcoleranno gli elementi tutti del moto ellittico in ogni ipotesi, che congiunti alla inclinazione ed al nodo precedentemente ottenuti daranno tre sistemi completi, dai quali si deve formare il vero sistema. A tale oggetto si calcolino in ciaschedun sistema le longitu-

dini geocentriche tanto per la seconda, come per la terza osservazione, e siano rispettivamente indicate per l'', $l''+m$, $l''+n$ nella seconda; l''', $l'''+m'$, $l'''+n'$ nella terza osservazione; α'', α''' siano le longitudini osservate. Avremo (come nei §§ 372, 373) per determinare x, y le due seguenti equazioni

$$\alpha''=l''+mx+ny; \qquad \alpha'''=l'''+m'x+n'y.$$

Risolute queste equazioni, e determinati i valori di x e di y, si avranno tosto le distanze corrette $\varrho'+px$, $\varrho''+qy$, dalle quali si ricaveranno collo stesso metodo i veri elementi dell'orbita. Che se le correzioni px, py risultassero troppo forti, e si potesse temere nel risultamento l'influenza delle loro seconde potestà, riguardando le distanze ottenute come più prossime al vero di quelle, dalle quali siamo partiti si riprincipierebbe con esse una nuova correzione che dovrebbe condursi a fine dietro i medesimi precetti. Per ultimo noteremo, che se le latitudini possano riguardarsi come esatte, e siano molto forti, basteranno tre sole osservazioni, potendosi ricavare la equazione (2) di condizione fra x ed y dalla latitudine geocentrica nella seconda osservazione calcolata nei tre sistemi di elementi, e confrontata con quella data dall'osservazione. Chi amasse un esempio numerico lo troverà nella mia Memoria sul volume III degli Atti dell'Accademia di Padova sopra citata, ove con questo metodo ho preso a correggere gli elementi ellittici superiormente ricavati della cometa di Biela.

Caso III. Calcolo di un'orbita ellittica, di cui conoscasi l'asse maggiore.

378. Accade sovente che dopo di avere calcolata dietro le osservazioni di un'apparizione l'orbita o parabolica od ellittica di una cometa, si riscontri poi nella storia dell'Astronomia un'altra cometa, i cui elementi sì fattamente a questa si assomiglino da farle riputare identiche. In tale circostanza si può con ogni verosimiglianza avere il tempo della sua rivoluzione periodica, se conoscasi quante intere rivoluzioni sono trascorse fra le due congetturate apparizioni. Ciò è avvenuto nelle comete di Halley, di Enke e di Biela, e dobbiamo credere che accaderà in seguito anche più frequentemente nelle prossime riapparizioni di quelle, alle quali è stata attribuita un'orbita ellittica. Si conoscerà in questo caso il semiasse maggiore dell'ellisse in virtù della terza legge di Keplero, e siccome per ipotesi vengono rappresentate lodevolmente le osservazioni dell'ultima apparizione in un'orbita speciale, per la quale conoscesi la distanza perielia, così questa non dovendo moltissimo variare, ci servirà a determinare molto prossimamente l'eccentricità. Sia in fatti q la distanza perielia colla quale si rappresentano le osservazioni, a il semiasse maggiore calcolato dietro il congetturato periodo; l'eccentricità sia $=e=\operatorname{sen}\varphi$; valerà l'e-

quazione $q = a(1 - e) = 2a\cos^2(45 + \frac{1}{2}\varphi)$; donde si avrà $\cos(45 + \frac{1}{2}\varphi) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{(2a)}}$.

Ottenuto così il valore prossimo di φ, e quindi quello di e, gli altri elementi non subiranno che picciolissime modificazioni; ritenendo pertanto che π, ω, i, φ siano i valori prossimi della longitudine del perielio, del nodo, dell'inclinazione e dell'angolo di eccentricità; $d\pi$, $d\omega$, di, $d\varphi$ le loro correzioni picciolissime, a il semiasse maggiore, n il moto medio diurno non soggetti ad alcuna variazione; l, λ, r la longitudine, la latitudine eliocentriche ed il raggio vettore; l', λ' la longitudine e latitudine geocentriche calcolate dietro gli elementi prossimi; dl, $d\lambda$, dr, dl', $d\lambda'$ le loro variazioni dipendenti dalle indotte correzioni; α', β' la longitudine e latitudine osservate ad un tempo dato, avremo (chiamando ρ la distanza accorciata della cometa dalla terra) (§ 246)

$$(1)\ dl' = \alpha' - l' = \frac{\cos\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')}{\rho}\,dr + \frac{r\cos\lambda\cos(l-l')}{\rho}\,dl - \frac{r\,\mathrm{sen}\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')}{\rho}\,d\lambda;$$

$$(2)\ d\lambda' = \beta' - \lambda' = \left(\frac{\mathrm{sen}\,\lambda\cos^2\lambda'}{\rho} - \frac{\mathrm{sen}\,2\lambda'\cos\lambda}{\rho}\cos(l-l')\right)dr$$

$$+ \frac{r}{2\rho}\,\mathrm{sen}2\lambda'\cos\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')\,dl + \left(\frac{r}{\rho}\cos\lambda\cos^2\lambda' + \frac{r}{2\rho}\,\mathrm{sen}2\lambda'\,\mathrm{sen}\lambda\cos(l-l')\right)d\lambda.$$

I valori di dr, dl, $d\lambda$, che entrano in queste equazioni, si avranno dalle equazioni (2), (3), (4) del § 244, ponendovi $dn = 0$, ed esprimendo la variazione dell'epoca e dell'anomalia media per la variazione del tempo del passaggio al perielio. A tale oggetto sia t il tempo dell'osservazione, τ quello del passaggio al perielio contati da una stessa origine, per la quale l'epoca fingesi come nel citato luogo $= H$; sarà $z = H + nt - \pi = n(t - \tau)$; quindi si avrà $dz = -n\,d\tau$; $dH = d\pi - n\,d\tau$. Introdotti questi valori nelle citate equazioni, esse si cangeranno nelle seguenti

$$(3)\ dr = -an\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{tang}\,\varphi\,d\tau - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi;$$

$$(4)\ dl = \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\right)d\omega - \mathrm{tang}\,\lambda\cos(l-\omega)\,di$$

$$- \frac{na^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\lambda}\,d\tau + \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\,d\pi + \frac{\cos i\,\mathrm{sen}\,v(2 + e\cos v)}{\cos\varphi\cos^2\lambda}\,d\varphi;$$

$$(5)\ d\lambda = -\mathrm{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\omega + \mathrm{sen}(l-\omega)\,di - \frac{na^2\cos\varphi}{r^2}\,\mathrm{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\tau$$

$$+ \mathrm{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\pi + \frac{(2 + e\cos v)\,\mathrm{sen}\,i\cos(l-\omega)\,\mathrm{sen}\,v}{\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Avendo ridotto a numeri i coefficienti di queste equazioni, se si sosti-

tuiscano nelle (1), (2) si avranno per ogni osservazione due equazioni di condizione fra le correzioni degli elementi, le quali risolute col metodo dei minimi quadrati daranno i valori di $d\omega$, di, $d\pi$, $d\varphi$, $d\tau$ in modo che gli errori delle osservazioni vi esercitino la minima influenza.

Anche di questo metodo si troverà un esempio numerico nella citata Memoria, ove l'ellisse ottenuta dalle osservazioni della cometa n.° (74) fatte nel 1826 si adatta al periodo indicato dalle osservazioni del suo passaggio al perielio nel 1806.

379. *Scolio*. Quando coi metodi precedenti sia stata determinata l'orbita ellittica di una cometa non conviene credere che sommando il tempo della rivoluzione periodica con quello dell'ultimo passaggio al perielio debbasi ottenere esattamente il tempo del prossimo ritorno al perielio; nè che i determinati elementi ellittici saranno per rappresentare in allora fedelmente le sue posizioni. Le attrazioni sopra di essa esercitate dai pianeti del sistema solare, soprattutto se passi ad alcuno di essi in gran vicinanza, alterano notabilmente tanto il tempo della rivoluzione, come anche gli altri elementi ellittici, sicchè molto lungi dal vero correrebbe rischio di andare chi ad essi soltanto appoggiato volesse azzardarsi di predirne il ritorno, ed assegnarne preventivamente le posizioni. Daremo nell'appendice in fine di questo volume i metodi che si devono seguire nel calcolo di queste perturbazioni, delle quali primo di tutti ha insegnato a tenerne conto Clairaut nella celebre cometa di Halley, e con somma felicità hanno servito al chiarissimo Enke a rappresentare la teoria della sua cometa di 1202 giorni. Conviene però confessare che riescono sempre molto moleste e delicate sì fatte ricerche, e devono essere accolti con sentimento di gratitudine gli sforzi di quei benemeriti calcolatori che se ne occupano, e destare ammirazione se siano coronati da felice successo.

CAPITOLO V.

Delle stelle fisse, e dei varj loro movimenti apparenti.

380. Dopo di aver trattato dei corpi celesti componenti il sistema solare, ragion vuole che alcune cose diciamo intorno alle stelle, le quali costituiscono uno dei rami più importanti dell'Astronomia pratica. E prima di tutto se poco abbiamo potuto discoprire sulla fisica costituzione del Sole e dei pianeti, molto meno sappiamo intorno a quella delle stelle appellate *fisse*, che per la enorme loro distanza

s' involano a tutte le nostre indagini, quand' anche ajutisi la vista con i più possenti istromenti ottici. Vengono esse dagli Astronomi distribuite in classi rapporto alla loro grandezza apparente, chiamandosi stelle di prima grandezza quelle che sembrano delle altre più grandi e più rilucenti, alle quali tengono dietro quelle di seconda, di terza, di quarta ec. fino alla nona in decima, che a stento distinguonsi anche con i buoni cannocchiali; tutte le altre di numero immenso non discernibili che con i più forti e perfetti telescopj appellandosi *telescopiche*. Si numerano 18 stelle di prima grandezza, 68 di seconda, 209 di terza, 453 di quarta ec. Il loro numero nelle seguenti minori grandezze si va aumentando a dismisura, e si rende pressochè impossibile farne un esatto registro. Dei moderni cataloghi quello che per la somma diligenza e cura impiegata tanto nelle osservazioni, come nelle loro riduzioni rendesi sopra tutti commendevole è dovuto al celebre Piazzi, la di cui seconda edizione fatta in Palermo nell' anno 1814 riveduta e molto aumentata dall' Autore contiene la posizione media di 7646 stelle per il principio dell' anno 1800. Il catalogo di La-Lande è meno esatto, non però meno pregevole, giacchè somministrando la posizione di 50000 stelle, porge un comodo grandissimo nel determinare l'*AR* e la declinazione dei nuovi pianeti e delle comete che di giorno in giorno vengono dagli Astronomi scoperte. Questi cataloghi tuttochè numerosi, sono però molto imperfetti se col cielo si confrontino, avvegnachè la più leggera osservazione fa tosto riconoscere molte stelle che non trovansi in essi inscrite. Se poi si adoperino dei telescopj molto forti, quali sono quelli di 20 piedi del sig. Herschel, se ne scuopre un numero sì portentoso che la nostra immaginazione rimane sopraffatta, nè ardisce in alcun modo assegnarne i limiti. Lo stesso insigne Astronomo nel picciolo spazio di 10′ intorno ad *Aldebarano* ne ha contato 50, ed in una zona di non più di due gradi ne ha stimato 116000. Si può da tutto ciò inferire non essere possibile l' enumerazione delle stelle del firmamento.

381. Se nulla può dirsi di preciso sul numero delle stelle fisse, dobbiamo confessare che siamo nello stesso caso rapporto alla loro grandezza e distanza da noi. Osservate con perfetti telescopj, i loro diametri apparenti si riscontrano sì piccioli che non possono essere in alcun modo apprezzati con i più squisiti micrometri. Si può avere per dimostrato che le stelle di prima grandezza nominate Aldebarano, Regolo, la Spica od α della Vergine, ed Antares od α dello Scorpione, hanno un diametro apparente non maggiore di un secondo di grado, poichè mentre vengono ad occultarsi dietro la Luna non impiegano due secondi di tempo a togliersi interamente alla nostra vista, nel quale intervallo descrive essa un arco di 1″.

D' altra parte la loro annua paralasse è o nulla, o sì picciola che

Digitized by Google

può appena valutarsi di 1″. Se si assumesse questa = 1″, ed il diametro apparente = 1″, sarebbe il loro reale diametro uguale alla distanza della terra dal Sole, e la loro distanza = 206265 semidiametri dell'orbita terrestre. Quale prodigiosa grandezza, quale immensa distanza! (*)

382. Posti a confronto i raggi di luce provenienti dalle stelle fisse con quelli dei pianeti, incontrasi in quelli maggior forza e vibrazione che in questi. Da tale circostanza e dalla immensa distanza delle stelle da noi, hanno dedotto gli Astronomi essere esse corpi ardenti e splendenti per luce propria, e non per luce riflessa dal Sole, come nei pianeti accade, imperciocchè come potrebbe la luce solare da' corpi opachi riflessa propagarsi in distanze sì prodigiose? Si riguardano pertanto le stelle fisse come altrettanti Soli, centri forse essi pure di altrettanti sistemi planetarj simili al nostro, ed a noi involati dalla distanza. La diversità della luce e dei colori che in esse discuopresi sembra manifestare in ciascheduna un grado diverso d'infiammazione, e se all'analogia di ciò che nella nostra terra succede dobbiamo affidarci, si può credere che più forte sia l'accensione in quelle stelle che brillano di una bianca luce, e più debole nelle rossastre. Osservasi eziandio nelle stelle fisse una continua scintillazione, o vogliamo dire tremore, che alla picciolezza dei loro diametri, ed alla continua agitazione della nostra atmosfera è dovuto, poichè i raggi di luce da esse provenienti nell'attraversare con somma celerità i successivi suoi strati si rifrangono, ed in varie guise ripiegandosi non pingono giammai l'immagine del punto radiante nello stesso identico luogo, ma bensì in tutti i vicini contorni; onde accade che per essi con somma rapidità passando la serie delle successive immagini, producasi l'ac-

(*) Per formarci una qualche idea della enorme grandezza delle distanze celesti tentiamo di apprezzarle colle più grandi velocità da noi conosciute. La celerità di una palla di cannone da 24 mentre sorte dalla sua bocca viene stimata di 1400 piedi o 233 tese di Francia per secondo; assumendola costante, e fingendo la paralasse solare = 8″,8, il raggio medio della terra = 3266638 tese, si trova che impiegherebbe 10 anni, 153 giorni per venire dal Sole alla terra; e 2149072 anni per arrivare da una stella di prima grandezza fino a noi, se pure a quella attribuire si potesse una paralasse di 1″. La luce stessa che con celerità grandissima si propaga nell'immenso spazio in modo da giungere dal Sole a noi in 8′ 13″, dovrebbe impiegare 3 anni e 82 giorni per giungere a noi da questa stella; eppure dietro plausibili ragioni si può congetturare essere quasi evanescente la distanza di una stella di prima grandezza da noi, se confrontisi con quella delle nebulose e delle telescopiche. La nostra mente si perde se vuol tentare di assegnare i limiti a queste enormi distanze, e non può produrre che cose congetturali, le quali se per una parte le rendono al vivo palese la sua picciolezza e limitata estensione, per l'altra le riescono di non mediocre conforto come le più atte ad additarle la purissima sorgente da cui emana, e la infinita Sapienza che tutto regge e dispone con ordine sì ammirando.

cennata scintillazione. Quindi scorgesi la ragione per cui essa è più forte mentre l'atmosfera è violentemente dal vento agitata, e sparisce quasi del tutto sopra le alte montagne, ove gli strati atmosferici sono più puri e molto meno densi.

383. Nell'immenso numero delle stelle, molte se ne incontrano che osservate col mezzo di forti telescopj appariscono divise in due, tre, ed anche più; tali sono a cagion d'esempio γ d'Ariete, Castore, α d'Ercole, ed altre molte, che furono già da Herschel con somma cura esaminate e descritte fino al numero di circa 700, e ridotte in cinque classi. Herschel il figlio proseguendo con somma alacrità le ricerche di suo padre, in compagnia del signor caval. South ha prodotto in questi ultimi tempi un grande e diligentissimo lavoro alla Società di Londra, in cui ha particolarmente preso ad esaminare i movimenti relativi delle stelle doppie, triple ec., ed ha mostrato evidentemente che alcune fra loro muovonsi intorno ad un comune centro di gravità in orbite rientranti circolari od ellittiche; onde rendesi manifesto che stabiliscono esse nel sistema mondiale altrettanti separati sistemi simili al nostro solare fra loro congiunti con un legame di reciproca attrazione. Fra queste le più rimarchevoli sono ξ dell'Orsa maggiore, ρ d'Ofiuco, 61 del Cigno, le quali rapidamente cambiando la posizione reciproca, appalesano un periodo; σ d'Orione, che da Struwe in Dorpat col suo grande rifrattore è stata riconosciuta per un sistema riunito di 16 picciolissime stelle.

Un fenomeno ben singolare presentano le *nebulose*, e la *via lattea* all'astronomo osservatore. Sono le nebulose certe macchie di bianca luce sparse in diversi punti del cielo, sottoposte agli stessi movimenti delle stelle fisse, per lo più ad occhio nudo invisibili, e solo distinguibili con i cannocchiali. Herschel ne ha osservato fino a 2000, disposte per la maggior parte in una zona che abbraccia tutto il cielo, e le ha ridotte a tre classi. Nella prima comprende quelle che comunque aumentisi la forza dei telescopj non trovansi a stelle frammiste, e sono le nebulose propriamente dette. Nella seconda egli ripone le nebulose frammiste a picciole stelle visibili coll'ajuto di forti telescopj; e nella terza quelle che risolvonsi in picciolissime stelle prive affatto di estranea luce.

La via lattea si può riguardare siccome una grande e continuata nebulosa che abbraccia tutto il cielo, tagliando l'equatore verso i 100° ed i 277° di *AR* sotto un angolo all'incirca di 60°. Hanno creduto gli Astronomi che la via lattea fosse un aggregato d'innumerevoli stelle che per la loro grande apparente prossimità, e per la loro somma tenuità a noi si presentassero sotto la forma di una fascia circondante il cielo, e tale congettura è stata dal signor Herschel ridotta a certezza, quando, perfezionati gl'istromenti ottici, vi ha diretto i

suoi giganteschi telescopj, ed ha conosciuto di fatto risolversi essa in picciolissime ed innumerevoli stelle spoglie di quella lattea luce, sotto la quale ad occhio nudo, od anche armato di deboli cannocchiali si presenta. Suppone Herschel che costituiscano le stelle seminate nella via lattea un grande sistema, verso il centro del quale trovasi il sistema solare, e riguarda le nebulose come altrettanti simili sistemi di stelle, fuori dei quali ritrovasi il nostro occhio, che però dovranno apparire tanto più piccioli e confusi, quanto più li fingiamo lontani. Spiega così molto facilmente perchè non si possano risolvere in stelle quelle macchie luminose del firmamento anche coi suoi più forti telescopj; dal loro diametro e dalla forza del telescopio ne congetturа la distanza in 8000 volte più grande di 206265, che appellare si può *distanza siderale*. Dietro ciò la luce impiegare dovrebbe più di 24000 anni per giungere da quegli ultimi sistemi fino a noi (Vedasi Littrow *Astron. popul.* vol. II. Vienna 1825). Lasciando da parte queste congetture, passiamo a fare parola di un' altra singolarissima apparenza osservata in alcune stelle, cioè della loro variabilità e disparizione.

Sonovi pertanto alcune stelle che diligentemente osservate si presentano sotto varie grandezze, e vanno gradatamente acquistando e perdendo la loro luce. Le principali e più conosciute sono Algol, e la variabile della Balena; la prima ripristinando i gradi del suo splendore in due giorni e 21^h circa, la seconda nel periodo di 334 giorni. Delle altre se ne sono osservate come improvvisamente formatesi in tutto lo splendore di una stella di prima e seconda grandezza, indi scomparse senza avere cambiato apparentemente di sito fra la loro apparizione e disparizione, nè senza che siasi in esse riconosciuto traccia di paralasse annua, onde è che conviene riporle fra il numero di vere stelle situate in immensa distanza. Tale si fu la famosa stella del 1572 improvvisamente apparsa nella costellazione di Cassiopea. Essa da principio splendeva come una stella di prima grandezza, brillando al pari di Sirio e di Venere a segno di potersi vedere di giorno ad occhio nudo; quindi la sua luce cominciò a diminuire, divenne rossiccia, poi pallida, finchè in sedici mesi sparì del tutto (*). Tale si fu ancora quella osservata nel 1604 nel serpentario, e perduta di vista nel 1606. Si pos-

(*) Riferisce La-Lande nella sua Astronomia che si è in questa stella congetturato un periodo di 150 anni, ma senza bastante fondamento. Racconta Ticone (*De nova stella anni* 1572 cap. III. in fine) che Cipriano Leonitio astrologo del suo tempo in alcune pagine sulla nuova stella di Cassiopea asserisce di avere trovato fatto menzione di una *nuova stella* nella regione boreale ai tempi di Ottone I. (verso l'anno 945), ed all'anno 1264. Ciò supporrebbe un periodo di circa 320 anni, e ricondurrebbe l'epoca della sua visibilità alla fine di questo secolo. Ma non avendo citato lo storico da cui ha tratto queste notizie, non possiamo valutarne l'autorità.

sono spiegare le apparenze che presentano le stelle variabili ammettendo in esse una rotazione uguale all'osservato periodo della loro variabilità, e nel tempo stesso un diverso grado di accensione alla loro superficie. Non così facilmente spiegasi la disparizione delle stelle, a meno che assumere non si voglia un'accensione seguita nel loro globo per il tempo della loro apparizione, ed indi estintasi. Vedasi l'Astronomia del signor Piazzi, e diverse Memorie del signor Herschel fra gli Atti delle transazioni filosofiche di Londra.

384. Fino dai più remoti tempi è invalso il costume appresso gli Astronomi di formare delle stelle alcuni gruppi dividendo il cielo in costellazioni, alle quali sonosi dati dei nomi o di animali, o di uomini insigni, o di stromenti domestici. L'origine di questi nomi e di queste costellazioni ha dato argomento a molte erudite dissertazioni e a varie discussioni letterarie, che hanno facilitato la lettura degli antichi scrittori. I limiti di quest'opera non ci permettono di farne parola; solo ci contenteremo di riferire qui i nomi delle costellazioni dietro l'Astronomia del signor Piazzi.

1.° Le dodici costellazioni zodiacali sono contenute nei seguenti versi:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

2.° Costellazioni boreali antiche: Pegaso, Andromeda, Cassiopea, Orsa minore, Cefeo, Perseo, Triangolo boreale, Cocchiere, Orsa maggiore, Dragone, Chioma di Berenice, Boote e Monte Menalo, Corona boreale, Ercole, Ofiuco, Serpente, Lira, Aquila, Antinoo, Cigno, Freccia, Delfino, Cavallino.

3.° Costellazioni australi antiche: Balena, Eridano, Lepre, Orione, Cane maggiore, Cane minore, Nave di Argo, Idra, Tazza, Corvo, Centauro, Lupo, Altare, Corona australe, Pesce australe.

Le costellazioni aggiunte dai moderni sono le seguenti: Renna, Mietitore, Giraffa, Arpa di Giorgio, Lionceorno, Lince, Telescopio di Herschel, picciolo Leone, Cani da caccia, Quadrante murale, Toro di Poniatowski, Scudo di Sobieski, piccola Volpe, Oca, Mosca, Lacerna, Sestante, Solitario, Apparato dello Scultore, Fenice, Macchina elettrica, Laboratorio chimico, Pendolo, Scettro di Brandeburgo, Burino, Cavalletto del pittore, Macchina pneumatica, Squadra, Compasso, Telescopio astronomico, Microscopio, Pallone areostatico, Grue, Trofeo di Federico, Regolo, Tocano, picciola Nube, Idro maschio, Orologio, Reticolo, gran Nuvola, Monte della tavola, Pesce volante, Camaleonte, Quercia di Carlo, Monte della mensa, Croce, Ape, Livello o triangolo australe, Uccello indiano, Ottante nautico, Pavone, Indiano, Gatto, Dorado.

Movimenti apparenti delle stelle fisse dipendenti dalla precessione degli equinozj.

385. Abbiamo già nel § 78 annunziato che le osservazioni manifestavano una diminuzione nell'obbliquità dell'ecclittica, ed un movimento negli equinozj, in virtù del quale sembra che l'intersezione dell'equatore con l'ecclittica vada nell'ecclittica stessa retrogradando tutti gli anni di circa 50″.

Fin d'allora abbiamo avvertito che questi movimenti non erano esattamente proporzionali al tempo, ma che nella loro composizione entrano eziandio le superiori potenze del tempo.

Siccome però nella diminuzione dell'obbliquità dell'ecclittica, e nella precessione l'influsso dei termini dipendenti dai quadrati del tempo è molto picciolo a motivo della scarsezza ed imperfezione delle antiche osservazioni, noi non siamo in istato di dare la loro completa teoria deducendola dalle osservazioni; sarà perciò sano consiglio di partire dai dati della teoria fondata sull'attrazione universale, e dietro le formule della meccanica celeste prescrivere i precetti che l'astronomo deve seguire nel confronto delle antiche con le moderne posizioni.

Risulta pertanto dalla teoria della universale attrazione del celebre La-Place con ogni cura sviluppata nella sua Meccanica celeste, che in virtù della figura sferoidica della terra, l'equatore terrestre cambia continuamente di posizione rapporto all'ecclittica per l'attrazione del Sole e della Luna sopra il detto sferoide. Da questa causa traggono origine i movimenti retrogradi crescenti col tempo nella posizione dell'equinozio di primavera, ed alcuni altri movimenti periodici che si ripristinano di 18 in 18 anni, e qualora trascurare si volesse l'azione dei pianeti sul centro di gravità della terra, potrebbesi riguardare il piano dell'ecclittica fisso nello spazio, e trasportare tutti i movimenti all'equatore terrestre. Ma in virtù di quest'ultima azione, della prima in vero molto minore, il centro di gravità della terra viene dal suo luogo rimosso, onde accade che muovasi pure il piano dell'ecclittica, e sotto un angolo un poco diverso tagli l'equatore. Per formarci una idea chiara dei continui cambiamenti, ai quali per le accennate cause vanno sottoposti l'ecclittica e l'equatore, noi riferiremo ad un istante qualunque la loro posizione ad un piano fisso, per il quale sceglieremo il piano dell'ecclittica al principio dell'anno 1750, epoca resa celebre per la somma precisione che introdussero nelle osservazioni astronomiche i signori La-Caille e Bradley.

386. Sia adunque ΥE (*Fig.* 11) l'ecclittica fissa per l'epoca stabilita, ed ΥQ la posizione dell'equatore, e fingiamo che dopo un tempo t contato in anni e parti di anno l'ecclittica sia passata in $\Upsilon'' E'$,

mentre l'equatore è passato in $\Upsilon'\Upsilon''Q'$. Se trascuriamo i movimenti periodici, dei quali a parte parleremo fra poco, Υ'' rappresenterà la posizione dell'equinozio al tempo t; $\Upsilon\Upsilon'$ sarà la precessione lunisolare, ossia quella porzione che alla semplice attrazione del Sole e della Luna è dovuta; e la differenza fra $N\Upsilon''$ ed $N\Upsilon$ rappresenterà l'intera precessione apparente; l'angolo in Υ' rappresenterà l'obbliquità dell'ecclittica all'equatore variata per la sola azione lunisolare; e l'angolo in Υ'' la vera obbliqnità dell'ecclittica all'equatore. Ciò premesso, dagli Astronomi il punto Υ'' appellasi *equinozio medio* di primavera, riservandosi la denominazione di *equinozio vero* a quel punto a questo sempre molto vicino, in cui realmente l'ecclittica taglierà l'equatore, avendo riguardo agli altri piccioli movimenti periodici, dei quali parleremo nell'articolo della nutazione, e l'angolo in Υ'' per le stesse ragioni appellasi *obbliquità media* dell'ecclittica alla fine del tempo t.

La teoria di La-Place, giusta le ultime ed accuratissime determinazioni del signor Bessel fondate sopra il confronto delle numerose osservazioni di Bradley con quelle più recenti di Piazzi e di altri diligentissimi Astronomi qualora pongasi l'arco $N\Upsilon = \Pi$, $\Upsilon\Upsilon' = \psi$, l'arco $N\Upsilon'' = \Pi + \psi'$, l'angolo in $\Upsilon' = \omega$, in $\Upsilon'' = \omega'$, $\Upsilon'\Upsilon'' = \lambda'$, l'angolo in $N = \pi$, porge per l'anno $1750 + t$ le seguenti relazioni (Bessel, *Astronomiae fundamenta etc.* Regiomonti 1818. p. 297)

$$\begin{aligned}
\psi &= t\ 50'',340499 - t^2\ 0'',0001217945\\
\psi' &= t\ 50\ ,176068 + t^2\ 0\ ,0001221483\\
\omega &= 23^\circ\ 28'\ 18'',0 + t^2\ 0\ ,000009842 33\\
\omega' &= 23\ \ 28\ \ 18\ ,0 - t\ 0,48368 - t^2\ 0'',00000272295,
\end{aligned}$$

donde, differenziando rapporto a t, si ottengono i seguenti risultamenti

Precessione lunisolare annua $= \dfrac{d\psi}{dt} = 50'',340499 - t\ 0'',00024358 90$

. . . . . generale . . . . $= \dfrac{d\psi'}{dt} = 50'',176068 + t\ 0'',00024422966$

variaz. ann. appar. dell'obbl. $= \dfrac{d\omega'}{dt} = -0'',48368 - t\ 0'',00000544590.$

Rapporto alle quantità Π, λ, π, si otterranno esse ad un'epoca qualunque dal triangolo $N\Upsilon'\Upsilon''$, il quale in virtù delle formule di Nepero (Trig. XII) dà le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\tang \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sen}(\Pi + \tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{2}\psi') &= \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\psi - \psi')\tang\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega)\\
\tang \tfrac{1}{2}\pi \cos(\Pi + \tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{2}\psi') &= \cos\tfrac{1}{2}(\psi - \psi')\tang\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)\\
\tang \tfrac{1}{2}\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega) &= \tang\tfrac{1}{2}(\psi - \psi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)
\end{aligned}\right\}\ (1)$$

delle quali le prime due corrispondono alle equazioni (A), e determi-

nano le incognite π, Π, l'ultima corrisponde alla prima delle equazioni (B), e determina λ.

I valori di Π, π, λ possono eziandio svolgersi in serie dipendenti dal tempo, che avendo riguardo alla lentezza con cui variano gli archi $\psi - \psi'$, $\omega' - \omega$ potranno con molto vantaggio adoperarsi in luogo delle equazioni (1). È facile di assegnare le formule generali per questi sviluppi, nella investigazione delle quali noi non ci tratteniamo, limitandoci a riferire qui i risultamenti dello stesso Bessel (*ibid.* pag. 297)

$\Pi = 171^\circ\ 36'\ 10'' - t\ 5'',18$; $\pi = t\ 0'',48892 - t^2\ 0'',0000030719$;
$\lambda = t\ 0'',17926 - t^2\ 0,0002660394$.

387. Sia ora S un astro che rapporto all'eclittica fissa ΥE corrisponda ad una longitudine $\Upsilon P = L$, ad una latitudine $SP = B$, e rapporto all'eclittica mobile la sua longitudine media (contata cioè dall'equinozio medio) sia $\Upsilon'' P' = l$, e la sua latitudine $P'S = b$. Ritenute le denominazioni superiori, ragionando intorno al punto N, come al § 64 si fece rapporto all'equinozio considerato nell'intersezione fra l'eclittica e l'equatore, facilmente vedremo che le denominazioni di quell'articolo riferite a questo daranno $\iota = \pi$, $\alpha = L - \Pi$, $\delta = B$, $l = l - \Pi - \psi'$, $\lambda = b$, e però le formule (A), (B) dello stesso numero porgeranno

$$\left.\begin{array}{l} \cos(L-\Pi)\cos B = \cos(l-\Pi-\psi')\cos b \\ \operatorname{sen}(L-\Pi)\cos B = \operatorname{sen}(l-\Pi-\psi')\cos b\cos\pi - \operatorname{sen} b \operatorname{sen}\pi \\ \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b\cos\pi + \operatorname{sen}(l-\Pi-\psi')\cos b \operatorname{sen}\pi \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos b\cos(l-\Pi-\psi') = \cos B\cos(L-\Pi) \\ \cos b \operatorname{sen}(l-\Pi-\psi') = \cos B \operatorname{sen}(L-\Pi)\cos\pi + \operatorname{sen} B \operatorname{sen}\pi \\ \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B\cos\pi - \operatorname{sen}(L-\Pi)\cos B \operatorname{sen}\pi) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Le equazioni (2) servono a riportare le longitudini e latitudini medie osservate ad un'epoca t all'eclittica fissa, mentre le equazioni (3) risolvono il problema inverso, se pure siensi precedentemente calcolati i valori di ψ, ψ', Π, π coi precetti superiori.

388. Le equazioni (3) si possono eziandio svolgere in serie, e porgeranno un metodo molto spedito per ridurre le longitudini medie determinate ad un tempo t contato dall'anno 1750, a quelle che corrisponderanno ad un altro tempo t', che dal primo non disti enormemente. L'intervallo però può essere abbastanza considerabile, e può senza errore estendersi a varj secoli avanti e dopo l'epoca stabilita. In fatti trascurando i quadrati e le potenze ulteriori di π, l'ultima delle equazioni (3) darà

$$b = B - \pi \operatorname{sen}(L - \Pi) \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

La seconda divisa per la prima porge

$\tang(l - \Pi - \psi') = \tang(L - \Pi) + \frac{\pi \tang B}{\cos(L - \Pi)}$; quindi ponendo $l - \Pi - \psi' = L - \Pi + x$, riguardando x come picciolissimo, e dell'ordine di π, troverassi $x = \pi \tang B \cos(L - \Pi)$. Sostituito il valore di x avremo

$$l = L + \psi' + \pi \tang B \cos(L - \Pi) \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Del pari per il secondo tempo t', avremo
$b' = B - \pi' \operatorname{sen}(L - \Pi')$, $l' = L + \psi'_{,} + \pi' \tang B \cos(L - \Pi')$, π', Π', $\psi'_{,}$, essendo i valori di π, Π, ψ' relativi alla seconda epoca.

Si osservi ora che nei termini moltiplicati per π si può senza errore sensibile porre $L - \frac{1}{2}(\Pi + \Pi')$ in luogo di $L - \Pi$, ed $L - \Pi'$, e b in luogo B, avvegnachè queste sostituzioni non influiscono che nei termini dell'ordine π^2 trascurati. Ponendo pertanto
$L - \frac{1}{2}(\Pi + \Pi') = \Lambda$, e sottraendo l da l', b da b' otterremo

$$\left.\begin{aligned} l' &= l + \psi'_{,} - \psi' + (\pi' - \pi) \tang b \cos \Lambda \\ b' &= b - (\pi' - \pi) \operatorname{sen} \Lambda \end{aligned}\right\} (4)$$

nelle quali equazioni dietro le superiori determinazioni sarà

$$\begin{aligned} \psi'_{,} - \psi' &= (t' - t)\,[50'',176068 + (t' + t)\,0'',0001221483] \\ \pi' - \pi &= (t' - t)\,[\;0\,,48892 \;\; - (t' + t)\,0\,,0000030719]. \end{aligned}$$

Per avere il valore di Λ si osservi che non entrando esso nelle equazioni (4), che nei termini picciolissimi, potrà porsi
$L = l - \psi' = l - t\,50'',176$, ed essendo $\Pi = 171^\circ\,36'\,10'' - 5'',18\,t$, sarà $\Lambda = l - 171^\circ\,36'\,10'' - 50'',176\,t + 5'',18\,\frac{1}{2}(t + t')$.

389. Passiamo ora a ricercare l'AR e la declinazione dell'astro S al tempo t dopo il 1750. Se partendo dall'equinozio medio Υ'' indichiamo la prima per α, la seconda per δ, dal punto Υ' saranno le coordinate di S rapporto all'equatore vero rappresentate da $\alpha + \lambda$, δ. Queste quantità si ricaveranno dalla longitudine $L + \psi$, dalla latitudine B, e dall'obbliquità ω dietro le equazioni (A), (B) del § 64 sopra citate. Avremo pertanto

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \cos(\alpha + \lambda) &= \cos B \cos(L + \psi) \\ \cos\delta \operatorname{sen}(\alpha + \lambda) &= \cos B \operatorname{sen}(L + \psi) \cos\omega - \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen}\delta &= \operatorname{sen} B \cos\omega + \cos B \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}(L + \psi) \end{aligned}\right\} (5)$$

e viceversa

$$\left.\begin{aligned} \cos B \cos(L + \psi) &= \cos\delta \cos(\alpha + \lambda) \\ \cos B \operatorname{sen}(L + \psi) &= \cos\delta \operatorname{sen}(\alpha + \lambda) \cos\omega + \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\omega \\ \operatorname{sen} B &= \cos\omega \operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\omega \cos\delta \operatorname{sen}(\alpha + \lambda) \end{aligned}\right\} (6)$$

Le equazioni (6) daranno i valori dei costanti L, B, se α, δ, ω, λ si conoscano, e le equazioni (5) risolveranno il problema inverso, onde anche scorgesi che in virtù delle precedenti equazioni facilmente

dalle AR osservate in un' epoca si passa alle AR e declinazioni osservate in altra epoca, comunque dalla prima diversa. Chi desiderasse delle applicazioni e maggiori sviluppi su questo argomento dovrà consultare specialmente la citata opera del signor Bessel, ove trovansi esposte certe formule dovute al signor Bohnenberger molto comode all' uopo.

390. Il più delle volte si preferiscono alle rigorose formule superiori i valori di α e di δ ordinati per serie rapporto ai tempi. Egli è facile di vedere che α, δ variando col tempo se indichiamo per α', δ' i valori di α, δ alla fine del tempo t (α, δ essendo relativi al principio dello stesso tempo), avremo dal teorema di Taylor

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)t + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\frac{t^2}{1.2} + \ldots; \quad \delta' = \delta + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)t + \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)\frac{t^2}{1.2} + \ldots \quad (a)$$

ove, dopo di avere eseguito le differenziazioni, nei coefficienti differenziali deve porsi $t = 0$.

I valori di $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ ottengonsi dal differenziare le equazioni (5) facendo variare tutte le quantità col tempo a riserva di B, L, che sono costanti, ed eliminando poi B, $(L + \psi)$ col mezzo delle equazioni (6).

Si otterrà in primo luogo con facili riduzioni

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) = \left(\frac{d\psi}{dt}\right) \operatorname{sen} \omega \cos(\alpha + \lambda) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right) \operatorname{sen}(\alpha + \lambda) \ldots (b)$$

Differenziando in secondo luogo la prima delle equazioni (5), e sostituendo nel suo differenziale il trovato valore di $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$, e quello di $\cos B \operatorname{sen}(L + \psi)$ preso dalla seconda delle equazioni (6), si otterrà dopo le opportune riduzioni

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = -\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) + [\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tg}\delta \operatorname{sen}(\alpha+\lambda)]\left(\frac{d\psi}{dt}\right) - \operatorname{tg}\delta \cos(\alpha+\lambda)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \quad (c)$$

Considerando ora l' estrema picciolezza di λ, $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ si potranno trascurare le loro potenze superiori alla prima, ed i loro prodotti, e perciò le equazioni (b), (c) dietro gli opportuni sviluppi si cangeranno nelle seguenti.

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) = \left(\frac{d\psi}{dt}\right) \operatorname{sen}\omega \cos\alpha - \left[\frac{d\psi}{dt}\frac{\lambda \operatorname{sen}\omega}{R''} - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\right] \operatorname{sen}\alpha;$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = -\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)(\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tg}\delta \operatorname{sen}\alpha) + \left[\frac{d\psi}{dt}\frac{\lambda \operatorname{sen}\omega}{R''} - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\right] \operatorname{tg}\delta \cos\alpha.$$

Introducendo nel coefficiente $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\frac{\lambda \operatorname{sen}\omega}{R''} - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ i valori numerici dati nel § 386, esso riducesi estremamente picciolo, cioè $= -t\,0'',00000226$. Se pertanto trascurasi interamente, e riduconsi a numeri i coefficienti di $\cos\alpha$, di $\operatorname{tang}\delta \operatorname{sen}\alpha$ nei valori di $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ si avrà

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = m + n \operatorname{tang}\delta \operatorname{sen}\alpha\,; \qquad \left(\frac{d\delta}{dt}\right) = n \cos\alpha \quad . \quad . \quad (7)$$

ove per il principio del 1750 sarà
$m = 45'',99592 + t\,0'',0003086450$; $n = 20'',05039 - t\,0'',0000970204$,
e per il principio del 1800, ponendo $t = 50$ troverassi
$m = 46'',01135 + t\,0'',0003086450$; $n = 20'',04554 - t\,0'',0000970204$.

Dalle equazioni (7) colla semplice differenziazione si otterranno i valori di $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)$ ec., osservando di far variare in esse rapporto a t eziandio le quantità m, n.

Eseguite le operazioni, si porrà $t = 0$, e si avranno i coefficienti delle potenze successive di t nei valori superiori di α', δ'. Si troverà la forma di questi coefficienti nell'opera del signor Bessel, *più volte* citata, e nelle Effemeridi di Milano per il 1820, dove il sig. Carlini ha dato alcune tavole molto comode fondate sulle formule del signor Bessel per il calcolo dei termini dipendenti dal quadrato del tempo nelle posizioni medie delle stelle, alle quali opere noi rimandiamo i nostri lettori per gli sviluppi qui omessi.

Movimenti periodici delle stelle fisse.

I. Dell'aberrazione della luce.

391. Quando siasi determinata la posizione media di una stella, se si osserva costantemente la sua posizione rapporto all'equatore, non tardasi a riconoscere che essa è sottoposta ad alcune picciole oscillazioni tanto in AR che in declinazione, le quali si rinnovano quasi per l'intero in un anno, e la riconducono alle posizioni che in simili stagioni aveva avuto negli anni precedenti rapporto al suo luogo medio. Si credè da principio che fossero queste dipendenti da un'annua paralasse prodotta dal movimento della terra intorno al Sole, come nel seguente articolo descriveremo. Ma Bradley in compagnia di Molineux, ed indi solo essendosi applicato indefessamente ad osservare questi piccioli movimenti periodici, non tardò a riconoscere che erano del tutto contrarj a quelli originati dalla paralasse, e nel 1728 rese conto

alla Società di Londra della nuova sua spiegazione, ed in guisa l'adornò da non poter lasciar dubbio sulla sua verità. Egli cioè osservò che in virtù del moto progressivo della luce la celerità della molecola luminosa, sebbene grandissima, non però infinita, si combina con la celerità del nostro occhio sulla terra per girare intorno al Sole, ed apparisce sempre in un luogo diverso dal vero, e dipendente dalla posizione della terra nella sua orbita.

Per ben comprendere la spiegazione di Bradley, fingiamo che BTN (*Fig.* 12) rappresenti l'orbita della terra intorno al Sole S, $S\Upsilon$ la linea degli equinozj, B il perielio, N l'afelio, e sia P il luogo medio di una stella corrispondente ad una longitudine $= l$, e ad una latitudine boreale $= \lambda$. Giunta la terra in T, il raggio luminoso proveniente dalla stella entri nel nostro occhio pure situato in T. Abbia il raggio luminoso una celerità aT che porremo $= \gamma$, e l'occhio una celerità uguale a quella della terra $Tt = V$; mentre cioè il raggio luminoso dal punto a passa al punto T, l'occhio dal punto T passi in t. In questo stato di cose egli è palese che se la celerità della luce si decomponesse in due $ab = Tt = V$, ed $aq = bT$, in virtù della prima soltanto non si farebbe alcuna impressione nell'occhio, poichè questo dotato esso pure di pari celerità nella stessa direzione si troverebbe sempre a contatto della molecola luminosa senza esserne giammai percosso. La sola porzione di celerità che ci rende la stella visibile è la Tb, e però sarà essa visibile nel cielo stellato lungo la linea Tb che fa con la TP un angolo PTb, a cui dassi il nome di *aberrazione della luce*. Segue da ciò 1.° che la stella apparisce sempre nel piano tangente all'orbita della terra condotto per il luogo di questa, e la posizione media di quella in un sito un poco più avanzato nella direzione del moto della terra; 2.° che condotta tb, la figura $aTtb$ sarà un paralellogrammo, e però al solo oggetto di stimare la posizione della linea Tb nello spazio, potremo considerare la molecola luminosa come rivolta dall'occhio verso la stella, e riguardare Tb qual risultante di due celerità concorrenti in T, l'una nella direzione $Ta = \gamma$, l'altra nella direzione $Tt = V$. Si giungerebbe agli stessi risultamenti riguardando la luce, quando entra nell'occhio, come animata da due celerità, la prima delle quali sia nella direzione $aT = \gamma$, la seconda in una direzione Tq uguale, e contraria a quella dell'occhio nell'orbita della terra; noi però ci atterremo al primo concetto, come forse più semplice per il lato geometrico. Ciò premesso, passiamo alla risoluzione del seguente

Problema. Determinare rapporto all'ecclittica la posizione della linea Tb, ossia la posizione apparente della stella dal suo luogo vero cangiata in virtù dell'aberrazione della luce, assegnandone la longitudine e latitudine apparente.

392. Indichi, come sopra, la linea TP nel cielo stellato una longitudine $= l$, ed una latitudine $= \lambda$, e la distanza della vera posizione della stella dal centro della terra in T sia $= r$. Le stesse quantità relative alla posizione apparente della stella sieno l', λ', r'. La celerità Ta del raggio luminoso $= \gamma$, dell'occhio $Tt = V$, e la loro risultante Tb sia $= \gamma'$. Riferiscasi inoltre la posizione della stella a tre assi ortogonali delle x, y, z presi al solito sulla linea degli equinozj $S\Upsilon$, sulla sua perpendicolare nel piano dell'ecclittica, e sull'asse dell'ecclittica, e sieno x, y, z le coordinate del luogo vero, x', y', z' le coordinate del luogo apparente. Avremo in primo luogo (§ 64)

$$x = r \cos l \cos \lambda, \quad y = r \operatorname{sen} l \cos \lambda, \quad z = r \operatorname{sen} \lambda, \text{ indi}$$
$$x' = r' \cos l' \cos \lambda', \quad y' = r' \operatorname{sen} l' \cos \lambda', \quad z' = r' \operatorname{sen} \lambda'.$$

Se indichiamo per (r, x), (r, y), (r, z), (r', x), (r', y), (r', z) gli angoli che le linee TP, Tb hanno con gli assi delle x, y, z, dalla Geometria analitica abbiamo

$$\cos(r,x) = \frac{x}{r} = \cos l \cos \lambda; \quad \cos(r,y) = \frac{y}{r} = \operatorname{sen} l \cos \lambda; \quad \cos(r,z) = \frac{z}{r} = \operatorname{sen} \lambda;$$
$$\cos(r',x) = \frac{x'}{r'} = \cos l' \cos \lambda'; \quad \cos(r',y) = \frac{y'}{r'} = \operatorname{sen} l' \cos \lambda'; \quad \cos(r',z) = \frac{z'}{r'} = \operatorname{sen} \lambda'.$$

Decomponendo quindi le celerità γ, γ' in tre paralelle agli assi delle x, y, z, formeremo le seguenti componenti

per γ . . . $\gamma \cos l \cos \lambda$, $\gamma \operatorname{sen} l \cos \lambda$, $\gamma \operatorname{sen} \lambda$
γ' . . . $\gamma' \cos l' \cos \lambda'$, $\gamma' \operatorname{sen} l' \cos \lambda'$, $\gamma' \operatorname{sen} \lambda'$.

Del pari, chiamando l'angolo $TR\Upsilon$ (che la direzione della celerità V dell'occhio fa con l'asse delle x) $= \varphi$, si potrà V decomporre in due paralelle alle x, y, che saranno rappresentate da $V \cos \varphi$, $V \operatorname{sen} \varphi$, la terza nel senso delle z essendo nulla per essere l'asse delle z normale al piano delle x, y. Ora essendo γ' risultante di γ e di V, le componenti della prima devono uguagliare la somma delle componenti delle ultime. Quindi le tre seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} \gamma' \cos l' \cos \lambda' &= \gamma \cos l \cos \lambda + V \cos \varphi \\ \gamma' \operatorname{sen} l' \cos \lambda' &= \gamma \operatorname{sen} l \cos \lambda + V \operatorname{sen} \varphi \\ \gamma' \operatorname{sen} \lambda' &= \gamma \operatorname{sen} \lambda. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

dalla somma dei quadrati delle quali otterrassi

$$\gamma' = \sqrt{[\gamma^2 + 2 \gamma V \cos \lambda \cos (\varphi - l) + V^2]}.$$

Si osservi frattanto che essendo la celerità della luce grandissima in confronto di quella della terra (poichè la luce in poco più di 8′ giunge dal Sole a noi, mentre la terra percorre un picciolissimo arco di circa 20″), potremo, senza incorrere in errore trascurare le potenze di $\frac{V}{\gamma}$ superiori alla prima, e però otterremo

Digitized by Google

$$\gamma' = \gamma\left[1 + \frac{V}{\gamma}\cos\lambda\cos(\varphi - l)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Sarà ora facile determinare i valori di λ', l' per l, λ, $\frac{V}{\gamma}$. In fatti dall' ultima delle equazioni (A) si ha $\operatorname{sen}\lambda' = \frac{\gamma \operatorname{sen}\lambda}{\gamma'} = \operatorname{sen}\lambda - \frac{V}{\gamma}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda\cos(\varphi - l)$; ponendo adunque $\lambda' = \lambda - q$, sarà q picciolissimo, e dell' ordine $\frac{V}{\gamma}$. Quindi $\operatorname{sen}\lambda' = \operatorname{sen}\lambda - q\cos\lambda$. Uguagliando i due valori di $\operatorname{sen}\lambda'$, e determinando il valore di q, si avrà λ' dalla seguente equazione

$$\lambda' = \lambda - \frac{V}{\gamma}\operatorname{sen}\lambda\cos(\varphi - l) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Per determinare l' dividasi la seconda delle equazioni (A) per la prima, ed avrassi $\operatorname{tang} l' = \frac{\gamma \operatorname{sen} l \cos\lambda + V \operatorname{sen}\varphi}{\gamma\cos l\cos\lambda + V\cos\varphi}$, la quale cogli opportuni sviluppi porge $\operatorname{tang} l' = \operatorname{tang} l + \frac{V}{\gamma}\frac{\operatorname{sen}(\varphi - l)}{\cos\lambda\cos^2 l}$. Ponendo $l' = l + q'$, potremo trascurare le potenze di q' oltre la prima, e però sarà $\operatorname{tang} l' = \operatorname{tang} l + \frac{q'}{\cos^2 l}$; confrontando quindi i due valori di $\operatorname{tang} l'$, otterremo il valore di q', donde avremo

$$l' = l + \frac{V}{\gamma}\frac{\operatorname{sen}(\varphi - l)}{\cos\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Resta a determinare l'angolo φ e la celerità V. Quanto a φ, essendo $TRY = RTS + TSY$, se pongasi la longitudine della terra $= L = TSY$, e l'angolo $STR = \iota$, sarà $\varphi = L + \iota$. L'angolo ι, che il raggio vettore ST fa con la tangente, si vedrà facilmente essere determinato dall' equazione $\operatorname{tang}\iota = \frac{r\,d\,v}{d\,r}$; chiamando p il semiparametro dell'orbita, v l'anomalia vera TSB, l'equazione all' ellisse $r = \frac{p}{1 + e\cos v}$ darà $\operatorname{tang}\iota = \frac{1 + e\cos v}{e\operatorname{sen} v}$, donde si otterrà

$$\operatorname{sen}\iota = \frac{1 + e\cos v}{\sqrt{(1 + 2e\cos v + e^2)}}; \quad \cos\iota = \frac{e\operatorname{sen} v}{\sqrt{(1 + 2e\cos v + e^2)}}.$$

Il valore di V viene direttamente dato dall' equazione (13) § 324, che a motivo di $a = 1$, dà $V = U\sqrt{\left(\frac{2}{r} - 1\right)}$, dalla quale, per essere

$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}$, si ottiene $V = U \sqrt{\left(\frac{1 + 2e \cos v + e^2}{p}\right)}$, rappresentando U in queste formule la media celerità della terra.

Se ora nelle equazioni (1), (2) poniamo $\varphi = L + \varepsilon$, sostituendo per V sen ε, V cos ε i precedenti valori, ed inoltre osservando che $v = L - \pi$, se π rappresenta la longitudine del perielio terrestre, otterremo

$$\lambda' = \lambda + \frac{U \operatorname{sen} \lambda}{\gamma \sqrt{p}} [\operatorname{sen}(L - l) + e \operatorname{sen}(\pi - l)] \ldots (1)'$$

$$l' = l + \frac{U}{\gamma \sqrt{p} \cos \lambda} [\cos(L - l) + e \cos(\pi - l)] \ldots (2)'$$

La frazione $\frac{U}{\gamma}$ rappresenta il rapporto fra la media celerità della terra, e la celerità della luce. Se adunque ponghiamo $\gamma = 1$, sarà U l'arco che la terra descriverebbe in virtù del suo moto medio nel tempo dalla luce impiegato a descrivere il semiasse maggiore della sua orbita. Ora dietro i risultamenti del signor De-Lambre fondati sopra le osservazioni degli eclissi dei satelliti di Giove (§ 299) la luce impiega 493″,2 a descrivere il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, nel qual tempo la terra percorre, in virtù del suo moto medio, un arco di 20″,247; quindi sarà il coefficiente $\frac{U}{\gamma \sqrt{p}} = 20'',25$.

Sogliono gli Astronomi per maggior comodo nelle formule (1)′, (2)′ in luogo delle longitudini eliocentriche della terra e del perielio introdurre le longitudini del Sole e del perigeo, che da quelle differiscono sempre di 180°. Ponendo adunque la longitudine del Sole $= ☼$, del perigeo solare $= p$, avremo $☼ = 180 + L$, $p = 180 + \pi$; di più ponendo, come nel quadro del sistema planetario, $e = 0,016780$, otterrassi

$$\lambda' = \lambda - 20'',25 \operatorname{sen}(☼ - l) \operatorname{sen} \lambda - 0'',34 \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen}(p - l) \ldots (1)''$$

$$l' = l - 20,25 \sec \lambda \cos(☼ - l) - 0,34 \sec \lambda \cos(p - l) \ldots (2)''$$

Vedesi ora facilmente che l'ultimo termine dipendente dall'eccentricità dell'orbita terrestre è picciolissimo, e può quasi sempre trascurarsi.

393. *Coroll.* Le differenze $l' - l$, $\lambda' - \lambda$ dagli Astronomi appellate aberrazione in longitudine ed in latitudine, variano con l'angolo $☼ - l$, e poichè nell'intervallo di un anno egli passa per tutti i valori della circonferenza, le quantità $l' - l$, $\lambda' - \lambda$ corrisponderanno a tutti i valori fra il massimo positivo ed il massimo negativo, esaurito il quale periodo, si riprodurranno nello stesso ordine. Così le oscillazioni dipendenti dal moto progressivo della luce, tendenti ad al-

lontanare le stelle dalla loro media posizione, saranno periodiche, ed ogni anno si riprodurranno nello stesso ordine.

Scorgesi poi facilmente dalle formule superiori 1.° *che l' aberrazione in latitudine è* $= o$, *se sia* $☉ - l = o$, *ovvero* $= 180$, *cioè se sia la stella in congiunzione, ovvero in opposizione col Sole*, e per il contrario *è massima verso le quadrature quando* $☉ - l = 90°$, *ovvero* $= 270°$; 2.° *che l' aberrazione in longitudine è massima nelle congiunzioni ed opposizioni, nulla nelle quadrature.*

E poichè gli annui movimenti delle stelle fisse osservati da Bradley e da tutti gli altri Astronomi dopo di lui si uniformano a questi risultamenti, resta confermata l'addotta teoria, e nuova forza riceve l'ipotesi copernicana sul moto della terra.

Problema. Determinare la posizione apparente di una stella rapporto all' equatore, o in altri termini, determinare l' effetto dell' aberrazione in AR ed in declinazione.

394. Potrebbe facilmente ottenersi la soluzione di questo problema dai valori di $d\delta$, $d\alpha$ dati nel § 67, purchè nel secondo membro in luogo di $d\lambda$, dl s' introducessero i valori superiori di $\lambda' - \lambda$, $l' - l$. Ma ben più comodamente risolvesi il proposto problema se la posizione delle linee Ta, Tb (*Fig.* 12) riferiscasi al piano dell' equatore, e tanto la celerità del raggio luminoso, come anche quella dell' occhio risolvansi in tre paralelle a tre assi ortogonali, il primo dei quali sia preso nella linea Υ degli equinozj, il secondo nella sua perpendicolare posta nel piano dell' equatore, ed il terzo nell' asse dell' equatore diretto verso il polo boreale, ai quali assi per ordine daremo il nome di x, y, z. In fatti, ritenute le denominazioni del § 392, indichino α, δ l' AR e declinazione media della stella, α', δ' le stesse quantità affette dall' aberrazione; ragionando come nel citato paragrafo, le componenti di γ, γ' nelle direzioni x, y, z saranno

$$\gamma \cos\alpha \cos\delta\,; \qquad \gamma \operatorname{sen}\alpha \cos\delta\,; \qquad \gamma \operatorname{sen}\delta\,;$$
$$\gamma' \cos\alpha' \cos\delta'\,; \qquad \gamma' \operatorname{sen}\alpha' \cos\delta'\,; \qquad \gamma' \operatorname{sen}\delta'.$$

Del pari la celerità dell' occhio V decomporrassi in primo luogo nelle due $V \cos\varphi$, $V \operatorname{sen}\varphi$, la prima delle quali è diretta nel senso delle x, la seconda lungo una perpendicolare alla linea stessa, ma nel piano dell' eclittica. Chiamisi ora ε l' obbliquità dell' eclittica, e la componente $V \operatorname{sen}\varphi$ essendo compresa in un piano inclinato al piano delle x, y di ε, potrassi decomporre in due $V \operatorname{sen}\varphi \cos\varepsilon$, $V \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varepsilon$, la prima delle quali sarà paralella all' asse delle y, la seconda all' asse delle z. Così le tre componenti di V paralelle ad x, y, z saranno

$$V \cos\varphi\,; \qquad V \operatorname{sen}\varphi \cos\varepsilon\,; \qquad V \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varepsilon\,.$$

Quindi per essere γ' risultante delle velocità γ, V, avremo le equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\gamma' \cos\alpha' \cos\delta' = \gamma \cos\alpha \cos\delta + V \cos\varphi \\ \gamma' \operatorname{sen}\alpha' \cos\delta' = \gamma \operatorname{sen}\alpha \cos\delta + V \operatorname{sen}\varphi \cos\varepsilon \\ \gamma' \operatorname{sen}\delta' = \gamma \operatorname{sen}\delta + V \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varepsilon\end{array}\right\} \text{(B)}$$

Se dalla somma dei quadrati di queste tre equazioni estraesi la radice quadrata, e si trascurano le seconde potenze di $\frac{V}{\gamma}$ ec. otterrassi

$$\gamma' = \gamma[1 + \frac{V}{\gamma}(\cos\alpha \cos\delta \cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha \cos\delta \operatorname{sen}\varphi \cos\varepsilon + \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varepsilon)].$$

Sostituiscasi ora questo valore di γ' nella terza delle equazioni (B), e con riduzioni simili a quelle praticate nel § 392 per trovare da una simile equazione il valore di λ', si troverà

$$\delta' = \delta + \frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta \operatorname{sen}\varphi - \frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}\delta (\cos\alpha \cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\varepsilon),$$

la quale con un poco di attenzione tosto cambiasi in

$$\delta' = \delta + \frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta \operatorname{sen}\varphi - \frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}\delta [\cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(\varphi - \alpha) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(\alpha + \varphi)] \ldots (1)$$

Similmente se la seconda equazione (B) dividasi per la prima, e si facciano le riduzioni, come nel problema precedente, si avrà

$\alpha' = \alpha + \frac{V}{\gamma} \sec\delta (\operatorname{sen}\varphi \cos\alpha \cos\varepsilon - \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi)$, che può scriversi sotto la seguente forma

$$\alpha' = \alpha + \frac{V}{\gamma} \sec\delta [\cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)] \ldots (2)$$

Per eliminare l'angolo φ io osservo che il confronto delle equazioni (1), (2) del problema precedente con le equazioni (1)'', (2)'', qualora pongasi il coefficiente costante $\frac{U}{\gamma\sqrt{p}} = 20'',25 = n$, dà

$$\cos(\varphi - l) V : \gamma = n \operatorname{sen}(☼ - l) + n e \operatorname{sen}(p - l)$$
$$\operatorname{sen}(\varphi - l) V : \gamma = - n \cos(☼ - l) - n e \cos(p - l).$$

Ponendo in queste relazioni successivamente $l = 0, = \alpha, = -\alpha$, si formeranno i valori di $\frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}\varphi$, $\frac{V}{\gamma} \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)$ ec., i quali sostituiti nelle equazioni (1), (2) danno

$$\delta' = \delta - n \operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta \cos☼ - n \operatorname{sen}\delta \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(☼ - \alpha) - n \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(☼ + \alpha)$$
$$- ne \operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta \cos p - ne \operatorname{sen}\delta \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(p - \alpha) - ne \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(p + \alpha);$$

$$\alpha' = \alpha - [n \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(☼ - \alpha) - n \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(☼ + \alpha)] \sec\delta$$
$$- [n e \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(p - \alpha) - n e \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(p + \alpha)] \sec\delta.$$

Se ora si fa $\varepsilon = 23° 28'$, $n = 20'',25$ ed $e = 0,01678$ si avranno per il calcolo dell'aberrazione in AR e declinazione delle stelle le seguenti equazioni

$$\alpha' = \alpha \begin{matrix} -19'',41 \cos(☉ - \alpha) \\ +\ 0\ ,84 \cos(☉ + \alpha) \end{matrix} \Big\} \sec\delta \begin{matrix} -0'',33 \cos(p - \alpha) \\ +\ 0\ ,01 \cos(p + \alpha) \end{matrix} \Big\} \sec\delta\,;$$

$$\delta' = \delta \begin{matrix} -8'',06 \cos ☉ \\ -0\ ,14 \cos p \end{matrix} \Big\} \cos\delta \begin{matrix} -19'',41 \operatorname{sen}(☉ - \alpha) \\ -\ 0\ ,33 \operatorname{sen}(p - \alpha) \end{matrix} \Big\} \operatorname{sen}\delta \begin{matrix} -0'',84 \operatorname{sen}(☉ + \alpha) \\ -0\ ,01 \operatorname{sen}(p + \alpha) \end{matrix} \Big\} \operatorname{sen}\delta.$$

Queste formule possono ridursi in tavole comode, di varia forma, secondo le diverse trasformazioni che vi s'introducono, fra le quali quelle del signor De-Lambre, e quelle anche dal signor dott. Gauss immaginate sono molto utili e comode alla pratica.

395. Il valore δ' riferito di sopra porge un metodo molto pronto per dedurre il valore di n dalle osservazioni fatte nel corso di un anno. Si sottragga dalle declinazioni osservate la precessione fra il principio dell'anno e l'epoca di ciascheduna; avendole così ricondotte alla media posizione, che ha luogo nel principio dell'anno, si confrontino la massima colla minima declinazione osservata. Sia δ'' la massima declinazione, δ' la minima. Calcolando a numeri il coefficiente di n per questi due istanti, supponiamo che si ottenga $\delta'' = \delta + f n$, $\delta' = \delta - f' n$, avremo $n = \dfrac{\delta'' - \delta}{f + f'}$.

In questo modo Bradley, ed in seguito De-Lambre hanno potuto con ogni precisione determinare n, il quale a De-Lambre risultò $= 20'',253$, che non differisce sensibilmente da quello superiormente adoperato.

Le stelle che passano in vicinanza del zenit sono da preferirsi, perchè l'incertezza nelle osservazioni dipendente dallo stato dell'atmosfera sparisce quasi del tutto. Qui poi conviene osservare che se aspirisi all'ultima precisione nel valore di n, conviene spogliare le declinazioni osservate dai movimenti periodici della nutazione, ed anche dai moti proprj di ciascuna stella, se taluno siasi manifestato in una lunga serie di anni; in una parola convien allontanare qualunque altro movimento, e non lasciare che quello dipendente dall'elemento da determinarsi.

Dell'aberrazione dei pianeti e delle comete.

396. Le cose esposte nei numeri precedenti danno l'effetto dell'aberrazione della luce nelle stelle fisse; ma se il corpo da cui emana la luce sia egli stesso in moto nello spazio, in allora il raggio luminoso oltre la sua propria velocità è pure animato dalla celerità dell'astro da cui parte; quindi la percossa nella nostra retina fassi nella direzione della risultante delle velocità, dalle quali sono animati l'astro, il raggio luminoso, e l'occhio a cui si deve attribuire una velocità uguale, e contraria a quella della terra nella sua orbita, come

sopra abbiamo fatto osservare. È facile determinare dietro i principj della dinamica la direzione di questa risultante, e ricavarne la posizione apparente dell'astro, operando come nei §§ precedenti abbiamo praticato. Può vedersi questo problema trattato con tutta la generalità ed eleganza nel volume III del Trattato di Astronomia fisica del signor Biot (seconda edizione, Parigi 1811 pag. 147 e seg.), mentre noi per servire alla brevità ci limiteremo alla seguente costruzione.

Sia ad un istante qualunque il pianeta in P, la terra in T (*Fig.* 13). Egli è in primo luogo palese dalla meccanica che la direzione e grandezza della risultante delle tre velocità, cioè della luce, della terra e del pianeta è la stessa, sia che suppongasi il caso della natura, sia che fingasi la terra in quiete nel punto T, e si consideri il pianeta animato da una nuova velocità uguale, e contraria a quella da cui in realtà è animata la terra. In questa ultima supposizione descriva il pianeta in virtù del suo moto relativo intorno alla terra lo spazio $P\,p$ nel tempo dalla luce impiegato a descrivere la sua distanza $P\,T = r'$ dal centro della terra. Sopra $P\,T$, $P\,p$ descritto il paralellogrammo $P\,T\,t\,p$, sarà $t\,P$ la risultante delle velocità, che animano la molecola luminosa nel momento in cui entra nel nostro occhio, e quindi la visione farassi lungo la $t\,P$, o lungo la sua paralella $T\,H$. L'angolo $H\,T\,P = P\,t\,p$ rappresenta l'effetto dell'aberrazione della luce nella posizione geocentrica del pianeta. Ora esprimendo $P\,p$ il moto relativo del pianeta intorno alla terra nel tempo dalla luce impiegato a descrivere $P\,T$, sarà $P\,T\,p$ la quantità di cui varia nella sfera celeste la posizione geocentrica del pianeta per lo stesso tempo; donde deducesi

1.° *L'aberrazione del pianeta in longitudine, in latitudine, in AR, od in declinazione è uguale al movimento geocentrico del pianeta in longitudine, latitudine, AR, o declinazione per il tempo dalla molecola luminosa impiegato a giungere dal pianeta fino alla terra.*

2.° *Per l'effetto dell'aberrazione il pianeta apparisce trasportato in senso contrario al suo moto geocentrico.* In tal guisa se è diretto, l'aberrazione togliesi dalla posizione media per avere la posizione apparente, il contrario accade se è retrogrado.

397. È facile da quanto abbiamo detto dedurre le formule per il calcolo dell'aberrazione dei pianeti. Sia n'' il moto diurno geocentrico in una determinata direzione, per esempio in longitudine; r' la distanza $T\,P$ del pianeta dalla terra espressa in parti della distanza media della terra dal Sole. Troverassi il tempo che la luce impiega a percorrere la linea $T\,P$ colla proporzione $1 : 493'',2 :: r' : x$ ($493'',2$ essendo il tempo impiegato dalla luce a descrivere la distanza media del Sole dalla terra § 299). Sarà così $x = 493'',2\,r'$. Quindi se in

24^h il pianeta descrive l'arco n'' in longitudine, nel tempo $493'',2\ r'$ descriverà l'arco $\frac{493'',2}{24^h}\ n''\ r' = \frac{493'',2}{86400''}\ n''\ r'$.

Se pertanto chiamasi P la posizione geocentrica libera dall'aberrazione, P' la stessa posizione affetta dall'aberrazione, fra P, P' esisterà la seguente equazione

$$P' = P - \frac{493,2}{86400}\ n''\ r' = P - 0,0057083\ n''\ r'.$$

Se sarà il numero n'' espresso in secondi, sarà la cercata aberrazione data essa pure in secondi.

Se sia n' il numero dei minuti contenuti in n'', sarà $n'' = 60\ n'$, e però $P' = P - 0,3425\ n'\ r'$.

Se poi invece del moto diurno vorrassi fare uso del moto orario, indicando per v'', v' il moto orario espresso in minuti secondi od in minuti primi, sarà $n'' = 24\ v''$, $n' = 24\ v'$, e però avremo

col mezzo del moto orario in secondi di grado $P' = P - 0,137\ v''\ r'$
minuti di grado $P' = P - 8,220\ v'\ r'$,

le quali formule tutte daranno l'aberrazione della luce nei pianeti e nelle comete espressa in secondi, qualora conoscasi il loro moto diurno, od il moto orario, e la loro distanza dalla terra.

Il moto geocentrico può dedursi dalle osservazioni; la distanza deve sempre calcolarsi. Egli è poi da osservarsi che non richiedendosi nel valore di r' tutta la precisione, a motivo della picciolezza dell'aberrazione, potrà esso calcolarsi con quattro cifre decimali, e quindi ottenersi senza molta fatica. Ma se non potesse ottenersi il moto geocentrico dalle osservazioni o da un'effemeride, si dovrà calcolare coi precetti del § 252; che anzi le equazioni (13), (14) del § 252 moltiplicate per i superiori coefficienti costanti daranno immediatamente le formule per il calcolo dell'aberrazione in longitudine ed in latitudine pei pianeti sotto una forma bastantemente comoda. Vedasi l'Astronomia del signor De-Lambre, ove trovansi le indicate formule ridotte a numeri per tutti i pianeti del nostro sistema solare, come anche le tavole speciali di aberrazione del signor Zach, e varie altre opere che diffusamente trattano questo importante argomento.

398. *Scolio I.* I precetti superiori vagliono eziandio per calcolare l'aberrazione solare e lunare. La prima (se trascurisi l'eccentricità dell'orbita della terra) ottiensi facendo $n' = 59'\ 8'',33 = 59',155$, $r' = 1$, donde rilevasi longit. appar. di Sole = sua longit. vera $- 20'',25$. Le tavole solari danno la longitudine del Sole affetta dall'aberrazione; se vogliasi perciò essa ottenere scevra dalla medesima, dovrassi alla longitudine calcolata aggiungere $20'',2$.

Del pari l'aberrazione lunare otterrassi dalla formula

$P' = P - 0,3425\, n' r'$, ponendo $n' = 13^{\circ}\ 10',6 = 790',6$, $r' = 0,0025147$, lo che darà $P' - P = -0'',7$. L'aberrazione della Luna (trascurando pure in questo argomento l'irregolarità dei suoi moti) è costante, ed è valutata nelle epoche. L'aberrazione in latitudine è anche molto minore, e può trascurarsi. L'aberrazione poi nei pianeti è variabile a motivo delle variazioni del moto diurno, e delle grandi loro distanze. Non comprendesi nelle tavole, mentre queste danno le loro posizioni come se la luce in un istante da essi giungesse fino a noi; dovrà perciò calcolarsi coi precetti del § precedente.

399. *Scolio II.* Il moto diurno della terra produce esso pure una nuova variazione nella posizione degli astri, a cui può darsi il nome di *aberrazione diurna*. In fatti chiamando V la celerità rotatoria di quel punto della terra in cui trovasi l'occhio dell'osservatore, γ la celerità progressiva della luce, α l'AR vera di un astro, δ la sua declinazione, è chiaro che potransi a questo caso applicare parola per parola i ragionamenti del § 392, cambiando soltanto λ in δ, l in α, e la longitudine L della terra nell'AR del punto culminante, ossia nel tempo siderale ridotto a gradi, poichè questo determina ad ogni istante la posizione dell'osservatore rapporto all'equinozio mobile di primavera. Ponendo pertanto il tempo siderale in gradi $= \theta$, l'AR appar. dell'astro $= \alpha'$, la declinazione apparente $= \delta'$, ed in luogo di $\frac{U}{\sqrt{p}}$ scrivendo V, le equazioni (1)', (2)', qualora considerisi la terra come sferica, daranno

$$\alpha' = \alpha + \frac{V}{\gamma \cos \delta} \cos(\theta - \alpha); \quad \delta' = \delta + \frac{V}{\gamma} \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}(\theta - \alpha).$$

La celerità V dell'occhio sarà l'arco, di cui la terra ruota da occidente verso oriente in $8'\ 13'',2$ se considerasi l'occhio sotto l'equatore terrestre. Ma se considerasi l'occhio sotto un paralello alla latitudine L, V rappresenterà un arco di paralello simile al precedente dell'equatore, e perciò uguale a quello moltiplicato per $\cos L$ (Trig. XVIII osserv.). Ora in $8'\ 13'',2$ la terra ruota di $2^{\circ}\ 3'\ 18''$, quindi $V = (2^{\circ}\ 3'\ 18'') \cos L = 7398'' \cos L$. Tale in fatti sarebbe la misura della celerità dell'occhio se il raggio terrestre fosse $= 1$. Ma essendosi stabilita la distanza media della terra dal Sole per unità di misura, è chiaro che la rotazione terrestre deve rappresentarsi per $(2^{\circ}\ 3'\ 18'')\, r \cos L$, r rappresentando il raggio dell'equatore terrestre. Per altra parte, γ essendo la distanza media della terra dal Sole, abbiamo (§ 112) $r = \gamma \operatorname{sen} p = \gamma \operatorname{sen} 8'',8$. Introducendo adunque questo valore di r, avremo $V = \gamma\, 7398'' \operatorname{sen} 8'',8 \cos L = \gamma\, 0'',34 \cos L$. Sostituito questo valore di V in α', δ', avremo per calcolare l'effetto dell'aberrazione diurna in AR ed in declinazione le equazioni seguenti

$\alpha' - \alpha = 0'',34 \cos(\theta - \alpha) \sec \delta$, $\delta' - \delta = 0'',34 \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \operatorname{sen} \delta$, nelle quali $\theta - \alpha$ rappresenta l'angolo orario dell'astro contato da zero fino a 360°.

Sarebbe ora facile valutare l'effetto dell'aberrazione diurna nella longitudine e nella latitudine degli astri; noi però non ci tratterremo in questa ricerca, poichè chiaro apparisce dalle cose precedenti che è molto picciolo, e trascurabile nelle osservazioni.

II. Dell'annua paralasse delle stelle fisse.

400. Oltre l'aberrazione della luce, di cui abbiamo parlato nei §§ precedenti, il moto annuo della terra deve produrre un altro movimento apparente nelle stelle fisse, a cui dassi dagli Astronomi il nome di *paralasse annua*, della quale qui brevemente parleremo.

Rappresenti (*Fig.* 14) TT' l'orbita della terra intorno al Sole, sia L una stella, la quale veduta dal Sole S apparirebbe nel punto s del cielo stellato, ma veduta dalla terra sembra nell'anno descrivere intorno al punto s una picciola ellisse tt'; ed in particolare quando la terra trovasi in T', la stella apparisce in un punto t diverso dal punto s. L'angolo TLS, che misurà nel cielo stellato l'arco di circolo massimo condotto per s e per t appellasi *paralasse annua* della stella. Quindi accade che fingendo fissa la stella nello spazio, la sua longitudine e la sua latitudine, che veduta dal centro del Sole sarebbe costante, veduta dal centro della terra deve continuamente variare. Egli è poi abbastanza palese per se, che data la longitudine e latitudine eliocentrica della stella, si otterrà la sua longitudine e la sua latitudine geocentrica cogli stessi precetti e colle stesse formule che abbiamo date per trovare la posizione geocentrica di un pianeta col mezzo dell'eliocentrica (§ 242). Se adunque, come nell'indicato luogo, l, l' rappresentano la longitudine eliocentrica e geocentrica della stella, λ, λ' la sua latitudine eliocentrica e geocentrica, r la distanza della stella dal Sole, R quella della terra dal Sole, L la longitudine della terra, avremo per il num. 2.° del citato paragrafo

$$\operatorname{tang}(l'-l) = \frac{R \operatorname{sen}(l-L)}{r \cos\lambda - R \cos(l-L)}\,;\quad \operatorname{tang}\lambda' = \frac{\operatorname{tang}\lambda \cos(l'-l)}{1 - R\cos(l-L) : r\cos\lambda}.$$

Ora tutte le più esatte osservazioni fatte da Bradley e dagli Astronomi a lui posteriori attestano, che corrette le longitudini e latitudini delle stelle dall'annuo loro movimento dipendente dall'aberrazione, non sono sottoposte ad altre annue variazioni per lo meno sensibili alle osservazioni ed agli stromenti più esatti, o se qualche variazione annua si è in esse manifestata, è questa sì picciola che può reputarsi dell'ordine degli errori inevitabili delle osservazioni.

Digitized by Google

Quindi le differenze $l' - l$, $\lambda' - \lambda$ sono assolutamente nulle od almeno sì picciole, che possono senza scrupolo negligersi le loro potenze superiori alla prima. Risulta da ciò che l'angolo TLS è estremamente picciolo, e però le distanze TL, SL grandissime in confronto di TS. Svolgendo in serie le due superiori equazioni, e trascurando i quadrati di $\frac{R}{r}$, $l' - l$, con le opportune riduzioni troveremo

$$l' - l = \frac{R}{r} \sec \lambda \operatorname{sen} (l - L) = \frac{R}{r} \sec \lambda \operatorname{sen} (☼ - l)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{r} \operatorname{sen} \lambda \cos (l - L) = - \frac{R}{r} \operatorname{sen} \lambda \cos (☼ - l)$$

nelle quali ☼ esprime la longitudine del Sole, che è $= 180^\circ + L$.

Confrontando queste formule con quelle rappresentanti l'effetto dell'aberrazione in longitudine ed in latitudine, cioè con le seguenti $l' - l = - 20'',25 \sec \lambda \cos (☼ - l)$, $\lambda' - \lambda = - 20'',25 \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} (☼ - l)$, facilmente si vede che sì le une, come le altre tendono ad alterare la media posizione della stella di una quantità variabile per modo, che ogni anno si ripristina, riconducendo ad una stessa longitudine del Sole la medesima correzione. Ma queste picciole correzioni operano in senso opposto. Così mentre la stella è in congiunzione od in opposizione col Sole, la correzione delle longitudini dipendente dalla paralasse è $= 0$, ed è massima quella dipendente dall'aberrazione; viceversa nelle quadrature massima è la prima correzione, la seconda $= 0$. In generale ponendo $20'',25 = n$, le formule rappresentanti l'aberrazione cambiansi in quelle relative alla paralasse, se pongasi $\frac{R}{r}$ in luogo di n, $90^\circ + ☼$ in luogo di ☼.

Egli è ora facile vedere che eziandio le formule rappresentanti i movimenti dipendenti dall'aberrazione in AR ed in declinazione si cangeranno in quelle rappresentanti i movimenti dipendenti dalle paralassi annuali nelle medesime direzioni, se porremo nelle prime $\frac{R}{r}$ in luogo di n, $90^\circ + ☼$ in luogo di ☼. Avremo in tal guisa (facendo $e = 0$)

$$\text{par. in } AR = \alpha' - \alpha = \frac{R}{r} [\cos^2 \tfrac{1}{2} \iota \operatorname{sen} (☼ - \alpha) - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \iota \operatorname{sen} (☼ + \alpha)] \sec \delta ;$$

$$\text{par. in decl.} = \delta' - \delta = \frac{R}{r} \operatorname{sen} \iota \cos \delta \operatorname{sen} ☼$$

$$- \frac{R}{r} \operatorname{sen} \delta [\cos^2 \tfrac{1}{2} \iota \cos (☼ - \alpha) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \iota \cos (☼ + \alpha)] .$$

401. Le formule del § precedente porgono il modo di determinare la distanza delle stelle dal Sole, se siasi osservata la massima paralasse in longitudine ed in latitudine, ovvero anche in AR ed in declinazione. Supponiamo in fatti che siasi determinata con ogni cura la longitudine di una stella nelle sue quadrature col Sole, quando cioè $☉ - l = 90°$, ovvero $= 270°$, e sia essa nella prima quadratura $= l'$, nella seconda $= l''$. Si avrà $l' - l = \frac{R}{r} \sec \lambda$, $l'' - l = -\frac{R}{r} \sec \lambda$, donde si otterrà $l' - l'' = \frac{2R}{r} \sec \lambda$, e però $r = \frac{2R}{(l' - l'') \cos \lambda}$.

Una simile conseguenza deducesi dalle paralassi in latitudine osservate verso l'opposizione e la congiunzione della stella col Sole, quando cioè $☉ - l = 180°$, ovvero $= 0$. In fatti indicando per λ' la latitudine geocentrica in opposizione, e per λ'' quella in congiunzione, otterrassi $\lambda' - \lambda = + \frac{R}{r} \operatorname{sen} \lambda$, $\lambda'' - \lambda = - \frac{R}{r} \operatorname{sen} \lambda$; se ne dedurrà $r = \frac{2R \operatorname{sen} \lambda}{\lambda' - \lambda''}$. È inutile poi osservare che in queste formule i piccioli archi $l' - l''$, $\lambda' - \lambda''$ devono per la legge degli omogenei ridursi in parti di raggio, o, ciò che torna lo stesso, cambiarsi con i loro seni. Quindi avremo $r = \frac{2R}{\cos \lambda \operatorname{sen} (l' - l'')} = \frac{2R \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} (\lambda' - \lambda'')}$.

402. *Scolio*. Molti chiarissimi Astronomi si sono accinti a determinare gli annui movimenti delle stelle fisse prodotti dalla paralasse; ma fino ad ora tutti i tentativi sono stati presso che inutili, e non hanno condotto che a risultamenti dubbiosi. Bradley dopo di avere applicato alla media posizione delle stelle del Dragone, da esso particolarmente con somma diligenza osservate, i movimenti periodici dell'aberrazione e nutazione, trovò fra le osservazioni fatte in diversi tempi un sì gran le accordo, che non dubitò di escludere da esse una paralasse annua di un solo minuto secondo.

Herschel con i fortissimi suoi telescopj, e con un nuovo esattissimo micrometro si pose in particolare ad osservare le stelle doppie molto fra loro diverse in luce e grandezza. Partendo dall'ipotesi (in vero gratuita) che le stelle più deboli debbano riguardarsi come di gran lunga più lontane, e per conseguenza prive di paralasse rapporto alle più splendenti, procurò d'indagare le variazioni della loro scambievole posizione nelle diverse stagioni dell'anno; ma nulla di certo ha potuto dedurre da questo genere di osservazioni, sebbene fatte con tutta la diligenza.

Piazzi confrontando le declinazioni delle principali stelle osservate in diversi tempi ed in diversi anni, sospettò l'esistenza della paralasse

in alcune di esse (vol. XII della Società italiana), e presentò i seguenti risultamenti: *Aldebaran paralasse* 1″,5, *Capra* 1″,0, *Sirio* 4″,0, *Procione* 3″,0, *Wega* 2″,0, *Atair* 0″,0, *Arturo* 0″,0. Ma su questi medesimi risultamenti sparge il P. Piazzi dei dubbj, e richiede nuove osservazioni per confermarli.

Calandrelli professore d'astronomia in Roma intraprese (Opuscoli astronomici e fisici, Roma 1806) una nuova serie di osservazioni per determinare la paralasse delle stelle, ed in particolare di Wega, che egli reputa di 9″,0. Una paralasse sì forte sfuggita alle ricerche di Herschel e di Piazzi può far sospettare dell'esattezza dello stromento adoperato dal signor Calandrelli, e ciò tanto più che leggesi nell'Astronomia di De-Lambre (vol. III pag. 42) che il signor Pond, diligentissimo osservatore, e successore di Maskelyne all'Osservatorio di Greenwich, con un esattissimo e nuovo circolo dalle sue osservazioni su questa stessa stella, non vi ha riconosciuto paralasse sensibile, la quale, se esiste, non potrebbe sorpassare la picciola quantità 0″,26.

Può raccogliersi da tutto ciò che le stelle fisse non sono sottoposte ad una paralasse annua sensibile, e quindi devono essere da noi situate in distanza pressochè infinita. In fatti se per una stella situata verso i poli dell'ecclittica fosse la paralasse = 1″, sarebbe la massima differenza delle latitudini nell'anno $= \lambda' - \lambda'' = 2''$; perciò si avrebbe $r = \frac{2\,R \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen}(\lambda' - \lambda'')} = \frac{2\,R \operatorname{sen} 90^\circ}{\operatorname{sen} 2''} = \frac{R}{\operatorname{sen} 1''} = 206265\,R$, se per R prendasi la distanza media della terra dal Sole in semidiametri terrestri, che è = 23446 (§ 113), avrassi $r = 1836084000$ semidiametri terrestri.

III. Movimenti delle stelle dipendenti dalla nutazione dell'asse terrestre.

403. Bradley dopo di avere sì felicemente spiegato gli annui movimenti delle stelle colla sua teoria dell'aberrazione, si applicò con istancabile assiduità a confrontarla coll'osservazione, ed è chiaro che se le stelle sono realmente fisse nello spazio, applicando alla loro posizione media calcolata coi precetti dei §§ 385 e seg. le picciole correzioni indicate dall'aberrazione, egli doveva ottenere precisamente le posizioni osservate, per lo meno facendo astrazione dai piccioli errori delle osservazioni, i quali in una lunga serie, per essere ora positivi, ed ora negativi, si elidono. Questa esatta coincidenza non aveva luogo, e ben tosto discoprì un altro picciolo movimento pure periodico, il quale tendeva ad alterare le medie declinazioni di circa 18″, e ripristinavasi nell'intervallo di 18 anni circa. Aveva già il sublime genio di Newton dietro la teoria della sua universale attrazione dimo-

strato che supposta la terra sferoidica, l'azione della Luna sullo sferoide terrestre doveva alcun poco allontanare l'asse di rotazione dalla sua media posizione, per modo che i poli dell'equatore celeste sembrassero descrivere intorno ad essa un picciolo circoletto nell'istesso tempo, in cui il nodo ascendente dell'orbita lunare retrogradando compie la sua rivoluzione nell'eclittica, tempo che (come abbiamo veduto al § 143) corrisponde a 18 anni e 228 giorni. Esistendo una tale oscillazione dell'asse terrestre, vide Bradley che dovevano le AR e declinazioni delle stelle essere sottoposte ad una periodica ondulazione intorno ad uno stato medio, la quale si sarebbe esaurita nell'intervallo di 18 anni e 228 giorni, e perciò non esitò ad attribuire all'indicata cagione i movimenti periodici delle stelle da esso osservati, e rese pubblica la sua scoperta con una lettera a milord Macclesfield li 31 Dicembre 1747, nella quale presentò i risultamenti di una serie di osservazioni di circa 20 anni. Ecco brevemente come determinò l'ampiezza del circolo che il polo vero sembra descrivere intorno al polo medio.

Egli prese in particolare di mira le declinazioni di molte stelle che passando vicino al zenit del suo Osservatorio, venivano da lui con molta esattezza osservate, nè erano sottoposte ad incertezza per parte della rifrazione, ed avendo determinato la loro massima e minima declinazione rapporto all'equatore coll'applicare alle osservazioni la opportuna correzione della precessione e dell'aberrazione, prese di esse il medio, ed è chiaro che ottener doveva la declinazione media rapporto ad un equatore fisso, il quale avrebbe dovuto costantemente aver luogo senza la nutazione dell'asse, e da questa media declinazione confrontata con la declinazione vera arguisce la posizione del polo medio rapporto al polo vero. Avendo ottenuto la declinazione media di molte stelle, ecco cosa presenta il confronto delle declinazioni osservate con le declinazioni medie, e col nodo della Luna.

404. Sia (*Fig.* 15) $\Upsilon E \Omega$ l'equatore medio, a cui spetta il polo P; $\Upsilon C \Omega$ l'eclittica, e sia il nodo in Υ di modo che l'orbita della Luna sia $\Upsilon L \Omega$. In questa posizione della sfera le stelle che sono nel circolo $\Upsilon P \Omega$ avendo una $AR = 0°$, od $= 180°$ hanno la loro declinazione apparente eguale alla declinazione media, mentre quelle che hanno l'$AR = 90$, ossia sono situate nel circolo PCE, hanno la declinazione di $9''$ maggiore della media, e quelle sul prolungamento di EP hanno la declinazione di $9''$ minore della media. Le stelle corrispondenti alle ascensioni rette intermedie avranno le loro declinazioni variate fra gl'indicati limiti. Quindi è che l'equatore, a cui riferisconsi le osservazioni, non sarà il medio $\Upsilon E \Omega$, ma bensì un altro piano $\Upsilon E' \Omega$ a quello inclinato di $9''$, come nella figura è disegnato, ed il suo polo sarà da P disceso in A, di modo che sia $BA = 90°$.

Giunto il nodo col suo moto retrogrado a 9° di longitudine, le declinazioni apparenti delle stelle situate nel coluro dei solstizj, cioè nel circolo EP erano uguali alle declinazioni medie, mentre quelle corrispondenti a 0° di AR avevano una declinazione apparente di 9″ più grande della media, e le opposte verso 180° di AR avevano invece diminuito di 9″ in declinazione, donde, come per l'altro caso dedurrassi che il polo dell'equatore era da A passato in B.

Esaminando del pari in altri punti i rapporti fra le posizioni del nodo dell'orbita della Luna, e le variazioni delle declinazioni delle stelle, si perviene a dimostrare che *mentre ravvolgesi il nodo per moto retrogrado intorno all'ecclittica, il polo vero dell'equatore ravvolgesi pure intorno al polo medio con moto retrogrado in un picciolo circolo di 9″ di raggio, per modo che sia sempre in esso di 90° più avanzato del nodo*. In tal guisa se ad un istante qualunque corrisponda il nodo ad una longitudine Ω valutata da Υ nell'ecclittica, il polo sarà nel suo circolo in un punto O tale (*Fig.* 16) che sia $BPO = 90 + \Omega$. Preso $Ob = Pa = 90$, e descritto col polo O un circolo massimo, rappresenterà questo l'equatore apparente, ed Υ', intersezione di esso con l'ecclittica, sarà l'*equinozio apparente*, a cui riferisconsi le AR e declinazioni osservate, ed affette dal moto oscillatorio del polo, mentre Υ rappresenta la media posizione dell'equinozio, o (come dicono gli Astronomi) l'*equinozio medio*. Del pari l'angolo in Υ' rappresenta l'obbliquità apparente dell'ecclittica rapporto all'equatore, mentre l'angolo in Υ rappresenta l'*obbliquità* media per la data epoca determinata colle formule del § 386.

Dalla riferita costruzione ne siegue, che in virtù della nutazione l'ecclittica rimane fissa; perciò sono le latitudini delle stelle inalterabili, mentre tutte le longitudini vengono diminuite della quantità $\Upsilon\Upsilon'$. Variano poi tanto le ascensioni rette, come anche le declinazioni, e l'equinozio apparente va oscillando intorno all'equinozio medio, mentre l'obbliquità dell'ecclittica essa pure oscilla intorno al medio suo valore di quantità picciolissime, che determineremo nelle due seguenti proposizioni.

405. *Data la longitudine Ω del nodo ascendente dell'orbita lunare, e la media obbliquità dell'ecclittica, domandasi l'obbliquità apparente, e la correzione delle longitudini $\Upsilon\Upsilon'$.*

Supponiamo (*Fig.* 16) che $\Upsilon C \Omega$ sia l'ecclittica, $\Upsilon I a$ l'equatore medio avente il suo polo in P, e descrivasi intorno a P un circolo col raggio $PO = 9''$. Preso poi l'angolo $BPO = 90° + \Omega$, sarà in O il polo vero, e prolungato PO in b, sicchè $Ob = 90°$, e descritto l'equatore apparente $\Upsilon' I b$, che seghi l'equatore medio in I, sarà I polo di Pb per essere retti gli angoli in a, b.

Quindi $aI = bI = 90$; e l'angolo in I misurato da $ab = PO$

sarà $= 9''$. L'arco $a\Upsilon$ dell'equatore misurando l'angolo BPO sarà $= 90° + \Omega$, e perciò $\Upsilon I = \Omega$. Posto ciò, nel triangolo sferico $\Upsilon I \Upsilon'$, ponendo $\Upsilon\Upsilon' = \psi$, l'angolo in $\Upsilon = \omega$, l'angolo in $\Upsilon' = 180 - \omega'$, avremo $\cos \Upsilon I = \cos \Omega = \frac{-\cos \omega' + \cos 9'' \cos \omega}{\text{sen } 9'' \text{ sen } \omega}$, la quale trascurando il quadrato del seno di $9''$ darà $\cos \omega - \cos \omega' = 9'' \text{ sen } \omega \cos \Omega$, e da essa con i soliti sviluppi si otterrà

$$\omega' = \omega + 9'' \cos \Omega \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

che ci darà l'obbliquità apparente dell'ecclittica espressa per la media. Lo stesso triangolo darà $\text{sen } \Upsilon\Upsilon' = \frac{\text{sen } I \text{ sen } \Upsilon I}{\text{sen } \Upsilon\Upsilon' I} = \frac{\text{sen } 9'' \text{ sen } \Omega}{\text{sen } \omega'}$, dalla quale trascurando i quadrati del seno di $9''$, ottiensi

$$\Upsilon\Upsilon' = \psi = \frac{9'' \text{ sen } \Omega}{\text{sen } \omega} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Quindi se di un qualunque astro la longitudine rapporto all'equinozio medio sia $= l$, e rapporto all'equinozio apparente $= l'$, avremo

$$l' = l - \frac{9'' \text{ sen } \Omega}{\text{sen } \omega} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

406. *Data l'AR e la declinazione di un astro rapporto all'equatore medio, trovare la sua AR, e la sua declinazione rapporto all'equatore apparente.*

Si otterrà la soluzione trigonometrica di questo problema se dalla longitudine l del dato astro valutata dall'equinozio medio Υ toglierassi il picciolo arco $\Upsilon\Upsilon'$, e quindi mediante la longitudine così ridotta, che appelleremo l', la latitudine λ dell'astro supposta costante, e l'obbliquità apparente ω' dell'ecclittica calcoleremo l'AR e la declinazione colle formule (A), o con le loro derivate del § 64. Si avrà così la sua posizione rapporto all'equatore apparente $\Upsilon' I b$. Siccome però le differenze fra l ed l', ω ed ω' sono molto picciole, è chiaro che si manterranno eziandio molto picciole le differenze fra l'AR media ed apparente, come anche fra le declinazioni media ed apparente. Ponendo pertanto l'AR media $= \alpha$, l'AR apparente $= \alpha'$, la declinazione media $= \delta$, la declinazione apparente $= \delta'$, potremo riguardare le indicate differenze come differenziali, dimodochè abbiasi $l' = l + dl$, $\omega' = \omega + d\omega$, $\alpha' = \alpha + d\alpha$, $\delta' = \delta + d\delta$, ed in questa supposizione si dedurranno i valori di $d\alpha$ e di $d\delta$ dai differenziali delle citate equazioni (A), nelle quali porrassi ω in luogo di ε, e si farà variare tutto a riserva di λ. Così il differenziale della terza, avendo riguardo alle altre due equazioni, darà

$$d\delta = \cos \alpha \text{ sen } \omega \, dl + \text{sen } \alpha \, d\omega \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Il differenziale della prima di esse porge

$\cos\alpha \operatorname{sen}\delta\, d\delta \mp \operatorname{sen}\alpha \cos\delta\, d\alpha = \cos\lambda \operatorname{sen} l\, d l$; sostituendo in questa equazione il precedente valore di $d\delta$, e per $\cos\lambda \operatorname{sen} l$ il suo valore preso dalla seconda delle equazioni (B) dello stesso paragrafo, si avrà

$$d\alpha = (\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tang}\delta \operatorname{sen}\alpha)\, d l - \operatorname{tang}\delta \cos\alpha\, d\omega \quad . \; . \; . \; (2)$$

Ponendo ora nelle equazioni (1), (2) in luogo di $d l$, $d\omega$ i loro valori presi dalle equazioni (1), (3) del § precedente, cioè

$$d l = l' - l = -\frac{9'' \operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}, \quad d\omega = \omega' - \omega = 9'' \cos\Omega,$$

colle opportune riduzioni otterremo

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \alpha' - \alpha = -9'' \cot\omega \operatorname{sen}\Omega - 9'' \operatorname{tang}\delta \cos(\alpha - \Omega) \\ d\delta &= \delta' - \delta = +9'' \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

le quali esprimono l'effetto della nutazione nelle AR e declinazioni degli astri.

407. *Scolio I.* Suppongono le formule precedenti che il polo vero dell'equatore avvolgasi intorno al polo medio in un circolo di 9″. Sebbene esse rappresentino assai lodevolmente le variazioni osservate nelle ascensioni rette e declinazioni, lasciano tuttavia sussistere alcuni piccioli movimenti nelle stelle, dei quali si accorse lo stesso Bradley, e sentì la necessità di far muovere il polo non in un circolo, ma in un' ellisse poco dal circolo diversa, donde risultano alcune picciole differenze nei valori di $d l$ e di $d\omega$. I celebri geometri d'Alembert e La-Place colla teoria della universale attrazione hanno dimostrato che in fatti il movimento oscillatorio del polo non facevasi in un circolo, ma bensì in un' ellisse, e dalla teoria di quest' ultimo si raccolgono i seguenti valori di $d l$, $d\omega$; $d l = -\frac{19'',2}{\operatorname{tang} 2\omega} \operatorname{sen}\Omega$; $d\omega = 9'',6 \cos\Omega$, indicandosi per Ω la media longitudine del nodo lunare.

Di più anche l'attrazione solare sullo sferoide terrestre produce una nuova oscillazione sull'asse della terra minore della precedente, alla quale si è dato il nome di *nutazione solare* per distinguerla dalla precedente appellata *nutazione lunare*. In virtù di questa ultima azione l'equinozio apparente scostasi dall'equinozio medio di una quantità $d l = -\frac{0'',43}{\operatorname{tang}\omega} \operatorname{sen} 2\odot$, e l'obbliquità varia di $d\omega = 0'',43 \cos 2\odot$, ove $\odot$ rappresenta la longitudine del Sole. Così le variazioni complete di l ed ω per le due indicate cause saranno

$$d l = -\frac{19'',2}{\operatorname{tang} 2\omega} \operatorname{sen}\Omega - \frac{0'',43}{\operatorname{tang}\omega} \operatorname{sen} 2\odot; \quad d\omega = 9'',6 \cos\Omega + 0'',43 \cos 2\odot.$$

Se pongasi $\omega = 23^\circ\ 28'$, le precedenti correzioni diverranno

$$d l = -17'',95 \operatorname{sen}\Omega - 0'',99 \operatorname{sen} 2\odot; \quad d\omega = 9'',60 \cos\Omega + 0'',43 \cos 2\odot.$$

Introdotti poi questi valori nelle equazioni (1), (2) si ottiene

$$d\delta = -7'',15 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + 9'',60 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega - 0'',40 \cos\alpha \operatorname{sen} 2☉ + 0'',43 \operatorname{sen}\alpha \cos 2☉,$$

$$\delta\alpha = -16'',46 \operatorname{sen}\Omega - (7'',15 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\Omega + 9'',60 \cos\alpha \cos\Omega) \operatorname{tang}\delta$$
$$- 0,92 \operatorname{sen} 2☉ - (0,40 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2☉ + 0,43 \cos\alpha \cos 2☉) \operatorname{tang}\delta.$$

Cambiando i prodotti dei seni e coseni in seni e coseni degli archi semplici, le precedenti espressioni ponno scriversi eziandio sotto la seguente forma più comoda alla costruzione delle tavole

$$d\delta = +1'',23 \operatorname{sen}(\alpha+\Omega) + 8'',37 \operatorname{sen}(\alpha-\Omega) + 0'',01 \operatorname{sen}(\alpha+2☉) + 0'',41 \operatorname{sen}(\alpha-2☉),$$

$$d\alpha = -16'',46 \operatorname{sen}\Omega - [8'',37 \cos(\alpha-\Omega) + 1'',23 \cos(\alpha+\Omega)] \operatorname{tang}\delta$$
$$0,92 \operatorname{sen} 2☉ - [0,41 \cos(\alpha-2☉) - 0,01 \cos(\alpha+2☉)] \operatorname{tang}\delta.$$

Sopra di queste ultime formule si appoggiano le tavole per il calcolo della nutazione in *AR* ed in declinazione, le quali vengono dagli Astronomi riferite nelle Effemeridi, e trovansi eziandio nei trattati di Astronomia dei signori La-Lande e De-Lambre. I termini dipendenti dalla longitudine del nodo Ω costituiscono la nutazione lunare, mentre quelli dipendenti da ☉ comprendono l'effetto della nutazione solare, e potranno trascurarsi siccome picciolissimi, se pure non si aspiri all'ultima precisione. Si possono sottoporre a varie trasformazioni coll'introdurvi degli angoli ausiliarj, e così ne risulteranno delle tavole con diversi principj ordinate, fra le quali comodissime sono le tavole generali dal signor Gauss costruite, e per la prima volta pubblicate nel vol. XVII della *Monatliche correspondenz*, ed in seguito riferite per varj anni nelle Effemeridi di Milano.

408. *Scolio II.* Oltre i movimenti progressivi e periodici dei quali finora abbiamo qui trattato, un altro in molte stelle ne ha scoperto l'osservazione, il quale apparisce progressivo, e manifestasi singolarmente nelle stelle doppie. Questo movimento è in vero assai tenue, nè potrebbe farsi dipendere da una modificazione indotta alla precessione lunisolare, poichè ha nelle varie stelle diverse direzioni e diversa misura. Sembra doversi attribuire ad uno spostamento progressivo del sistema solare combinato forse con il peculiare moto progressivo nello spazio, a cui sono probabilmente abbandonate le stelle; ma non abbiamo dati sicuri per istabilirne la vera teorica, onde siamo obbligati a valutarlo empiricamente. Pertanto se ne registra la quantità per ogni stella, come risulta dalle osservazioni sotto il titolo di *moto annuo proprio*, di cui in conseguenza terrassi conto facendolo dopo l'epoca del catalogo crescere in proporzione del tempo (Vedansi i cataloghi di Piazzi e di Bessel).

CAPITOLO VI.

Teorica delle rifrazioni astronomiche.

409. Si sa dalla Fisica che un raggio di luce passando da un mezzo diafano in un altro di diversa densità, lungi dal progredire in linea retta ne devia per modo che sotto qualunque inclinazione si presenti alla superficie di separazione (finchè la differenza di densità dei due mezzi rimane costante) il seno dell'angolo d'incidenza conserva un rapporto costante col seno dell'angolo rifratto. Così (*Fig.* 17) se il raggio luminoso AE incontra in A la superficie AB di separazione dei due mezzi, non progredisce per Ae prolungamento di AE, ma si avvicina alla perpendicolare CD per il punto d'ingresso A condotta alla superficie AB seguendo una linea retta Af situata nel *piano d'incidenza* CAE, se pure il mezzo in cui passa è più denso di quello da cui sorte; allontanandosene nel caso contrario. L'angolo CAE viene dai Fisici appellato *angolo d'incidenza;* l'angolo fAD *angolo rifratto;* la deviazione fAe della nuova dalla primitiva direzione appellandosi *rifrazione;* il raggio incidente AE, ed il rifratto Af rimangono sempre nel piano CAE condotto per la primitiva direzione e per la perpendicolare CD, il qual piano dicesi *piano d'incidenza;* la perpendicolare CD chiamandosi *cateto d'incidenza*. Ciò posto, molte e varie esattissime esperienze per due stessi mezzi danno $\frac{\text{sen}\, CAE}{\text{sen}\, DAf}$ = una costante, che porremo $= i$.

Newton il primo dedusse da questa esperienza che i corpi refringenti agiscono sulle molecole luminose in direzione perpendicolare alla superficie di separazione, e poichè sulle vicinanze del punto A non è percettibile alcun incurvamento nelle direzioni AE, Af, ne dobbiamo concludere che questa azione si estende soltanto a minime distanze. Dietro ciò si può facilmente richiamare alla meccanica la teorica del moto della luce pei mezzi diafani refringenti, ed assegnare la forma del rapporto costante i fra il seno dell'angolo d'incidenza ed il seno dell'angolo rifratto. Si riferisca in fatti ad un qualunque tempo t la molecola luminosa a due coordinate ortogonali x, y nel piano d'incidenza, la prima essendo paralella ad AB, la seconda a CD; sarà la somma delle forze acceleratrici dipendenti dall'azione del mezzo refringente nel senso delle $x = 0$; sia P la loro somma nel senso delle y. Avremo dalla meccanica nel supposto di dt costante le due equazioni

$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0$, $\frac{d^2 y}{d t^2} = P$, le quali moltiplicate rispettivamente per $2 d x$, $2 d y$, sommate ed integrate danno $\frac{d x^2 + d y^2}{d t^2} = C + 2 \int P d y$. Il primo membro di questa equazione rappresenta il quadrato della velocità della molecola luminosa alla fine di un tempo t qualunque, che porremo $= v$; se quando non è per anco entrata nella sfera di azione del mezzo refringente la ponghiamo $= n$, sarà evidentemente $C = n^2$; l'integrale $\int P d y$ dipende dalla natura della funzione rappresentante la legge di attrazione dei mezzi refringenti sulle molecole luminose, la quale comunque sia composta, deve variare colla loro densità; noi lo rappresenteremo per $2 K \varrho$, indicando con ϱ la densità del mezzo, con K un fattore da determinarsi convenientemente coll' esperienza nei diversi mezzi. In tal guisa l'equazione precedente darà

$$v^2 = n^2 + 4 K \varrho \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

410. Pongasi ora l'angolo d'incidenza $C A E = \theta$, l'angolo rifratto $f A D = \theta'$, la celerità della luce prima dell'ingresso in A nel mezzo refringente $= n$, dopo l'ingresso $= v = \sqrt{(n^2 + 4 K \varrho)}$. Decomposta ciascuna in due, l'una paralella, l'altra perpendicolare ad $A B$, saranno le componenti paralelle ad $A B$ fra di loro eguali, non essendovi per l'azione del mezzo refringente in questo senso alcuna accelerazione. Perciò sarà $n \operatorname{sen} \theta = \sqrt{(n^2 + 4 K \varrho)} \operatorname{sen} \theta'$, da cui deducesi

$$\sqrt{\left(1 + \frac{4 K \varrho}{n^2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = i \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Se siasi osservato nel passaggio dal vuoto in un mezzo qualunque di densità data $= \varrho$, il rapporto costante i, si otterrà dalla precedente

$$\frac{4 K}{n^2} = \frac{i^2 - 1}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

L'intensità del potere refringente dei diversi corpi della natura dipende dal coefficiente $\frac{4 K}{n^2}$, il quale in qualche modo ne costituisce la misura, e si ha col mezzo dell'equazione (3) un modo semplicissimo di determinarne il rapporto per osservazione nei differenti mezzi. Nell'aria atmosferica, chiamando ϱ' la sua densità alla superficie terrestre sotto la pressione di $0^m,76$, ed a 0° del termometro centigrado si è trovato dietro esattissime esperienze $\frac{2 K \varrho'}{n^2} = 0,000294585$.

La densità dell'aria atmosferica varia col variare della temperatura e dell'altezza del barometro. Risulta dalla Fisica che per ogni grado centigrado di temperatura il volume dell'aria aumenta di $0,00375$,

così che a t gradi quel volume che a 0° occupava lo spazio 1 passa ad occupare lo spazio $1 + 0,00375\,t$. Del pari la densità alla superficie terrestre aumenta come la pressione della sopra imposta colonna aerea, la quale è misurata dal peso della colonna barometrica ridotta ad una temperatura data per es. a 0°. Ora dilatasi il mercurio per ogni grado centigrado di $\frac{1}{5412}$, ossia in decimali di 0,000185; quindi se alla temperatura T di un termometro congiunto al barometro osservasi il mercurio all'altezza p', alla temperatura 0° sarà $= p'(1 - 0,000185\,T)$. Sarà pertanto per uno stato qualunque del barometro e del termometro

$$\frac{2\,K\varrho'}{n^2} = \frac{0,000294585}{1 + 0,00375\,t}\,\frac{p'(1 - 0,000185\,T)}{0^m,76} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Abbiamo preso a base la temperatura 0° nel termometro centigrado, esprimendo in misure metriche l'altezza del barometro; comunemente si fa uso presso di noi del termometro di Reaumur, e di una scala barometrica in pollici e linee fingendo tutto ridotto alla temperatura di 10° sotto la pressione di pol. 28. Siccome 10° R. equivalgono a 12 ½ C., e 28 pollici equivalgono a $0^m,7580$, così ponendo $t = T = 12,5$; $p' = 0,7580$, la formula precedente darà $\frac{2\,K\varrho'}{n^2} = 0,000281485$. In seguito moltiplicando i coefficienti di t, T per 1,25 ad oggetto di trasportare le dilatazioni dei volumi dell'aria e del mercurio dall'unità centigrada termometrica all'unità Reaumuriana, avremo per la temperatura t dell'aria libera, e T della colonna barometrica p' espressa in pollici

$$\frac{2\,K\varrho'}{n^2} = \frac{0,000281485}{1 + 0,004688\,(t - 10)}\,\frac{p'[1 - 0,000231\,(T - 10)]}{28} \quad (4)'$$

411. Consideriamo ora i rapporti fra l'altezza del mercurio nel barometro e la densità atmosferica. Dimostrasi nella Fisica (ed è per se abbastanza palese) che la colonna barometrica misura la pressione atmosferica, la quale è proporzionale alla elasticità dello strato aereo posto a contatto del pozzetto; ora questa varia in ragione della densità e della temperatura. Se indichiamo per p l'altezza del barometro, per ϱ la densità dell'aria, per z la sua temperatura in uno stato indeterminato qualunque; per p', ϱ', z' le stesse quantità in uno stato supposto dato, si avrà la proporzione $p : p' :: \varrho z : \varrho' z'$, dalla quale deducesi tosto . . . $\varrho = \frac{\varrho' z'}{p'}\,\frac{p}{z}$ . . . (5)

Se ora fingiamo il barometro portato in un'altezza x sopra la superficie della terra, di cui il raggio sia $= a$, e se in generale le quan-

tità senza accento si riferiscono a questa situazione, quelle con un accento essendo riferibili alla superficie terrestre, indicando con g la gravità, e ponendo la densità del mercurio $= 1$, è chiaro che nell'altezza $x + dx$ il barometro si terrà in una elevazione $p - dp$, ed il peso $g \varrho dx$ della picciola colonna d'aria dx uguaglierà il peso della picciola colonna di mercurio dp, che per la densità supposta $= 1$, sarà $= dp$. Avremo pertanto l'equazione $dp = -g \varrho dx$; ora essendo $a + x$ la distanza dello strato aereo dal centro della terra, e decrescendo la gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro stesso, avrassi $g = \frac{a^2 g'}{(a+x)^2}$. Introducendo questo valore nella precedente, otterrassi

$$dp = g' a \varrho d \frac{a}{a+x} = -g' a \varrho ds \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

facendo per brevità $\frac{a}{a+x} = 1 - s$. Questa combinata con l'equazione (5) darà $\frac{dp}{p} = -\frac{g' \varrho' z' a}{p'} \frac{ds}{z}$. S'indichi per l l'altezza di una colonna d'aria di una densità costante ϱ', che animata ovunque dalla gravità g' facesse equilibrio alla colonna barometrica p'; sarà $p' = g' \varrho' l$, e perciò la precedente equazione diverrà

$$\frac{dp}{p} = \frac{-a z'}{l} \frac{ds}{z} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

L'equazione (6) darà p, se conoscasi la legge con cui variano le densità ϱ degli strati aerei nelle diverse loro elevazioni sopra la terra; la (7) darà il valore di p, se conoscasi la legge della diminuzione del calorico nelle diverse altezze dell'atmosfera. Sia per esempio in tutta la sua estensione la temperatura costante, ed $= z'$; l'equazione (7) integrata in modo che alla superficie terrestre, ove $s = 0$ sia $p = p'$, darà $p = p' e^{-as:l}$; questa combinata con l'equazione (5) porge $\varrho = \varrho' e^{-as:l}$, e essendo la base dei logaritmi iperbolici.

La quantità costante l, che entra nelle precedenti espressioni, si determinerà riflettendo che dalle osservazioni risulta alla temperatura $0°$ sotto la pressione di $0^m,76$ $\varrho' = \frac{1}{10485}$, supposta come sopra la densità del mercurio $= 1$; quindi $l = 10485 . 0^m,76 = 7968^m,6$. Assumendo il raggio terrestre $a = 6366198^m$, avremo all'indicata temperatura $0°$ $\frac{l}{a} = 0,0012517$, quantità che porremo $= l'$; in seguito si troverà a t gradi del termometro centigrado

$$l' = \frac{l}{a} = 0,0012517\,(1 + 0,00375\,t) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Che se si usi il termometro Reaumuriano, prendendo a base il grado 10 del medesimo, si troverà

$$l' = 0,0013104\,[1 + 0,004688\,(t - 10)] \quad . \quad . \quad . \quad (8)'$$

t rappresentando qui il grado del termometro Reaumnriano.

412. Richiamate per la chiara intelligenza queste nozioni preliminari, passiamo a ricercare l'equazione differenziale delle rifrazioni astronomiche. L'atmosfera circondante da per tutto la terra può riguardarsi come un mezzo diafano refringente composto di strati sferici sottilissimi, e concentrici alla terra stessa, in ognuno dei quali la densità sia costante, e vada da uno in un altro continuamente diminuendo finchè in una grande elevazione riducesi insensibile. Il raggio luminoso emanato da un astro, dallo spazio vuoto entrando negli strati aerei di densità sempre crescente dalle regioni superiori alle inferiori, andrà continnamente ripiegandosi verso il centro della terra, ove convengono le perpendicolari tutte condotte ai punti di passaggio da uno strato in un altro, descrivendo così una curva concava verso la superficie terrestre, ove sempre sta l'osservatore. Vedendosi poi gli astri lungo la direzione dell'nltimo elemento che sta a contatto col nostro occhio, ossia lungo la tangente alla menzionata curva, appariranno spostati dal loro vero sito, ed alquanto rialzati nello stesso piano verticale condotto per l'osservatore e per l'astro, poichè il raggio luminoso nei successivi passaggi non abbandona giammai il piano d'incidenza. Questo rialzamento, variabile colle elevazioni degli astri e collo stato dell'atmosfera viene appellato *rifrazione astronomica;* sommamente interessa il conoscerlo, perchè affetta tutte le osservazioni astronomiche in modo sempre diverso, e per poterle fra loro confrontare è necessario ricondurle a quello stato che avrebbe luogo se fosse tolta di mezzo l'aria atmosferica.

Sia pertanto (*Fig.* 26) $A'B$ la superficie terrestre, C il suo centro, A il luogo dell'osservatore, V il suo zenit, $A\,p\,q\,r$ la curva descritta dal raggio luminoso per l'atmosfera, il quale percuotendo l'occhio in A mostra l'astro nella direzione $A\,T\,Z$ lungo la tangente all'ultimo elemento di essa; fingasi $X\,Y$ la tangente all'altra estremità della curva, cosicchè tolta di mezzo l'atmosfera, i raggi luminosi entrerebbero nell'occhio in una direzione paralella ad $X\,Y$, per lo meno supponendo il punto radiante ad una distanza infinita rapporto all'altezza dell'atmosfera, la quale ipotesi può farsi senza sensibile errore eziandio per la Luna, che è l'astro a noi più vicino. Concepiscasi l'atmosfera divisa in strati tenuissimi $r\,m$, $q\,l$ ec. in ciascheduno dei quali la densità sia costante, e varii dall'uno all'altro; sia $T\,q$ la

tangente alla curva nel punto q, il cui prolungamento segna il viaggio della molecola luminosa per lo strato $q\,r\,m\,n$, la quale incontrando in q uno strato di maggiore densità subisca una rifrazione, avvicinandosi alla perpendicolare $q\,C$, e piegandosi in $q\,p$. L'angolo $p\,q\,T$ del contatto rappresenta la rifrazione elementare che chiameremo $d\,r$, e l'intera rifrazione sarà la somma di tutte queste rifrazioni elementari presa dall'estremo inferiore A fino all'estremo superiore, che dalla Geometria facilmente scorgesi essere $= Z\,X\,Y$. Per determinare $d\,r$, fingasi dal punto C abbassata sopra $q\,T$ la perpendicolare $C\,a = P$, e pongasi $C\,A = C\,P = a$, $C\,q = a + x$, di modo che sia x l'elevazione dello strato $q\,r\,m\,n$ sopra la superficie terrestre; sia inoltre l'angolo $C\,q\,T = \varphi$. Sarà $\operatorname{sen}\varphi = \frac{P}{a+x}$. Del pari se sopra il prolungamento di $p\,q$ fingasi dal centro C una perpendicolare $= P - d\,P$, ed osservisi che l'angolo $C\,q\,p = \varphi - d\,r$, avremo

$\operatorname{sen}(\varphi - d\,r) = \frac{P - d\,P}{a+x}$, la quale combinata con la precedente darà

$d\,r \cos\varphi = \frac{d\,P}{a+x}$; ora si ha $\cos\varphi = \frac{\sqrt{[(a+x)^2 - P^2]}}{a+x}$; quindi

$$d\,r = \frac{d\,P}{\sqrt{[(a+x)^2 - P^2]}} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Le forze rifrattive che ad ogni passaggio per istrati aerei di diversa densità obbligano la molecola luminosa a descrivere la curva $A\,p\,q\,r$, si manifestano solo a minime distanze, ed in direzioni perpendicolari alle superficie refringenti; quindi saranno costantemente dirette al centro C della terra, e per le leggi del moto vario dipendente da una forza centripeta, le aree intorno al centro C descritte dal raggio vettore saranno proporzionali ai tempi, ed in due eguali tempuscoli qualunque risulteranno uguali. Ma in uguali tempuscoli le aree stanno fra loro come le velocità v della molecola luminosa moltiplicate per le perpendicolari $C\,a = P$ abbassate da C sulle tangenti; sarà perciò $P\,v = S$, essendo S costante. Indicando (come nel § 409) per ϱ la densità di uno strato qualunque $q\,m\,l\,p$, per n la celerità della luce nel vuoto, dietro i ragionamenti ivi riferiti sarà

$v = \sqrt{(n^2 + 4\,K\,\varrho)}$; pertanto $P = \frac{S}{\sqrt{(n^2 + 4\,K\,\varrho)}}$. Alla superficie terrestre diverrà $p = C\,f = a \operatorname{sen} Z$, ove Z è l'angolo $V\,A\,Z$, distanza apparente dell'astro dal zenit; chiamando ϱ' la densità alla superficie terrestre sarà in virtù dell'equazione precedente

$S = \sqrt{(n^2 + 4\,K\,\varrho')}\,a \operatorname{sen} Z$, e però

$$P = \frac{a\sqrt{(n^2 + 4K\varrho')}\,\text{sen}\,Z}{\sqrt{(n^2 + 4K\varrho)}} = \frac{a\sqrt{(1 + 2\alpha\varrho')}\,\text{sen}\,Z}{\sqrt{(1 + 2\alpha\varrho)}} = a\,u\,\text{sen}\,Z \quad (10)$$

ponendo per brevità $\alpha = \frac{2K}{n^2}$; $u = \frac{\sqrt{(1 + 2\alpha\varrho')}}{\sqrt{(1 + 2\alpha\varrho)}}$.

Introdotto questo valore di P nell'equazione (9), avremo

$$d\,r = \frac{a\,\text{sen}\,Z\,d\,u}{\sqrt{[(a + x)^2 - a^2 u^2\,\text{sen}^2 Z]}} \quad \ldots \quad (11)$$

ovvero, dividendo sotto e sopra per a, e ponendo $x' = \frac{x}{a}$

$$d\,r = \frac{\text{sen}\,Z\,d\,u}{\sqrt{[(1 + x')^2 - u^2\,\text{sen}^2 Z]}} \quad \ldots \quad (11)'$$

Finalmente se per u, $d\,u$ scriviamo i loro valori espressi per ϱ e $d\varrho$, troveremo

$$d\,r = \frac{-\alpha\sqrt{(1 + 2\alpha\varrho')}\,\text{sen}\,Z\,d\varrho}{(1 + 2\alpha\varrho)\sqrt{[(1 + x')^2(1 + 2\alpha\varrho) - \text{sen}^2 Z(1 + 2\alpha\varrho')]}} \quad (12)$$

e la ricerca delle rifrazioni atmosferiche dipenderà dalla integrazione delle equazioni (11)', ovvero (12). Ora una tale integrazione non si può ottenere se non conoscasi la legge con la quale la densità degli strati aerei va diminuendo nelle varie elevazioni; e siccome questa dipende dalla loro temperatura, sarebbe perciò necessario conoscere la legge della diminuzione del calorico. Alcune osservazioni instituite in occasione di salite aereostatiche e sopra la sommità delle più alte montagne hanno, è vero, additato una diminuzione nel calorico; ma rimane tuttavia ignota la legge di tale diminuzione, ed è forza ricorrere a delle ipotesi plausibili, le quali al tempo stesso rappresentino la legge delle pressioni atmosferiche, della diminuzione del calore, e delle rifrazioni orizzontali osservate. I limiti che ci siamo prefissi non ci permettono di entrare in queste ardue e delicate discussioni, che si possono vedere in molte opere, e soprattutto nella Meccanica celeste di La-Place, fra le Memorie di La-Grange, di Oriani, di Kramp, di Bessel, di Carlini, di Ivori, e particolarmente in due belle Dissertazioni del signor Plana nelle Memorie dell'Accademia di Berlino, mentre per non dipartirci dalle cose elementari riferiremo l'ipotesi del signor Bouguer, la quale come è stata presentata da Plana nell'ultima delle citate Memorie premessa alle sue Osservazioni astronomiche di Torino per gli anni 1822-1825 è rimarchevole per la sua semplicità, nè molto si dilunga dal vero anche nelle vicinanze dell'orizzonte; indi esporremo il modo di ottenere indipendentemente da qualunque ipotesi le rifrazioni dietro lo stato dell'atmosfera osservato alla superficie terrestre per le distanze dal zenit non maggiori di 80° od 82°, ove per lo più rimangono circoscritte le più importanti osservazioni.

413. Ripresa pertanto l'equazione (11)', nella quale $x' = \frac{x}{a}$, si assuma con Bouguer, che la densità degli strati aerei dalla superficie terrestre fino alla sommità dell'atmosfera varii con una legge tale da stabilire fra le variabili x', u la dipendenza $u = (1 + x')^m$ . . . (13) dove m rappresenta un esponente costante da stabilirsi dietro le osservazioni. In questa ipotesi l'equazione (11)' si può facilmente integrare; osservando in fatti che Z, ϱ' sono costanti, si può essa con semplici artificii scrivere sotto la seguente forma

$$d\,r = \frac{m}{m-1}\,\frac{d\,(1+x')^{m-1}\,\text{sen}\,Z}{\sqrt{[1-(1+x')^{2m-2}\,\text{sen}^2\,Z]}},$$

che integrata darà $r = C + \frac{m}{m-1}\,\text{arc sen}\,(1+x')^{m-1}\,\text{sen}\,Z$.

Per avere l'intera rifrazione devesi determinare la costante C in modo che l'integrale cominci alla superficie terrestre, dove $\varrho = \varrho'$, e termini al confine dell'atmosfera ove $\varrho = 0$. I valori di x' corrispondenti a questi limiti, si avranno dall'equazione (13), la quale se ripongasi per u il suo valore $\frac{\sqrt{(1+2\alpha\varrho')}}{\sqrt{(1+2\alpha\varrho)}}$ diviene $1 + x' = \frac{(1+2\alpha\varrho')^{1:2m}}{(1+2\alpha\varrho)^{1:2m}}$. Scorgesi ora che posto $\varrho = \varrho'$ si ha $x' = 0$, e fatto $\varrho = 0$ si ottiene $(1 + x') = (1 + 2\alpha\varrho')^{1:2m}$. Detta pertanto R la rifrazione intera si troverà fra i due indicati limiti

$$R = \frac{m}{1-m}\,[Z - \text{arc sen}\,(1+2\alpha\varrho')^{1:2m}\,\text{sen}\,Z] \quad . \; . \; . \quad (14)$$

che è l'espressione data da Bouguer per il calcolo delle rifrazioni; in essa si contengono due indeterminate m, $\alpha\varrho'$, le quali si possono determinare mediante due particolari rifrazioni date dall'osservazione, per es. la rifrazione orizzontale e quella corrispondente a $Z = 45°$, e si avrà una formula comoda ed esatta per il calcolo delle rifrazioni, se a queste soltanto vogliasi avere riguardo.

414. L'equazione (14) si può presentare sotto una forma più comoda, se piaccia di trascurare l'influenza delle seconde dimensioni di $2\alpha\varrho'$, che dalla sola inspezione delle equazioni (4), (4)' scorgesi essere picciolissima. Chiamisi in fatti H l'altezza totale dell'atmosfera ossia il valore di x corrispondente a $\varrho = 0$, e pongasi $H' = \frac{H}{a}$, cosicchè sia H' il valore di x' corrispondente allo stesso punto. Sarà dietro le cose precedenti $H' = (1 + 2\alpha\varrho')^{1:2m} - 1 = \frac{\alpha\varrho'}{m}$; donde

si avrà . . . $m = \frac{\alpha \varrho'}{H'}$ . . . (15). Sviluppando del pari il coefficiente di sen Z, e sostituendo per m il valore ritrovato, si avrà

$$R = \frac{\alpha \varrho'}{H' - \alpha \varrho'} [Z - \text{arc sen } (1 + \alpha \varrho' - H') \text{ sen } Z] \quad . . . (16)$$

la quale contiene del pari due indeterminate H', $\alpha \varrho'$ che verranno conosciute per l'osservazione di due rifrazioni; volendo poi ritenere $\alpha \varrho'$ come dato dalle esperienze fisiche per l'equazione (4), si determinerà H' col mezzo della rifrazione orizzontale. Ma dovendosi mettere in accordo le rifrazioni con la legge delle pressioni atmosferiche, conviene determinare H' come risulterebbe dalle osservazioni barometriche nell' attuale legge di densità. A tale oggetto riprendasi l' equazione (6) (§ 411), e pongasi in essa per $\frac{a}{a+x} = \frac{1}{1+x'}$ il suo valore $\frac{(1 + 2\alpha\varrho)^{1:2m}}{(1 + 2\alpha\varrho')^{1:2m}}$; con tale sostituzione essa si potrebbe esattamente integrare; ma attenendosi all'ipotesi che le seconde potenze di $\alpha\varrho$ siano trascurabili, con facile sviluppo si cangia in $dp = g'a \frac{\alpha\varrho d\varrho}{m}$, la quale integrata in modo che posto $\varrho = 0$, si abbia $p = 0$, darà $p = g' a \frac{\alpha \varrho^2}{2m}$. Se questa dividasi per l'altra $p' = g' \varrho' l$ (§ 411), si avrà $\frac{p}{p'} = \frac{a}{l} \frac{\alpha \varrho'}{2m} \frac{\varrho^2}{\varrho'^2}$. Alla superficie della terra, essendo $\varrho = \varrho'$, $p = p'$, la precedente diviene $1 = \frac{a}{l} \frac{\alpha \varrho'}{2m}$, donde si deduce $m = \alpha \varrho' : \frac{2l}{a}$. Confrontando questo valore con quello di m superiormente trovato, si avrà $H' = \frac{2l}{a} = 2l'$, essendo l' determinato in numeri per ogni stato dell' atmosfera dalle equazioni (8), (8)' § 411.

Sostituendo nell' equazione (16) l' ottenuto valore di H', chiaramente apparisce che da essa otterrassi la rifrazione per una determinata distanza apparente Z dal zenit mediante i seguenti precetti.

1.° Si calcoli un angolo ω coll' equazione

$$\text{sen } \omega = (1 + \alpha \varrho' - 2l') \text{ sen } Z \quad . . . \quad (a)$$

2.° Sarà $R = \frac{\alpha \varrho'}{2l' - \alpha \varrho'} (Z - \omega)$ . . . . . (b)

La rifrazione R si può sviluppare in una serie ordinata per tang Z, la quale è molto convergente finchè Z non supera 80°, e riesce in

pratica più comoda delle equazioni (a), (b). In fatti l'equazione (a) si può scrivere sotto la forma $\frac{\text{sen } Z - \text{sen } \omega}{\cos Z} = (2\,l' - \alpha\,\varrho')\,\text{tang } Z$, che confrontata con l'equazione (2) (Trig. III) darà

$$Z - \omega = (2\,l' - \alpha\,\varrho')\,\text{tang } Z - \frac{(2\,l' - \alpha\,\varrho')^2}{2}\,\text{tang}^3 Z + \ldots$$

Sostituendolo nell'equazione (b), avremo

$$R = \alpha\,\varrho'\,\text{tang } Z\left(1 - \frac{2\,l' - \alpha\,\varrho'}{2}\,\text{tang}^2 Z + \ldots\right) \quad . \; . \; . \quad (A)$$

e se in questa sostituiamo i valori di $\alpha\,\varrho'$, $2\,l'$ dati dalle equazioni $(4)'$, $(8)'$, riducendo il risultamento a secondi, si troverà

$$R = 58'',0604\,\frac{1 - 0,000231\,(T - 10^\circ)}{1 + 0,004688\,(t - 10)}\,\frac{p'}{28}\,\text{tang}\,Z(1 - 0,00117\,\text{tang}^2 Z) \quad (A)'$$

nella quale t, T rappresentano il grado del termometro Reaumuriano esposto all'aria libera, ed annesso al barometro; p' l'altezza apparente del barometro in pollici di Parigi.

415. *Scolio*. L'equazione (A) dedotta da semplici dati sperimentali sulla dilatazione e sulla pressione dell'aria atmosferica rappresenta assai bene le rifrazioni osservate fino verso gli 80° di distanza dal zenit; al di là di questo limite le tangenti divengono di più in più grandi, ed i termini trascurati esercitano per una parte un'influenza sensibile, per l'altra l'ipotesi assunta da bel principio sulla densità degli strati aerei, quando vuolsi ritenere m costante, si va allontanando dal vero, sicchè nemmeno dietro il calcolo delle equazioni (a), (b) si troverebbero le rifrazioni quali in realtà si osservano. Così fatto $Z = 90^\circ$, le nominate equazioni danno $R = 28'\ 22'',5$, quando $p' = 28$, $t = T' = 10^\circ$. Ora sebbene non siano concordi gli Astronomi sul valore della rifrazione orizzontale, sembra non doversi assumere molto diversa da $30'\ 45'',7$, come risulta dalle tavole del signor Carlini, le quali assai bene concordano con le osservazioni. Si potrebbe in vero non avendo in mira che le rifrazioni, determinare mediante le rifrazioni orizzontali osservate la costante l', ed allora la formula concorderebbe in tutte le distanze dal zenit con le osservazioni; ma non si accorderebbe con questa teoria la legge delle pressioni, e della diminuzione del calorico. La-Place nel volume IV della Meccanica celeste dimostra che la legge delle densità atmosferiche è compresa nelle varie elevazioni fra una progressione aritmetica, ed una progressione geometrica; laonde stabilendone una che al tempo stesso partecipi dell'una e dell'altra giunsero egli e molti altri Astronomi ad accordare plausibilmente le rifrazioni con la legge delle pressioni, e della diminuzione del calorico. Troppo ci dilungheremmo entrando in queste delicate

discussioni, per le quali rimandiamo agli autori superiormente citati; solo a compimento di quanto abbiamo fin qui indicato riferiremo il modo d'integrare l'equazione (11)' per una serie che indipendentemente da qualunque ipotesi ci darà le rifrazioni astronomiche fino verso gli 80° od 82° di distanza dal zenit, ove per lo più si limitano le più importanti osservazioni.

416. Ripresa pertanto l'equazione (11)' del § 413, si sviluppi in una serie ordinata per x' mediante il binomio newtoniano, e si trascurino i termini al di sopra di x'^2 come insensibili, si otterrà

$$dr = \frac{\operatorname{sen} Z\, du}{\sqrt{(1-u^2 \operatorname{sen}^2 Z)}} - \frac{\operatorname{sen} Z}{(1-u^2 \operatorname{sen}^2 Z)^{3/2}} x' du + \frac{\operatorname{sen} Z(2+u^2 \operatorname{sen}^2 Z)}{2(1-u^2 \operatorname{sen}^2 Z)^{5/2}} x'^2 du.$$

S'indichino per ordine i tre termini di questa serie per dA, dB, dC, e s'integrino separatamente dalla superficie terrestre fino all'ultima sommità dell'atmosfera. Quanto al primo termine, tosto s'integra, e darà $A = \text{arc sen } u \operatorname{sen} Z + F$. Dovendo svanire l'integrale alla superficie terrestre, ove $\rho = \rho'$, $u = 1$, ed essere completo alla sommità dell'atmosfera, dove $\rho = 0$, $u = \sqrt{(1 + 2\alpha\rho')}$, si otterrà fra i due indicati limiti $A = \text{arc sen} \sqrt{(1 + 2\alpha\rho')} \operatorname{sen} Z - Z$.

Posto pertanto

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{(1 + 2\alpha\rho')} \operatorname{sen} Z = \operatorname{sen} Z + (\alpha\rho' - \tfrac{1}{2}\alpha^2\rho'^2) \operatorname{sen} Z \ldots (c)$$

sarà . . . $A = \varphi - Z$ . . . (d)

trascurando cioè le terze potenze di $\alpha\rho'$, come picciolissime.

L'equazione (c) si può scrivere ancora sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} Z}{\cos Z} = \alpha\rho'(1 - \tfrac{1}{2}\alpha\rho') \operatorname{tang} Z;$$

e quindi per l'equazione (1) (Trig. III) trascurando sempre le terze potenze di $\alpha\rho'$, si avrà

$$A = \varphi - Z = \alpha\rho'(1 - \tfrac{1}{2}\alpha\rho') \operatorname{tang} Z + \tfrac{1}{2}\alpha^2\rho'^2 \operatorname{tang}^3 Z \ldots (d)'$$

Per integrare il secondo termine io osservo che $x' = \frac{x}{a}$ è quantità piccolissima, la quale anche negli strati più elevati dell'atmosfera è all'incirca dell'ordine $\alpha\rho'$; potremo perciò in esso trascurare il quadrato di $\alpha\rho'$. In questa ipotesi si troverà $du = -\alpha\, d\rho$, e perciò nel denominatore si potrà scrivere l'unità in luogo di u^2. Dietro ciò riponendo per x' il suo valore, sarà $B = \frac{\alpha \operatorname{tang} Z}{a \cos^2 Z} \int x\, d\rho$; l'integrale $\int x\, d\rho$ è $= x\rho - \int \rho\, dx = -\int \rho\, dx$, svanendo $x\rho$ ai due limiti. Frattanto si ha (§ 412) $dp = -g\rho\, dx$; quindi se trascuriamo la variazione della gravità, che influisce solo nei termini di terzo ordine, sarà $-\int \rho\, dx = \frac{p}{g} + C$. Alla superficie terrestre dove $p = p'$,

deve essere l'integrale = 0; lo che dà $C = -\frac{p'}{g'} = -\beta' l$. Alla sommità dell'atmosfera si ha $p = 0$; quindi $\int x\, d\beta = -\beta' l$, e perciò

$$B = \frac{-\alpha \beta' l}{a} \frac{\text{tang}\, Z}{\cos^2 Z} = -\alpha \beta' l' \,\text{tang}\, Z\,(1 + \text{tang}^2 Z) \;.\;.\;.\; (e)$$

Per ultimo il terzo termine C dipende dall'integrale $\alpha \int \frac{x^2\, d\beta}{a^2}$, il quale può ottenersi per mezzo delle quadrature, come può vedersi in una Memoria del signor Oriani nelle Effemeridi di Milano per il 1788, a cui si deve l'onore di avere assegnato la serie delle rifrazioni indipendentemente da qualunque ipotesi. Esso però è di terzo ordine, e deve riporsi fra quelli da noi rigettati. Sommando pertanto gli ottenuti valori di A e di B, ed ordinando per tang Z, risulterà

$$R = \alpha \beta' \left(1 - \frac{\alpha \beta' + 2 l'}{2}\right) \text{tang}\, Z - \alpha \beta' \frac{2 l' - \alpha \beta'}{2} \text{tang}^3 Z \;.\;.\;.\; (B)$$

Se ora in questa equazione s'introducano i valori di $\alpha \beta'$, $2 l'$ dati dalle equazioni (4)', (8)', trascurando l'influenza delle variazioni atmosferiche nei termini picciolissimi di secondo ordine, si troverà (riducendo il risultamento a secondi)

$$R = 57'',9761 \frac{1 - 0{,}000231\,(T - 10^\circ)}{1 - 0{,}004688\,(t - 10)} \frac{p'}{28} \text{tang}\, Z\,(1 - 0{,}00117\, \text{tang}^2 Z) \quad (B)'$$

nella quale T, t, p' hanno lo stesso significato che in (A)' § 414, e con quella molto prossimamente coincide. Sì l'una che l'altra dimostrano che *nelle distanze dal zenit minori di* 80° *le rifrazioni sono prossimamente proporzionali in uno stesso stato di atmosfera alle tangenti delle distanze stesse*.

Della disposizione delle tavole di rifrazione, e del modo di osservare le rifrazioni astronomiche.

417. Quantunque semplicissimo sia il calcolo delle rifrazioni dietro le equazioni (A), ovvero (B), quando accuratamente ne siano stati calcolati e verificati i coefficienti, tuttavia non manca di riuscire molesto nell'uso continuo che se ne fa per ispogliarne le osservazioni. Si alleggerisce la fatica calcolando per uno stato particolare dell'atmosfera la rifrazione per ogni distanza dal zenit, che si riferisce in una tavola avente per argomento la stessa distanza apparente Z col titolo di *rifrazione media*. Così fingendo $p' = 28^p$, $t = T = 10$, ed indicando con R' la rifrazione media, sarà

$$R' = \lambda \,\text{tang}\, Z\,(1 - 0{,}00117\, \text{tang}^2 Z) \;.\;.\;.\; (C)$$

dove scrivesi λ in luogo del coefficiente costante 57'',9761, perchè

sarà suscettibile di qualche modificazione secondo l'ipotesi che si addotta, o secondo che ricavasi dalle osservazioni stesse nel modo che fra poco indicheremo.

Calcolata per tutte le distanze fino a 80° od 82° la tavola delle rifrazioni medie, è palese che per un altro stato del barometro $= p'$, e del termometro $= t$, si avrà $R = R' \frac{p'}{28} \frac{1 - n(t - 10)}{1 + m(t - 10)}$, ponendo per brevità $n = 0,000231$; $m = 0,004688$. A vero dire la temperatura del barometro potrà essere talvolta alcun poco differente da quella dell'aria libera; ma la differenza sarà sempre picciola, e l'errore risultante dal porre $T = t$ sarà sempre picciolissimo in grazia dei piccioli coefficienti dei numeri $T - 10°$, $t - 10°$. È ora palese che facendo variare p' di linea in linea sopra e sotto il 28, e facendo variare t per tutte le temperature al di sotto ed al di sopra di 10° Reaumuriani si potranno raccogliere in due tavolette di argomento p', t i valori delle frazioni $\frac{p'}{28}$, $\frac{1 - n(t - 10)}{1 + m(t - 10)}$. Così ponendo ad uno stato p' del barometro $\frac{p'}{28} = 1 + A$, e ad uno stato t del termometro $\frac{1 - n(t - 10)}{1 + m(t - 10)} = 1 + B$, sarà la corrispondente rifrazione vera $R = R'(1 + A)(1 + B) = MR'$, indicando con M il prodotto dei due fattori $(1 + A)$, $(1 + B)$.

418. Passiamo ora ad indicare come si possa colle sole osservazioni astronomiche determinare la costante λ nell'equazione (C), da cui principalmente dipendono le rifrazioni medie fino verso 80° od 82°, e come si possa in seguito continuare la tavola fino all'orizzonte. Risulta da quanto abbiamo superiormente esposto, che in una data distanza apparente Z dal zenit, la rifrazione R può rappresentarsi per $\lambda M \tang Z \downarrow Z$, dove il fattore M si può calcolare, o prendere da una tavola precedentemente costruita per ogni stato dell'atmosfera, e dove fino all'indicato limite sia $\downarrow Z = 1 + 0,00117 \tang^2 Z$.

Ciò premesso, per determinare λ bisogna (se non vogliasi commettere un circolo vizioso) supporre la latitudine geografica dell'osservatore e le declinazioni delle stelle tuttavia incognite, poichè i metodi che abbiamo additati nel primo volume per determinare queste quantità suppongono le osservazioni già liberate dalla rifrazione. Nei nostri climi, e nei climi più boreali dove il polo è elevato più di 45° sopra l'orizzonte, si può osservare una stella nel suo passaggio superiore nelle vicinanze del zenit, e nel passaggio inferiore rimanendo ad una piccola altezza porge un metodo spedito e sicuro per riconoscere il valore di λ.

Sia (*Fig.* 19) Z il zenit, HPR il meridiano, P il polo elevato dell' equatore, SS' il paralello di un astro che non tramonta. Pongasi il complemento della latitudine $ZP = L$, il complemento PS della declinazione dell' astro $= \delta$, e siensi osservate le distanze Z, Z' dal zenit nel suo passaggio sopra e sotto il polo. Siano R, R' le rifrazioni vere dovute alle distanze apparenti Z, Z'; MM' i moltiplicatori corrispondenti allo stato atmosferico all' epoca delle due osservazioni. Giusta i ragionamenti del § 412 la rifrazione rialza gli oggetti, e diminuisce le distanze dal zenit; saranno pertanto le corrispondenti distanze vere $Z + R$, $Z' + R'$; ma esse sono anche espresse da $L - \delta$, $L + \delta$; avremo quindi le due equazioni $L - \delta = Z + R$; $L + \delta = Z' + R'$, la semisomma delle quali darà
$L = \frac{1}{2}(Z + Z') + \frac{1}{2}(R + R')$. Sostituendo i valori di R, R', otterremo

$$L = \tfrac{1}{2}(Z + Z') + \tfrac{1}{2}\lambda\,(M \operatorname{tang} Z \downarrow Z + M' \operatorname{tang} Z' \downarrow Z') \;\ldots\; (D)$$

nel secondo membro della quale tutto è noto a riserva di λ.

Un' altra stella circompolare dalla prima diversa darà un' altra simile equazione fra L e λ, che confrontata con la precedente farà conoscere al tempo stesso la vera latitudine, ed il coefficiente λ, dopo di che la determinazione delle stelle adoperate non avrà alcuna difficoltà.

Affinchè le equazioni (D) diano i valori di L e di λ con sicurezza, dovranno le osservazioni essere fatte con somma cura, e le stelle essere tali che una sia al polo molto vicina, descrivendo l' altra un paralello molto più grande, sicchè essendo Z di pochi gradi, Z' non superi 80° od al più 82°, altrimenti non si potrebbe ricavare con sicurezza il valore di $\downarrow Z'$ dalla formula $1 - 0{,}00117 \operatorname{tang}^2 Z'$. La stella polare ed α di Cassiopea, la polare e γ di Perseo sono presso di noi opportunissime a questa ricerca, e molte altre ne additerà la semplice inspezione di un globo.

419. Determinate le rifrazioni medie (per esempio) fino a $Z = 82°$, ed ottenuta la vera latitudine coll' ajuto di molte osservazioni della polare, e di altre stelle al polo vicine, sarà facile estendere colla semplice osservazione la tavola fino a 90°. Scelgasi una qualche stella fissa che passi al meridiano in molta vicinanza del zenit, ed osservata la sua distanza meridiana dal zenit, se ne otterrà la declinazione dopo avervi applicata la rifrazione. Quindi si osservi il tempo siderale, in cui in virtù del moto diurno perviene alle distanze 82°, 82° 10′, 82° 20′ ec. fino a 90°, prendendo queste distanze con un buon circolo, o con un quadrante ben diviso e ben rettificato. Si calcolino per gl' istanti delle osservazioni le distanze vere della stella dal zenit colle formule del § 20, e da queste sottraendo le apparenti osservate, i residui saranno le rifrazioni vere relative allo stato particolare dell' atmosfera conosciuto per la contemporanea osservazione del barometro

e del termometro; queste poi divise per il numero *M* calcolato direttamente, o preso da una tavola precedentemente costruita, daranno le rifrazioni medie corrispondenti da inserirsi nella tavola, la quale dovrà riputarsi tanto più esatta, quanto maggiore sarà il numero delle buone osservazioni, sulle quali sarà stata costruita. Qualunque diligenza però si usi, le rifrazioni medie si scuopriranno molto variabili alla stessa distanza apparente dal zenit nelle vicinanze dell' orizzonte, e ciò dovrà in particolare ripetersi dai molti vapori, dei quali è carica l'atmosfera, e dall' umidità di cui non si tiene conto nel numero *M*. I risultamenti dei diversi Astronomi sono anche alquanto discordi sulla vera rifrazione media orizzontale. Carlini nelle sue tavole la pone = 30′ 45″, 7, La-Caille 33′ 30″, Bradley 33′ 0″, Cassini 32′ 20″, La-Lande 32′ 53″, 8. Per mezzo grado di altezza diminuisce di circa 4′.

Dei cambiamenti prodotti dalle rifrazioni nel sito e figura degli astri, e dei crepuscoli.

420. 1.° Abbiamo già sopra accennato che le rifrazioni elevano gli oggetti in un circolo verticale, e lasciano inalterati gli azimuti, quindi per ispogliare le osservazioni dalle rifrazioni dovranno esse sommarsi colle distanze osservate, o togliersi dalle altezze, e lasciare inalterati gli azimuti. Il cambiamento di altezza dovuto alle rifrazioni produce eziandio un cambiamento nelle *AR* e declinazioni ricavate da osservazioni fatte alla macchina paralattica, o coi micrometri fuori del meridiano, e siccome abbiamo esposto nel § 259 e seguenti i precetti per ridurlo a calcolo, non occorre ritornare su questo argomento.

2.° Le rifrazioni producono il sensibile schiacciamento osservato nel Sole e nella Luna, mentre trovansi all'orizzonte, o ad esso molto vicini. In fatti essendo il loro diametro apparente circa mezzo grado, il lembo superiore del loro disco trovasi sempre più elevato dell'inferiore di circa mezzo grado. Sarà perciò il lembo inferiore sottoposto ad una rifrazione circa 4′ maggiore di quella corrispondente al superiore. Mentre adunque il diametro orizzontale rimane inalterato (almeno sensibilmente) l'estremo inferiore apparisce avvicinato al superiore di una sua ottava parte incirca, e lo stesso dovendosi dire di tutte le linee continue verticali costituenti il visibile disco di questi astri, è forza che appariscano compianati alquanto, e si presentino sotto l'aspetto di un' ellisse, il cui asse minore è verticale. Quest' apparenza sparisce a due o tre gradi di altezza, poichè la differenza delle rifrazioni divenendo sempre più picciola, non cade sotto i sensi.

3.° In virtù delle rifrazioni sollevandosi gli astri nel verticale, nascono e tramontano in punti diversi da quelli del loro vero *orto* ed *occaso*, ed essendo inoltre avvicinati al meridiano, viene diminuito

l'angolo orario, e quindi viene accelerato il tempo del loro nascere, e ritardato quello del loro tramontare.

Sia fFQ (*Fig.* 19) il paralello all'equatore, che descrive un astro in virtù del suo moto diurno, e supponiamo il semidiametro dell'astro $= d$, la sua declinazione $= \delta$, la latitudine $= L$, la rifrazione orizzontale $= R$. Supponiamo che mentre trovasi in f venga dalla rifrazione sollevato in modo che il suo lembo superiore apparisca nell'orizzonte in G. Sarà G il punto corrispondente all'orto od occaso apparente, ZPf l'angolo orario corrispondente che tolto od aggiunto al passaggio del centro pel meridiano dà l'istante del nascere o tramontare. Pongasi $ZPf = P'$, $PZf = RG = Z'$. Il triangolo PZf, in cui $PZ = 90^\circ - L$, $Pf = 90^\circ - \delta$, $Zf = 90^\circ + R + d$, darà

$$\cos P' = -\frac{\operatorname{sen}(R+d) + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta}{\cos L \cos \delta}; \quad \cos Z' = \frac{\operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen}(R+d) \operatorname{sen} L}{\cos L \cos (R+d)},$$

le quali determinano con molta speditezza la posizione del punto G rapporto al punto R, e l'angolo orario corrispondente all'orto od occaso apparente.

In queste equazioni si possono introdurre i valori veri di P, Z, quelli cioè che avrebbero luogo mentre allontanata l'atmosfera il centro dell'astro si trovasse in F. Indicate queste quantità da P, Z, il triangolo ZPF in cui $ZF = 90^\circ$ darà $\cos P = -\frac{\operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta}{\cos L \cos \delta}$, $\cos Z = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos L}$. Quindi le due precedenti equazioni diverranno

$$\cos P' = \cos P \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(R+d)}{\cos L \cos \delta \cos P}\right),$$

$$\cos Z' = \frac{\cos Z}{\cos (R+d)} \left(1 + \frac{\operatorname{tang} L \operatorname{sen}(R+d)}{\cos Z}\right).$$

Se L non sia troppo grande, o l'astro non troppo si avvicini a quelli che non tramontano, P', Z' differiranno da P, Z di quantità dell'ordine $R+d$, e quindi coi soliti artifizj, se pongasi $\cos(R+d) = 1$, $\operatorname{sen}(R+d) = R+d$, troveremo

$$P' = P + \frac{R+d}{\cos L \cos \delta \operatorname{sen} P}, \quad Z' = Z - \frac{(R+d) \operatorname{tang} L}{\operatorname{sen} Z},$$

delle quali formule ci serviremo finchè $P' - P$, $Z' - Z$ si manterranno minori di 2° o $2^\circ \frac{1}{2}$, non desiderandosi d'ordinario in queste ricerche aspirare ad una soverchia precisione. Se trattisi del Sole o della Luna potremo porre $R = 32'$, $d = 16'$; per gli altri corpi celesti si potrà fare $d = 0$. Vedesi nel tempo stesso che dovremo fare $d = 0$, se si domandino P', Z' per l'orto od occaso del centro dell'astro, e per il lembo inferiore porremo $R - d$ in luogo di $R + d$.

4.° Dalle rifrazioni pure in qualche modo dipendono i crepuscoli mattutini e vespertini, o vogliamo dire quella debole luminosa apparenza che prenunzia il nascere del Sole, e si mantiene per qualche tempo anche dopo che egli è disceso sotto l'orizzonte. Abbiamo veduto che giunto alla distanza di 32′ sotto l'orizzonte, la rifrazione trasporta i suoi raggi al nostro occhio direttamente, e ce lo rende visibile. Ma anche quando trovasi alquanto più depresso, molti raggi luminosi attraversando gli strati superiori dell'atmosfera gl'incontrano obbliquamente, ed in luogo di essere rifratti e perdersi nell'immensità dello spazio, vengono ripercossi, ed agli strati inferiori rimandati giungono all'occhio per rendere visibili le molecole aeree. Quanto più trovasi il Sole vicino alla depressione di 32′, tanto maggiore è il numero dei raggi riflessi, ed altrettanto maggiore apparisce il chiarore per l'atmosfera. Egli è pertanto manifesto che dalla densità ed altezza degli strati aerei superiori dipende la depressione del Sole all'istante in cui si presentano i primi albori, e la progressione con cui la luce succede alle tenebre, o queste al giorno; intorno a che vedasi Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis*. Augustae Vindelicorum 1760. cap. III. part. V.

Noi qui ci limiteremo a supporre come dimostrato dalle osservazioni che il principio e fine del crepuscolo abbia luogo quando il Sole trovasi 18° sotto l'orizzonte valutati nel suo verticale, ed in questa ipotesi egli è oltremodo facile assegnare in ogni clima la durata dei crepuscoli per tutte le stagioni dell'anno. Se s'indichi con P' l'angolo orario del centro del Sole quando è 18° sotto l'orizzonte, e per P lo stesso angolo mentre trovasi sull'orizzonte vero, le formule del num. precedente daranno P, P' col solo sostituirvi 18° in luogo di $R+d$. Si avrà così

$$\cos P = -\tang L \tang \delta\,; \quad \cos P' = \cos P\left(1 - \frac{\operatorname{sen} 18^\circ}{\cos L \cos \delta \cos P}\right).$$

e la durata del crepuscolo espressa in tempo sarà $= \dfrac{P'-P}{15}$.

Vedesi nel tempo stesso che per noi la durata del crepuscolo cresce continuamente mentre il Sole trovasi nell'emisfero boreale, ed è massima nel solstizio; crescendo poi le latitudini nell'abbreviarsi di più in più le notti, bene spesso dura il crepuscolo per tutta la notte, lo che accade quando trovasi $\cos P' > 1$. Ma quando il Sole passa nell'emisfero australe, la durata del crepuscolo diminuisce fino ad un certo punto, oltre il quale torna a crescere. Havvi dunque nel valore di $P'-P$ un minimo, che si otterrà ponendo $dP' = dP$. Differenziando in questa ipotesi le due equazioni superiori, dopo aver sostituito nella seconda il valore di $\cos P$, si avrà

$$\text{sen}\, P\, dP = \frac{\text{tang}\, L\, d\delta}{\cos^2 \delta}; \quad \text{sen}\, P'\, dP = \frac{\text{sen}\, L + \text{sen}\, 18^\circ\, \text{sen}\, \delta}{\cos L \cos^2 \delta}\, d\delta,$$

dalle quali si ottiene $\frac{\text{sen}\, P'}{\text{sen}\, P} = \frac{\text{sen}\, L + \text{sen}\, 18^\circ\, \text{sen}\, \delta}{\text{sen}\, L}$.

Facendo i quadrati di questa ultima, e scrivendo in luogo di $\frac{\text{sen}^2 P'}{\text{sen}^2 P}$ il suo valore, si perviene alla seguente

$$1 - \frac{\text{sen}^2 18^\circ + 2\, \text{sen}\, L\, \text{sen}\, \delta\, \text{sen}\, 18^\circ}{\cos^2 L \cos^2 \delta - \text{sen}^2 L\, \text{sen}^2 \delta} = 1 + \frac{2\, \text{sen}\, L\, \text{sen}\, \delta\, \text{sen}\, 18 + \text{sen}^2 18^\circ\, \text{sen}^2 \delta}{\text{sen}^2 L},$$

ovvero . . . $\text{sen}\, 18^\circ\, \text{sen}^2 \delta + 2\, \text{sen}\, L\, \text{sen}\, \delta + \text{sen}\, L\, \text{sen}\, 18^\circ = 0$.

Questa equazione risoluta coi metodi del secondo grado, porge

$\text{sen}\, \delta = -\text{sen}\, L\, \frac{1 - \cos 18^\circ}{\text{sen}\, 18^\circ} = -\text{sen}\, L\, \text{tang}\, 9^\circ$, e quindi si ottiene la declinazione corrispondente al minimo crepuscolo, che, come si era annunziato, è australe se L indica una latitudine boreale.

Oltre la precedente radice, l'equazione superiore di secondo grado ne ha ancora un'altra espressa da $\text{sen}\, \delta = -\text{sen}\, L\, \cot 9^\circ$, la quale però non presenta nè massimo, nè minimo tostochè L supera $3^\circ\, 37'$, richiedendosi oltre questo limite dalla equazione una declinazione più grande di $-23^\circ\, 28'$. Essa è generalmente trascurata.

CAPITOLO VII.

Della figura della terra.

I. Della misura di un arco di meridiano.

421. Abbiamo già dovuto nel corso di questi Elementi più volte supporre che la terra da noi abitata sia di figura pressochè sferica, o più esattamente sferoidica, compressa ai poli, ed elevata all'equatore, ed abbiamo anche al § 5 indicato che la misura di un grado del meridiano terrestre ripetuta 360 volte darebbe l'intera circonferenza riportata alle nostre unità lineari, donde poi si otterrebbe eziandio il suo raggio. Ci proponiamo ora di brevemente esporre i metodi che si devono seguire per dedurre dalle osservazioni astronomiche miste a geodetiche misure la sua vera figura.

Prima di tutto è palese che se siasi misurato un arco di meridiano, nella di cui estremità australe la latitudine sia $= l$, mentre nella boreale è $= l'$, l'angolo che nel centro della terra (o più esattamente nel

centro del circolo osculatore all'arco misurato) comprendono i raggi condotti alle due estremità è $= l' - l$. Se ora supponiamo che l'arco misurato in date unità lineari, per es. in tese, sia $= g$, ed il raggio della terra sia $= r$, osservando che $l' - l$ e g sono archi simili, avremo $l' - l : 1 :: g : r$, donde deducesi $r = \frac{g}{l' - l}$.

Qui conviene osservare che $l' - l$ supponesi ridotto in parti di raggio. Se adunque fosse dato in secondi, come per lo più accade, dovrà essere prima diviso per R'', ossia dovremo impiegare per calcolare il raggio terrestre la equazione . . . $r = \frac{R'' g}{l' - l}$ . . . (1)

in cui $\log R'' = 5,3144251$.

Quindi se sotto tutte le latitudini gli archi misurati in diversi meridiani si accordano in dare uno stesso valore di r, dovremo ritenere la terra di figura sferica, e se invece dall'equatore ai poli i valori di r vadano crescendo, dovremo conchiudere che verso i poli ha minore curvatura, e più si avvicina alla superficie piana. Tutta la difficoltà è ricondotta ad esporre il metodo da seguirsi per ottenere con opportune triangolazioni la misura di un arco di meridiano, alle cui estremità con somma cura si determinino le latitudini coi metodi dati nel vol. I cap. II, III.

422. Quando si tratti di misurare in una data latitudine un arco di meridiano bisogna in primo luogo opportunamente riconoscere una estensione di paese in latitudine, la quale abbracci per lo meno 60 miglia italiane, che formano all'incirca l'ampiezza di un grado, e devesi evitare il più che sia possibile la vicinanza di altissime montagne, le quali allontanando colla loro attrazione dalla direzione verticale il *filo a piombo* degli stromenti, o turbando la posizione orizzontale dei livelli, possono spargere qualche incertezza nei risultamenti, e soprattutto si abbia cura che gli estremi dell'arco da misurarsi sieno lungi dalle montagne, affinchè l'ampiezza totale dedotta dalla osservazione diretta delle latitudini sia esatta. Avendo in seguito riconosciuta la direzione del meridiano, si scelgano alquanti punti intermedj nelle sue vicinanze, che si dovranno unire con una rete di triangoli, e questi dovranno tanto più riputarsi atti al bisogno, quanto più si avvicineranno ad essere equilateri, ed in generale si dovranno evitare in queste operazioni i triangoli che conterrebbero od un angolo molto acuto, od un angolo molto ottuso, essendo possibile che un picciolo errore negli angoli misurati ne portasse uno considerabile nei lati da determinarsi, sicchè renderebbesi sospetta la lunghezza dell'arco di meridiano dedotta da essi. Gioverà pertanto nello stabilire i vertici dei triangoli avere sotto gli occhi una carta in scala grande, sulla quale

condotta la direzione del meridiano, si riconoscerannno facilmente i punti più vantaggiosi per situarvi i *segnali* costituenti il vertice dei triangoli. Sarà lodevole lo scegliere punti determinati di fabbriche elevate e robuste, le cime dei campanili ec., i quali mentre possono vedersi e distinguersi in distanze considerabili, rimanendo nei successivi tempi inalterati, presentano la facilità di riscontrare le operazioni nel caso che insorgesse qualche dubbio sull'esattezza delle osservazioni. Che se comodamente non potranno unirsi gli estremi dell'arco da misurarsi col mezzo delle sommità di campanili o di altre fabbriche, si avrà allora ricorso a segnali artifiziali, da costruirsi con robusto legname dando loro la forma di piramidi abbastanza elevate perchè possano da lungi essere osservati.

423. Rappresentino ora (*Fig.* 20) A, B, C, D, E, F i centri dei segnali projettati in una superficie orizzontale, ossia nella superficie di una sfera osculatrice della superficie terrestre al punto A, e finganst congiunti gli archi di circolo massimo AC, AB, BC ec. sicchè formisi la rete di triangoli sferici ABC, BCD, CDE, DEF, che uniscono il primo segnale stabilito in A con l'ultimo in F. Bisogna dalle osservazioni dedurre gli angoli BAC, ABC, ACB, BCD, CBD ec., al quale oggetto si farà uso o di un *teodolite*, o di un *circolo moltiplicatore*. Se osservisi con un teodolite, si avranno dalla stessa costruzione della macchina, già descritta nel primo volume, gli angoli projettati nel piano orizzontale, quali qui si richiedono; imperciocchè componesi essa di un circolo diviso che dispouesi orizzontalmente, e di un cannocchiale che muovesi sempre in un piano verticale, ed in modo invariabile collegasi all'indice che segna le divisioni nel piano orizzontale. Quindi facendo corrispondere verticalmente al punto A il centro del teodolite, e conducendo il cannocchiale girevole prima nel vertice del segnale B, poi in quello eretto sopra C, l'arco percorso dall'indice rappresenterà l'angolo BAC, qualunque elevazione sopra l'orizzonte di A abbiano i segnali B, C.

Non così accade se osservisi con un circolo moltiplicatore, con un quadrante, con un grafometro, o con qualunque altro stromento che si possa soltanto disporre nel piano dei tre oggetti A, B, C. In questo caso, posto il centro dello stromento verticalmente sopra il punto A, devesi il piano della macchina disporre per modo che il suo prolungamento passi per il vertice dei segnali in B, C; le divisioni scolpite sul lembo del circolo daranno direttamente l'angolo compreso dai raggi visuali condotti da A agl'indicati vertici, il quale dovrà poi ridursi all'orizzonte.

Fingasi perciò (*Fig.* 21) che A rappresenti il centro della sfera celeste, Z il zenit del punto A; B, C sieno le sommità dei due segnali, di modo che prolungate le rette AB, AC fino al cielo stel-

lato in B', C', gli archi ZB', ZC' esprimano le loro distanze apparenti dal zenit. Congiunti i punti B', C' mediante un arco di circolo massimo, sarà questo la misura dell'angolo BAC ottenuto colla diretta osservazione dal circolo posto in A, e l'angolo $B'ZC'$ rappresenterà la cercata projezione nell'orizzonte. Se pertanto stando in A, oltre l'angolo BAC si osservino ancora col circolo o quadrante che siasi gli angoli $ZAB = ZB'$, $ZAC = ZC'$, il triangolo $ZB'C'$, in cui sono dati i tre lati, porgerà, dietro i precetti della Trigonometria, l'angolo cercato Z.

Il più delle volte gli oggetti B, C avranno una picciola elevazione sopra l'orizzonte, od anche una depressione, e perciò ZB', ZC' poco differiranno da 90°, nel qual caso sarà più spedito di sostituire alla risoluzione diretta del triangolo $ZB'C'$ quella esposta al num. XVII della Trigonometria. Chiamando pertanto D l'angolo osservato BAC, e ponendo $ZB' = 90° - \beta$, $ZC' = 90° - \gamma$, ed inoltre facendo $\beta + \gamma = 2p$, $\beta - \gamma = 2q$, a norma delle regole ivi prescritte, avremo l'angolo cercato

$$Z = D + \frac{p'}{R''} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} D - \frac{q'}{R''} \cot \tfrac{1}{2} D \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

424. Abbiamo supposto nel § precedente che nel rilevare gli angoli BAC, ABC ec. (*Fig.* 20) potesse il centro della macchina situarsi nella verticale condotta per il vertice del segnale in ogni stazione, e si osservassero di lì i vertici degli altri segnali. Il più delle volte le dimensioni finite dei segnali non permettono di potere penetrare fino alla direzione della verticale, ed in allora conviene situare il circolo od il teodolite in un punto alquanto al di fuori nella fabbrica contenente il segnale, il quale scegliesi in modo da potere distintamente vedere gli altri punti che si vogliono osservare. Risulta di qui una picciola correzione da farsi agli angoli osservati conosciuta presso gli scrittori di geodesia sotto il nome di *riduzione al centro della stazione*, di cui devesi intraprendere il calcolo avanti la riduzione all'orizzonte, se venga adoperato un circolo moltiplicatore. Ecco a quali formule essa si appoggia. Siano (*Fig.* 22) B, C i vertici dei segnali, che si dovrebbero osservare stando in A, ma per le dimensioni della fabbrica non possono osservarsi che stando in a ad A vicinissimo in confronto delle distanze AB, AC. Avendo misurato con ogni cura l'angolo BaC, prima di allontanare il circolo dalla sua posizione si stimino anche all'ingrosso AaB, AaC, e misurisi colla unità lineare adottata la distanza aA. Si ponga $Aa = d$, $AaB = m$, $AaC = n$, $BaC = D$, $BAC = D'$, $ABa = B$, $ACa = C$, $BA = Ba = \mu$, $AC = aC = \nu$. Avremo dalla Geometria $BAC = BGC - ABa = BaC + ACa - ABa$, ossia dietro le

stabilite denominazioni $D' = D + C - B$. Frattanto, a motivo della picciolezza di aB, gli angoli B, C saranno essi pure molto piccioli, e potranno riguardarsi uguali ai loro seni. Quindi la proporzione dei lati ai seni degli angoli opposti darà $B = \frac{R'' d \operatorname{sen} m}{\mu}$, $C = \frac{R'' d \operatorname{sen} n}{\nu}$, ove moltiplicansi i secondi membri per R'' ad oggetto di ridurli a minuti secondi. Dietro ciò l'angolo D ridotto al centro della stazione diverrà

$$D' = D + \frac{R'' d \operatorname{sen} n}{\nu} - \frac{R'' d \operatorname{sen} m}{\mu} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

425. Un'altra operazione importantissima, nella quale devesi adoperare ogni diligenza, è di determinare la direzione della meridiana nella stabilita catena di triangoli, al che si perviene osservando ad un dato tempo la differenza di azimut fra uno dei segnali B, ed un astro ben determinato, per esempio il Sole. Per comprendere come ciò possa ottenersi, rappresenti la *fig* 23 la sfera celeste avente il suo centro in A della *fig.* 20, e sia Z il zenit del punto A, il circolo MZT rappresenti il meridiano condotto per A, la cui intersezione coll'orizzonte darà la direzione della meridiana AG. Per il zenit, e per l'oggetto B condotto un verticale ZB si prolunghi all'orizzonte in B'. È palese che l'arco TB' della *fig.* 23 sarà la misura dell'angolo cercato BAG della *fig.* 20, e poichè l'oggetto è immobile, sarà ad ogni tempo lo stesso. Corrisponda ora ad un dato tempo l'astro, a cui si vuole riferire, nel verticale ZS' al punto S. Se abbiasi un teodolite, dopo di averlo disposto mediante i livelli orizzontalmente, dirigasi il cannocchiale all'astro S; notisi il tempo in un orologio ben regolato, e la divisione a cui corrisponde l'indice nel circolo orizzontale. Rivolto quindi il cannocchiale all'oggetto B, notisi del pari la divisione nello stesso circolo; l'arco percorso dall'indice nel passaggio del cannocchiale dall'astro S all'oggetto B dà direttamente la differenza $S'B'$ dei due azimuti per il tempo osservato. Sia ora P il polo dell'equatore, e per il medesimo tempo condotto all'astro il circolo di declinazione PS, si risolva il triangolo PZS, in cui conoscesi PZ complemento della latitudine, PS complemento della declinazione dell'astro, e l'angolo orario ZPS corrispondente al tempo osservato. Per il terzo caso (XV Trig.) si avrà $PZS' = TS'$; donde si formerà $TB' = TS' - B'S'$, che rappresenta nella *fig.* 20 l'azimut di B veduto da A. Ordinariamente si fa uso in questa operazione di un teodolite moltiplicatore, e siccome l'astro in virtù del moto diurno cambia continuamente di sito, così conviene ridurre all'istante medio delle osservazioni il medio delle differenze di azimut osservate nelle singole collimazioni, seguendo i precetti esposti ai §§ 53-54.

Un poco più lungo è il calcolo se in luogo di un teodolite adoprisi un quadrante, od un circolo moltiplicatore. Disponesi allora lo stromento nel piano condotto per il centro della sfera, per l'astro S, e per la sommità del segnale B; in allora le divisioni scolpite sulla macchina danno la distanza apparente dell'astro dall'oggetto valutata nel circolo massimo BS. Per dedurne l'arco $B'S'$, si osservi eziandio la distanza ZB di B dal zenit; risolvendo il triangolo ZPS, in cui si conoscono gli stessi elementi poco fa menzionati, oltre l'angolo PZS si calcoli la distanza vera dell'astro dal zenit, dalla quale, tolta la rifrazione, ed aggiunta la paralasse di altezza, se trattasi del Sole, si formerà la distanza apparente ZS per il momento dell'osservazione. Quindi nel triangolo BZS conoscendosi i tre lati, per le formule trigonometriche si avrà l'angolo in Z, che è $= B'S'$.

Anche qui se il centro dello stromento non può esattamente situarsi sulla verticale condotta pel vertice del segnale A, si collocherà alcun poco in disparte, indi si ridurrà l'angolo osservato BaC (*Fig.* 20) al centro della stazione mediante la equazione (3), nella quale il termine che ha per denominatore la distanza dell'astro diverrà $= 0$, per essere quella $= \infty$.

Se osservasi la distanza del Sole dall'oggetto B, non potrà direttamente ottenersi che la distanza di un suo lembo dal medesimo, alla quale applicando il semidiametro, si formerà la supposta distanza del centro; se però si farà uso di stromenti moltiplicatori, si potrà eliminare il diametro solare dirigendo il cannocchiale alternativamente all'uno ed all'altro lembo. Generalmente parlando per orientare la catena dei triangoli si osserva col mezzo del Sole l'azimut di uno dei segnali per la difficoltà che s'incontra in trovare con deboli cannocchiali una stella di giorno. Se poi vogliasi fare uso delle stelle, conviene stabilire un fanale nel punto B tale che possa vedersi eziandio da A, ed in questo caso se la distanza sia considerabile, sarà necessario collocarlo nel foco di uno specchio parabolico coll'asse rivolto verso A, poichè sortendo il fascio dei raggi del fanale in una direzione paralella all'asse, lo rende visibile a distanze molto grandi.

426. Osservati gli angoli nei vertici A, B, C, D, E, F si dovranno determinare con somma diligenza le latitudini dei punti estremi A, F, i quali se non sieno sotto lo stesso meridiano, si procurerà che vi si avvicinino quanto è possibile. Gli stromenti più opportuni a queste osservazioni sono i quadranti ed i circoli moltiplicatori. Questi ultimi in ispecialità per la loro vantaggiosa costruzione sono a tutti gli altri stromenti geodetici da preferirsi, e ad essi è dovuta la somma esattezza introdotta ai nostri giorni nelle posizioni geografiche dei luoghi. Un circolo del celebre Reichenbach di Monaco di un piede di diametro è comodissimo al trasporto, e per la sorprendente esat-

tezza delle divisioni con sei od otto ripetizioni si perviene a risultamenti costanti ed uniformi. Con uno di questi circoli si osserveranno le distanze dal zenit della polare, o di qualche altra stella circompolare nel suo passaggio pel meridiano sopra e sotto il polo, ed avendole opportunamente corrette dall' effetto della rifrazione e dei piccioli movimenti periodici di aberrazione e nutazione si ridurranno tutte le osservazioni ad un' epoca fissa, per esempio al principio di uno stesso anno applicandovi la variazione dovuta alla precessione degli equinozj. Così preso il medio dei risultamenti ottenuti nei due passaggi, la loro semisomma darà la distanza del polo dal zenit, il cui complemento è la domandata latitudine. Se poi non potessero osservarsi le stelle circompolari, si scelgano due o tre stelle delle principali, la declinazione delle quali per le moltiplici osservazioni degli Astronomi è determinata coll' ultimo scrupolo. Osservate avendo le loro distanze dal zenit, e ridotte alla media loro misura per un' epoca determinata sia Z il medio dei risultamenti ottenuti per ognuna di esse, δ la sua declinazione media, sarà $L = Z + \delta$, ove per le stelle australi si riguarderà δ negativo, e per le stelle fra il polo ed il zenit sarà invece Z negativo.

427. Ad ottenere la risoluzione trigonometrica dei triangoli ABC, BCD ec. non manca ora che la misura diretta di un lato preso a base dell' operazione, o di un' altra base qualunque, che comodamente congiungere si possa mediante un triangolo accessorio alla rete dei triangoli, e dalla diligenza usata in questa misura dipende per la massima parte l' esattezza del risultamento. Quando adunque si tratti di misurare una base, conviene in primo luogo tracciare una linea retta di sufficiente estensione in una superficie piana col mezzo di un buon cannocchiale, apponendovi alla distanza di 15 a 20 tese dei punti fissi, i quali serviranno di direzione alla misura. Avendo in seguito formato cinque o sei misure uguali (per esempio tese di sei piedi) di legno ben compatto, o meglio ancora di metallo, che uniformemente dilatasi per la variazione della temperatura, nè cambia sensibilmente per le variazioni dell' igrometro, si prepareranno gli opportuni piedi, sui quali si possano disporre le misure indicate, e si avrà cura di porle sempre orizzontali coll' ajuto di un livello; perciò i piedi devonsi potere alzare ed abbassare con opportune viti.

Le tese dovranno inoltre portare nella loro testa anteriore una linguetta o picciolo pezzo incassato, che si possa svolgere con una vite, e sia esattamente diviso in linee e centesimi di linea con l' ajuto del nonio. Ciò premesso, si disporranno le misure nei loro sostegni una accanto all' altra dirigendole col traguardo sempre dalla prima all' ultima nella linea tracciata, e ponendole di livello. Si avrà cura di non porle all' immediato contatto, perchè non si urtino a vicenda, ma poste in gran vicinanza si condurrà la linguetta di ciascheduna in con-

tatto colla testa della tesa precedente, giudicandosi del contatto con una lente o con un microscopio, e si registrino le parti di linea svolte in questa operazione. Tolta quindi la prima misura, si porterà avanti a tutte le altre, che come le precedenti si porrà orizzontale nella direzione della linea misurata, e qui pure evitando da principio il contatto si leggeranno le parti di linea svolte colla vite per ottenerlo. Continuata l'operazione fino alla fine, si otterrà la lunghezza della base, se al numero intero delle tese si uniscano le parti di linea ottenute in ogni cambiamento dallo svolgere la linguetta di ciascheduna, e si riducano tutte le misure parziali ad una temperatura fissa, per esempio alla temperatura di 0° del termometro di Reaumur. Per formare facilmente questa correzione leggasi ad ogni cambiamento di tesa il termometro, ed è chiaro che la totale dilatazione di una tesa per 1° del termometro moltiplicata per la somma di tutte le temperature osservate, ed espresse in gradi positivi sopra il 0°, negativi al di sotto, darà la correzione ricercata, che sommata col numero delle tese osservate, porgerà il numero delle medesime contenute nella base misurata, quale avrebbe avuto luogo se tutte fossero state poste sul terreno alla temperatura 0°.

Oltre la correzione della temperatura, di due altre correzioni abbisogna la base misurata, delle quali una dipende dalla differenza fra gli archi e le tangenti, avvegnachè in luogo di misurare una porzione del circolo che passa per i due estremi, abbiamo misurato la porzione corrispondente del perimetro di un poligono circoscritto ad esso. La differenza è di terzo ordine, e perciò si può con ogni sicurezza trascurare. La seconda dipende dalla elevazione della base misurata sopra il livello del mare, che per noi deve costituire la vera superficie terrestre che andiamo cercando. Se c'immaginiamo il centro della terra o più esattamente il centro della sfera osculatrice alla superficie di livello del mare nella regione ove esiste la rete dei triangoli congiunto col vertice dei medesimi, unendo i punti d'incontro di essi raggi colla indicata superficie di livello si formeranno altrettanti triangoli simili ai precedenti, e quindi ridotta la base a questa superficie avremo quanto occorre per la loro completa risoluzione. Sia H l'elevazione della base misurata sopra il livello del mare, r il raggio terrestre allo stesso livello, B la base misurata, B' quella ridotta al livello del mare. Saranno B, B' due archi simili di raggio $r+H$, r; per conseguenza avremo $B' = \frac{Br}{r+H}$, la quale prossimamente porge

$$B' = B - \frac{BH}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

428. Preparati i triangoli, come nei §§ precedenti è stato indicato,

fingiamo che AB rappresenti la base misurata e ridotta al livello del mare, e sebbene sieno essi disegnati in una superficie sferica, pure nel risolverli potremo considerarli come piani per essere il raggio della sfera grandissimo. Che se pure vorrassi ottenere una maggiore approssimazione, si potrà ad essi applicare il teorema di Le-Gendre, dal quale (Trig. XVIII) risulta che si possono considerare come rettilinei, se da ciascun angolo osservato in un triangolo tolgasi l'eccesso di tutti e tre sopra due retti. Se tutti gli angoli sono stati effettivamente misurati, nulla vi sarà di più facile di questa correzione. Se poi qualche angolo non fosse stato osservato, converrà *a priori* calcolare l'indicato eccesso, per il che richiedesi una prossima cognizione del raggio della sfera, come apparisce dalle formule riferite nel citato luogo. Ridotta così la loro risoluzione a quella dei triangoli rettilinei, colle regole della Trigonometria piana sarà agevole risolverli tutti l'uno dopo l'altro principiando da ABC, in cui conosconsi il lato AB, e tutti gli angoli. Ottenuti AC, BC si passerà alla risoluzione del secondo BCD, e così si proseguirà determinando fino all'ultimo DEF tutti i loro lati.

Per ultimo si finga da F condotta la perpendicolare FG sulla direzione del meridiano. Sarà $AG = AM + MM' \ldots + M'''G$; i triangoli ABM, $MM'C$, $M'DM''$ ec. daranno queste porzioni di meridiano con molta speditezza. In fatti principiando dal primo conosconsi gli angoli ABM, BAM col lato BA, esso porgerà AM, l'angolo in M, ed il lato BM, che sottratto da BC lascia MC, quindi nel triangolo $MM'C$ si conoscono del pari due angoli ed il lato compreso, e risoluto porgerà MM' unitamente ai dati opportuni per risolvere il seguente, e così procedendo fino all'ultimo, nel quale si conosce $M'''F$ con l'angolo M''' e l'angolo retto G. Anche questa nuova serie di triangoli deve concepirsi disegnata in una superficie sferica pochissimo curva, e devesi nella loro risoluzione per maggiore precisione far uso dell'accennato teorema di Le-Gendre.

Non resta ora che dedurre la latitudine del punto G da quella osservata in F; se la perpendicolare FG non sia soverchiamente grande, essa si confonderà col paralello all'equatore condotto per F, e quindi F, G avranno la stessa latitudine; e però data la lunghezza AG, e la differenza delle latitudini $l' - l$, per le cose dette al § 421 si avrà il raggio terrestre, o almeno quello della sfera osculatrice in date unità lineari. Se poi FG sia notabilmente grande, si potrà da principio assumere la latitudine del punto G uguale alla osservata in F per dedurne una prima cognizione prossima di r, dalla quale coi precetti del seguente problema otterremo poi la vera latitudine in G.

Qui intanto osserveremo che i triangoli ABC, BCD, CDE non sono tutti in un medesimo piano, e quindi le porzioni AM, MM'

della meridiana non sono in linea retta. Per costruire la meridiana AG conviene immaginarsi il piano BAC tangente alla superficie terrestre in A; la linea AM tangente al meridiano in A, e poscia ripiegata sulla superficie terrestre lungo lo stesso meridiano fino a tagliare sotto l'angolo determinato AMB la direzione dell'arco BC. Se ora prolunghisi la AM in MM', e per il punto M si conduca una normale alla superficie della terra, ripiegando la MM' nel piano di questa normale colla AM prolungata, continuerà a tagliare BC sotto lo stesso angolo, e quando sarà distesa lungo la superficie della terra fino in M', si sarà formata la porzione di meridiana AMM'. Continuando fino alla fine la stessa operazione, si formerà tutta la meridiana AG. Nell'ipotesi della terra sferica, queste normali s'incontrano tutte nel centro della terra, giacciono in uno stesso piano, e la meridiana AG è una porzione di circolo massimo. Se la terra è un solido di rivoluzione, queste normali stanno tuttavia in uno stesso piano senza però incontrarsi in uno stesso punto, e la meridiana è una porzione della curva generatrice. Se poi la superficie terrestre non è di rivoluzione, in allora le normali non saranno in uno stesso piano, e la costruzione ora indicata servirà a tracciare sulla superficie stessa la linea $AMM'M''G$ ottenuta colla misura, la quale risulterà a doppia curvatura, e sarà diversa dal meridiano terrestre. Questa linea risulta la più breve fra i due punti A, G e gode di molte belle proprietà, per le quali rimandiamo al vol. II della Meccanica celeste di La-Place. Se l'angolo BAM non sarà l'azimut del punto B, ma un altro angolo qualunque, la linea AG risultante dall'indicata costruzione è tuttavia la brevissima fra i due punti A, G. Tali linee si appellano *geodesiche*.

Problema. Dato l'arco di circolo massimo FG perpendicolare al meridiano AG, e data la latitudine del punto F, trovare la longitudine del punto F, la latitudine del punto G, e l'angolo sotto cui l'arco FG taglia il meridiano condotto per F, ossia l'azimut di G veduto da F (Fig. 24).

429. Sia P il polo dell'equatore celeste; F, G sieno i zenit dei due punti nella superficie terrestre rappresentati da F, G nella *fig.* 20. Saranno PG, PF i meridiani celesti dei due medesimi punti; P la differenza delle loro longitudini, FG un arco di circolo massimo nella sfera celeste simile ad FG della *fig.* 20, quando considerasi la terra come sferica, l'angolo in F sarà l'azimut del punto G. Pongasi il dato arco $FG = p$, PF complemento della data latitudine in $F = 90 - L$; PG complemento della cercata latitudine in $G = 90 - \lambda$. Gli angoli in P, F si rappresentino con le lettere P, F.

Il triangolo rettangolo PGF darà le seguenti equazioni

$$(1)\ \text{sen}\,\lambda = \frac{\text{sen}\,L}{\cos p};\quad (2)\ \text{sen}\,P = \frac{\text{sen}\,p}{\cos L};\quad (3)\ \cos F = \text{tang}\,p\,\text{tang}\,L;$$

le quali risolvono il proposto problema.

Lo stesso triangolo somministra inoltre le due seguenti

$$(4)\ \text{tang}\,P = \frac{\text{tang}\,p}{\cos\lambda};\qquad (5)\ \cos P = \frac{\cos p\cos\lambda}{\cos L},$$

la quale si ottiene dividendo la (2) per la (4).

Queste equazioni combinate insieme ne somministrano una semplicissima per il calcolo della differenza $\lambda - L$ delle due latitudini dovuta al signor Prony (*Connaissence des tems pour l'année* 1808, pag. 366). In fatti si ha $\text{sen}\,(\lambda - L) = \text{sen}\,\lambda\cos L - \text{sen}\,L\cos\lambda$. Si ha inoltre per l'equazione (2) $\cos L = \frac{\text{sen}\,p}{\text{sen}\,P}$, e dalla (4) $\cos\lambda = \frac{\cos P\,\text{sen}\,p}{\text{sen}\,P\cos p}$. Sostituiti questi valori in $\text{sen}\,(\lambda - L)$, avendo riguardo all'equazione (1) si trova

$$\text{sen}\,(\lambda - L) = \text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,p\,\frac{1-\cos P}{\text{sen}\,P} = \text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,p\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}P\ \ldots\ (6)$$

Di qui poi, sostituito il valore di $\text{sen}\,\lambda$, si ottiene ancora

$$\text{sen}\,(\lambda - L) = \text{sen}\,L\,\text{tang}\,p\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}P\ \ldots\ (7)$$

Queste equazioni sono opportunissime a determinare in numeri le quantità λ e P, date essendo p ed L. In questa supposizione la (2) dà P, e la (7) dà $\lambda - L$, e quindi λ. Viceversa se fossero date λ e p, la (4) darà P, ed in seguito la (6) darà $\lambda - L$, e però L.

430. *Scolio*. L'arco p non è dato direttamente dalle misure trigonometriche, ma devesi da esse dedurre, perilchè fa d'uopo conoscere il raggio terrestre almeno prossimamente. Se p e P si riguardano come quantità di primo ordine, sarà $\lambda - L$ di secondo ordine, e perciò si potrà prendere $\lambda = L$. Detta l la latitudine del punto A (*Fig.* 20), e la lunghezza della meridiana AG in misure lineari $= g$, sarà $r = \frac{R''g}{L-l}$ (§ 421). Quindi se la lunghezza della perpendicolare FG è $= y$, sarà $p = \frac{R''y}{r}$; trovato un primo valore prossimo di r, sarà p noto prossimamente; ed in seguito le equazioni (2), (7) daranno P e λ, con i quali più esattamente si otterranno poscia r, p, P, λ, e così con due od al più tre semplicissime operazioni si otterranno queste quantità con tutta quella precisione, di cui sono suscettibili le osservazioni.

II. Breve notizia dei risultamenti ottenuti nelle diverse misure intraprese per determinare la figura della terra.

431. Non è nostra intenzione di dare qui un estratto delle molte e grandi operazioni che in diversi luoghi ed in diversi tempi sono state intraprese per misurare a diverse latitudini la lunghezza dei gradi del meridiano, nè di entrare in discussioni intorno alla fiducia che meritano le osservazioni, sulle quali si appoggiano, o sulle anomalie che si osservano in molte misure, le quali forse traggono per la massima parte origine dalle attrazioni delle montagne esistenti nei contorni delle triangolazioni, e dalle irregolarità della superficie terrestre. Tutte queste particolarità d'altronde interessantissime si troveranno nelle opere contenenti le osservazioni stesse, e negli estratti delle singole operazioni che tratto tratto trovansi negli Atti delle Accademie, nella *Monatliche correspondenz von Zach*, e nelle Effemeridi di Parigi e di Berlino. Noi qui ci limiteremo ad esporne i risultamenti, indicando gli Autori delle misure nella seguente tavola estratta dall'Astronomia del signor La-Lande vol. III. terza ediz. § 2698.

Lat. med. dei gradi misurati	Valore del gr.° in tese	Autori delle misure
0° 0′	56753	Bouguer e la Condamine al Peron (Boug., Fig. de la ter.).
33 18 *A*	57040	La-Caille al Capo di buona Sper. (Mem. de l'Ac. 1751).
39 12	56888	Mason e Dixon nell'America sett. (Phil. Trans. 1768).
43 1	56973	Boscovich in Ital. (De litt. Exp. per Pont. dit. Rom. 1755).
44 44	57069	P. Beccaria in Piemonte (Gradus Taurinensis 1774).
45 0	57023	Cassini in Francia (Meridienne verifiée).
45 57	56881	P. Liesganig in Ungheria (Dimensio Grad. etc. 1770).
48 43	57086	P. Liesganig in Austria.
49 23	57069	Picard in Francia (Degré du mer. entre Paris et Amiens).
66 20	57419	In Lapponia sotto il circ. pol. (Maupertuis, Fig. de la ter.).

Questi erano i gradi misurati, quando s'intrapresero in Francia le celebri operazioni che servire dovevano a stabilire la definitiva lunghezza del metro, con le quali misurossi l'arco di meridiano fra Formentera e Dunkerque, la cui ampiezza è = 12° 22′ 12″,39, ed equivale 705189[1]. De-Lambre, Mechain, Biot ed Arago eseguirono quest'opera gigantesca, ed in seguito si unirono le operazioni degli Astronomi francesi con quelle del generale Le-Roy in Inghilterra, e così fu prolungato l'arco di meridiano fino all'Osservatorio di Greenwich.

Furono con molta cura determinate molte latitudini intermedie, ed ecco la tavola che ne rappresenta i risultamenti estratta dall' Astronomia del signor De-Lambre (tom. III. pag. 567).

Luoghi	latitudini osservate	intervalli in gr. min. sec.	intervalli in tese fr.	grado in tese	nella latit. media di	dimin. per 1°
Greenw. Oss.	51°28′40″,00					
		0°26′31″,50	25241,9	57097,22	51°15′24″	
Dunkerque	51 2 8 ,50					7,23
		2 11 19 ,13	124944,8	57087,70	49 56 29	
Panteon . .	48 50 49 ,37					8,41
		2 40 6 ,83	152293,1	57069,31	47 30 46	
Evaux . . .	46 10 42 ,54					32,40
		2 57 48 ,24	168846,7	56977,80	44 41 48	
Carcassona	43 12 54 ,30					9,36
		1 51 7 ,72	105499,0	56960,46	42 17 21	
Mont-Jouy	41 21 46 ,58					5,03
		2 41 50 ,47	153605,8	56946,89	40 0 52	
Formentera	38 39 56 ,11					
		Somma	730431,3			

Un altro arco di meridiano fu misurato per ordine del Re di Svezia nel 1801 dai signori Svanberg, Osverbom, Palander ed Holmquist socj dell'Accademia di Stokolm nella stessa regione, ove Maupertuis, Clairaut e lo Svezzese Celso lo avevano misurato nel 1736, ad oggetto di verificare il risultamento da questi ultimi ottenuto, contro del quale si producevano fortissimi dubbj in questi ultimi tempi. Questa misura è stata intrapresa con esimj stromenti, da esercitati osservatori; si fonda sopra una base di 7414t,5, l'ampiezza dell'arco misurato è = 1° 37′ 19″,566, e corrisponde a 92777t,981; il grado ottenuto alla latitudine media di 66° 20′ 10″ è di tese 57196,16 minore di 223 di quello già ottenuto da Maupertuis. La moderna misura sembra all'antica preferibile, perchè appoggiata sopra un arco quasi doppio, esegnita con migliori stromenti, e scevra di quelle anomalie che nella prima s'incontrano.

In Inghilterra è stato misurato un altro arco di meridiano fra Dunrose nell'isola di Weight alla latitudine di 50° 37′ 8″ e Klifton nella contea di York alla latitudine di 53° 27′ 31″ per opera dei signori Gulielmo Mudge ed Isacco Dalby, donde si è dedotto il grado del meridiano alla latitudine media 52° 2′ 20″ = 57068t,67 (*Trans. Fil.* 1803; *Mon. Cor.* vol. XXIII pag. 241). A questo proposito è bene osservare che il signor Rodriguez esaminando da capo le osservazioni di questa misura per rendere conto delle singolari anomalie che vi si osservano, trova la lunghezza del grado = 57074t (*Conn. des tems* 1816 pag. 261).

Due nuove determinazioni di un arco di meridiano ci hanno somministrato alle Indie orientali i signori Reuben Bourrow negli anni

1790-91, e Gulielmo Lambton nel 1802. Il primo misurò con una catena di acciajo un arco di meridiano di 1° 7′ 50″, la cui latitudine media era = 23° 28′, e trovò il corrispondente grado di latitudine = 56725,3 tese.

Più pregevoli sono i risultamenti del signor Lambton, il quale con buoni stromenti formò una vera triangolazione, appoggiandola ad una base di 40006,4 piedi inglesi. Con 32 triangoli, nei quali il massimo errore soltanto in due casi fu di 6″, egli abbracciò l'intervallo di 1° 34′ 56″,428, e lo trovò di 95721,32 tese. Da queste operazioni alla latitudine media 12° 32′ 20″,3 risulta la lunghezza del grado in latitudine = 56763 tese, e del grado in longitudine = 57294 tese. Il signor Rodriguez nel luogo superiormente citato dice essere trascorso un errore di calcolo nella riduzione delle triangolazioni di Lambton, ed assegna la lunghezza del grado perpendicolare al meridiano di tese 57106,5 (pag. 266).

Il signor Struwe ha in questi ultimi anni condotto a fine una esattissima misura di un arco del meridiano condotto per l'Osservatorio di Dorpat in Russia estendentesi da Jacobstadt nella Curlandia fino all'isola detta Hochland nel golfo di Finlandia. Impiegò a questo oggetto degli eccellenti stromenti moltiplicatori di Reichenbach, ed appoggiò tutta l'operazione ad una base misurata con somma diligenza la quale ridotta al livello del mare risultò di tese francesi 2315,1338. Ecco i risultamenti di questa misura ricavati da un'ampia relazione che lo stesso chiarissimo autore ne porge nelle *Astron. Nachrichten* del signor Schumacher (vol. VII. pag. 385-400).

Luoghi	latitudini osservate	intervalli in gr. min. sec.	intervalli in tese	grado in tese	nella latit. media
Jacobstadt	56°30′ 4″,641	1°52′42″,775	107281,648	57108,809	57°26′26″
Dorpat . .	58 22 47 ,416	1 42 22 ,488	97538,497	57165,530	59 13 59
Hochland.	60 5 9 ,904			57135,800	58 17 37
	Somme	3 35 5 ,263	204820,145		

Si presenta in questa misura l'anomalia osservata anco in altre simili circostanze, che l'arco totale si accorda con la figura ellittica attribuita dal complesso di tutte le altre misure al meridiano terrestre; ma se ne allontanano notabilmente in ragione delle loro ampiezze i due tronchi parziali situati di qua e di là da Dorpat; l'uno in più, l'altro in meno. Questo risultamento era tanto più inaspettato, in quanto che l'intera estensione di questa triangolazione è quasi piana, pochissimo elevata sul livello del mare; donde si può concludere che

le irregolarità spesso rilevate in queste operazioni confrontando le ampiezze degli archi date dalle osservazioni astronomiche con quelle ricavate dalle misure attribuite quasi sempre all' attrazione laterale delle montagne sui fili a piombo, e sui livelli delle macchine adoperate nel fissare le latitudini estreme, si devono in gran parte alla mancanza di omogeneità, e ad una irregolare distribuzione di massa negli strati terrestri, per la quale accade che si formino dei centri parziali, che non rendendosi sensibili a distanze mediocri, esercitino in gran vicinanza una pericolosa influenza.

Per ultimo, di una misura dell' arco di meridiano fra l' Osservatorio di Gottinga e quello di Altona siamo debitori al celebre Gauss; ma pur anche non mi è riuscito di ottenerne la relazione pubblicatane dall' autore; ed altre simili misure dobbiamo attenderci dalla operosità del Governo Brittannico nei suoi Stabilimenti nell' emisfero australe, le quali tanto più si renderanno interessanti in quanto che da quella parte non abbiamo che il grado misurato da La-Caille al Capo di Buona Speranza.

Alla classe delle operazioni dirette a riconoscere la figura della terra vuolsi pure riferire la bella e grandiosa misura del paralello medio intrapresa ad instigazione di La-Place estendentesi dalle coste dell' Oceano presso Bordeaux in Francia fino Fiume oltre il mare Adriatico. I dettagli di questa celebre misura non sono ancora per intero resi di pubblica ragione, se non nella parte che riguarda la Savoja ed il Milanese in un' opera in due volumi, accompagnati da un atlante egregiamente eseguito, redatta da una commissione di Ufficiali ed Astronomi Austriaci e Piemontesi, nella quale si contengono tutte le osservazioni originali tendenti a questo grande scopo con una dotta introduzione analitica dovuta agli astronomi Carlini e Plana; opera che onora del pari i Governi che ne ordinarono e disposero il piano, ed i valentissimi soggetti ai quali venne affidato.

III. Della figura sferoidica della terra.

432. Confrontando fra loro i sopra riferiti gradi misurati sotto le diverse latitudini si scorge che dall' equatore ai poli hanno un incremento, picciolo invero, se si confronta al loro totale valore, donde è facile concludere essere la superficie della terra meno curva ai poli che all' equatore, od in altri termini compressa ai poli ed elevata all' equatore. Si perviene alla stessa conseguenza eziandio col semplice ragionamento, considerando la terra animata da un moto di rotazione che perennemente si mantenga intorno ad uno stesso asse. In allora le molecole situate all' equatore sono sottoposte ad una forza centrifuga più grande, la quale direttamente opponendosi allo sforzo della

gravità le allontana di più dall'asse di rotazione, e fa prendere alla massa intera una figura rigonfia verso l'equatore che va sempre più deprimendosi avvicinandosi ai poli. Dietro i precetti dell'idrostatica si dimostra che una massa fluida sottoposta in tutte le sue molecole all'attrazione scambievole ed alla forza centrifuga prodotta dalla rotazione intorno ad un asse costante, si compone alla superficie *nella* figura di un'ellissoide di rivoluzione, il cui asse minore sia quello di rotazione. Noi rimandiamo i nostri lettori al Trattato sulla figura della terra di Clairaut, ed alla Meccanica celeste di La-Place per la ricerca della vera figura della superficie terrestre dietro la teoria dell'attrazione universale, mentre in questo luogo supponendola un'ellissoide, determineremo dietro le misure dei gradi le sue dimensioni.

433. Supponendo pertanto la terra un'ellissoide di rivoluzione compressa ai poli ed elevata all'equatore, il meridiano terrestre sarà un'ellisse uguale alla generatrice, mentre il meridiano celeste rimane un circolo massimo della sfera condotto per l'asse di rivoluzione. L'equatore terrestre è un circolo che ha per diametro l'asse maggiore dell'ellisse, ed i paralelli all'equatore sono tanti circoli, i raggi dei quali sono le applicate dell'ellisse paralelle al semiasse maggiore.

Sia ora PEp (*Fig.* 25) la mezza ellisse generatrice, la quale passando per un punto particolare M della terra ne forma il suo meridiano; P, p i poli dell'equatore, Pp l'asse di rivoluzione che è anche l'asse minore dell'ellisse, EC la sezione dell'equatore col meridiano, ossia il semiasse maggiore dell'ellisse. Se al punto M si conduce una normale MS alla curva, e si prolunga fino al cielo stellato in Z, rappresenterà questa la direzione dei gravi cadenti, ed il punto Z sarà il zenit dell'osservatore in M; l'angolo MSE misurerà la distanza del zenit dall'equatore celeste, e però sarà la latitudine geografica del punto M, la quale tanto nell'ipotesi del meridiano ellittico che circolare è uguale all'elevazione del polo sopra l'orizzonte, e direttamente determinasi dall'osservazione. La latitudine è pertanto ben differente dall'angolo MCE, che il raggio terrestre fa con l'equatore; la differenza è l'angolo CMS, che nel § 171 abbiamo disegnato col nome di *angolo della verticale*, mentre MCE è quell'angolo che ivi abbiamo indicato con L.

434. Sia $CE = a$, $CP = b$, $CM = r$, $CQ = x$, $QM = y$, $MSE = L$, $MCE = L'$, $MS = n$, $MS' = n'$, l'arco $EM = s$, $mM = ds$; il raggio di curvatura al punto $M = \rho$, l'eccentricità dell'ellisse $= ae$, cosicchè $b^2 = a^2(1 - e^2)$. L'equazione all'ellisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ darà $\frac{y\,dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x$. Quindi la subnormale $QS = \frac{b^2}{a^2}x$. Ora si ha tang $L = \frac{QM}{QS} = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$; sostituendo il va-

lore di y avremo $\text{tang}\, L = \frac{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{b\,x}$, donde si deduce

$$x = \frac{a^2 \cos L}{\sqrt{(a^2 \cos^2 L + b^2 \,\text{sen}^2 L)}} = \frac{a \cos L}{\sqrt{(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)}} \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$y = \frac{b^2}{a^2}\, x \,\text{tang}\, L = \frac{b^2 \,\text{sen}\, L}{a\sqrt{(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)}} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Differenziando queste equazioni, avremo

$$d\,x = -\,a\,(1 - e^2)\,\text{sen}\, L\,(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)^{-3/2}\, d\,L\,;$$

$$d\,y = +\,a\,(1 - e^2)\cos L\,(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)^{-3/2}\, d\,L\,;$$

dalle quali tosto si ottiene

$$d\,s = \sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)} = a\,(1 - e^2)\,(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)^{-3/2}\, d\,L \quad . \; . \; . \; (3)$$

Dal calcolo differenziale si sa che il raggio ϱ di curvatura nel punto M di una curva è $= \frac{d\,s}{d\,L}$; perciò avremo

$$\varrho = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)^{3/2}} \quad . \; . \; . \; (4)$$

In seguito si avrà $M\,S = n = \frac{y}{\text{sen}\, L} = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)}} \; . \; . \; . \; (5)$

$$M\,S' = n' = \frac{x}{\cos L} = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \,\text{sen}^2 L)}} \; . \; . \; . \; (6)$$

Quanto ad n' è facile a vedere che esso rappresenta anche il raggio di curvatura della linea geodesica perpendicolare al meridiano nel punto M; giacchè ruotando l'ellisse $P\,M\,p$ per un arco minimo, il punto M scorre sopra un piano perpendicolare alla stessa $P\,M\,p$ guidato lungo la normale $M\,S$, ed incontrandosi le due prossime posizioni dell'ellisse nell'asse $P\,p$, sarà in S' il centro del circolo osculatore alla curva descritta da M. Ciò si ottiene eziandio dalle formule generali della Geometria sublime esposte nei trattati di calcolo differenziale.

Dalle precedenti espressioni si deducono ancora i valori di L' e di r, dei quali abbiamo fatto uso nel calcolo delle paralassi. In fatti l'equazione $\text{tang}\, L = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$ (a motivo di $\frac{y}{x} = \text{tang}\, L'$) dà

$\text{tang}\, L' = \frac{b^2}{a^2}\,\text{tang}\, L$, la quale darà (Trig. IV)

$L' - L = -\,\theta \,\text{sen}\, 2\,L + \frac{1}{2}\,\theta^2 \,\text{sen}\, 4\,L$, essendo $\theta = \frac{a^2 - b^2}{a + b^2} = \frac{e^2}{2 - e^2}$.

Se si trascurano le quantità superiori ad e^4, si avrà

$$L' - L = -\left(\tfrac{1}{2}\,e^2 + \tfrac{1}{4}\,e^4\right) R'' \,\text{sen}\, 2\,L + \tfrac{1}{8}\,e^4\, R'' \,\text{sen}\, 4\,L \quad . \; . \; . \; (7)$$

serie molto comoda per calcolare l'angolo della verticale ad ogni latitudine L, quando conoscasi l'eccentricità del meridiano.

In seguito sarà $r = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{a\,[1 - (2\,e^2 - e^4)\,\text{sen}^2\,L]^{1/2}}{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,L)^{1/2}}$.
Svolto in serie il secondo membro col trascurare le potenze superiori ad e^4, e posto $a = 1$, si avrà $r = 1 - \frac{1}{2}(e^2 - e^4)\,\text{sen}^2\,L - \frac{3}{8}e^4\,\text{sen}^4\,L$, la quale si cambia in

$$r = 1 - \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{64}e^4 + (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{16}e^4)\cos 2\,L - \tfrac{3}{64}e^4\cos 4\,L \quad . \; . \; . \; (8)$$

che servirà al calcolo di r per ogni latitudine.

435. Si può dietro le precedenti equazioni trovare con facilità la lunghezza del grado di meridiano sotto una qualunque latitudine. In fatti osservando che per l'estensione di un grado il meridiano senza sensibile errore si confonde coll'arco del suo circolo osculatore in quel punto, chiamata g la cercata lunghezza, π il rapporto della circonferenza al diametro, ossia il numero 3,14159265, sarà $g = \varrho\,1^\circ = \frac{\pi\,\varrho}{180}$. Sostituendo i valori di ϱ e di π, si otterrà

$$g = \frac{0{,}017453292\;a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,L)^{3/2}} \quad . \; . \; . \; (9) \; (*)$$

436. Questa equazione porge il mezzo di determinare l'eccentricità e dietro la misura di due gradi verso l'equatore ed il polo. Sieno g, g' le lunghezze dei due gradi ottenute con una triangolazione; L, L' le loro medie latitudini. L'equazione (9) darà il valore di g' cambiando L in L'; dividendo poi g' per g, ed elevando il quoto alla potenza $\frac{2}{3}$, si ottiene $\left(\frac{g'}{g}\right)^{2/3} = \frac{1 - e^2\,\text{sen}^2\,L}{1 - e^2\,\text{sen}^2\,L'}$, dalla quale si ricava

$$e^2 = \frac{(g' : g)^{2/3} - 1}{(g' : g)^{2/3}\,\text{sen}^2\,L' - \text{sen}^2\,L} = \frac{1 - (g : g')^{2/3}}{\text{sen}^2\,L' - (g : g')^{2/3}\,\text{sen}^2\,L} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Trovato e^2, l'equazione (9) darà $a = \frac{57{,}2957795\,(1 - e^2\,\text{sen}^2\,L)^{3/2}\,g}{1 - e^2}$, ed in seguito si avrà $b = a\sqrt{(1 - e^2)} = a\,(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 \ldots)$. Po-

(*) Con ragionamenti del tutto simili, indicando per G il grado di una perpendicolare alla meridiana, si troverà $G = \frac{\pi\,a}{180\sqrt{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,L)}}$. Questa equazione combinata con l'equazione (9) darà dietro le misure fatte sotto una sola latitudine nel senso del meridiano, e nel senso ad esso perpendicolare il valore di e^2; rendesi al tempo stesso manifesto che si può ricavare l'eccentricità del meridiano terrestre col mezzo della precedente equazione dietro due valori di G misurati sotto diverse latitudini (Vedasi un bel Commentario del signor Carlini nelle *Effemeridi di Milano* pel 1826).

sto quindi $\alpha = \frac{a-b}{a}$, sarà $\alpha = \frac{1}{2} e^2 + \frac{5}{8} e^4$. A questa quantità α si dà il nome di *appianamento;* od anche *schiacciamento*.

Esempio. Prendiamo a confrontare il grado misurato all'equatore da Bouguer e La-Condamine con quello dedotto dalla triangolazione dei signori Svanberg, Palander ec. alle regioni polari. Avremo $g = 56753^t$, $g' = 57196^t,16$, $L = 0^\circ\ 0'$, $L' = 66^\circ\ 20'\ 10''$.

Il calcolo dell'equazione (10) darà $e^2 = 0,00616568$; in seguito si formerà $\alpha = 0,0030876 = \frac{1}{323}$ circa; $a = 3271881^t$, $b = 3261778^t$.

La lunghezza di un grado sotto la latitudine λ sarà

$\gamma = \frac{56753^t}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)^{3/2}}$; così posto $\lambda = 45^\circ$, si troverà $\gamma = 57016^t,44$ poco diversa dalla misura di Cassini in Francia alla stessa latitudine.

437. Proponiamoci ora di trovare la lunghezza dell'arco di meridiano compreso fra le date latitudini L, L'. Si riprenda perciò l'equazione (3) $ds = a(1 - e^2)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{-3/2} dL$, e si sviluppi in serie conservando solo i termini moltiplicati per e^4. Convertendo le potenze dei seni in coseni di archi multipli, si troverà

$$ds = a\,dL\left(1 - \tfrac{3}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4\right) - \left(\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{3}{16} e^4\right) a\,dL \cos 2L + \tfrac{15}{64} e^4 a\,dL \cos 4L \ldots$$

che integrata fra i limiti L ed L' dà

$$s = a\left(1 - \tfrac{3}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4\right)(L' - L) - a\left(\tfrac{3}{8} e^2 + \tfrac{3}{32} e^4\right)(\operatorname{sen} 2L' - \operatorname{sen} 2L)$$
$$+ \tfrac{15}{256} a e^4 (\operatorname{sen} 4L' - \operatorname{sen} 4L) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

la quale presenta l'arco di meridiano fra le latitudini L' ed L. Per l'uso di questa formula conviene prima ridurre la quantità $L' - L$ a parti di raggio, ed in conseguenza dovrassi dividere per R'' se sia essa espressa in secondi, e qualora sia espressa in gradi e parti di grado, come il più delle volte accade, e come noi lo supporremo nelle cose seguenti, si dividerà per il numero dei gradi contenuti in R'', che indicheremo con R°. In numeri poi si avrà

$$R^\circ = 57^\circ,2957795 = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

438. Posto $L = 0$, $L' = 90^\circ$, l'equazione (11) darà il quarto del meridiano, che indicato per Q sarà così espresso

$$Q = a\left(1 - \tfrac{3}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4\right) \tfrac{1}{2} \pi \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dividendo ora l'equazione (11) per la (12), con le opportune riduzioni si troverà

$$s = \frac{Q}{90}(L' - L) - \frac{Q}{\pi}\left(\tfrac{3}{8} e^2 + \tfrac{3}{16} e^4\right) \operatorname{sen}(L' - L) \cos(L' + L)$$
$$+ \frac{15\,Q e^4}{64\,\pi} \operatorname{sen} 2(L' - L) \cos 2(L' + L) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

la quale porge molto semplicemente il valore di s, se sia dato Q in unità lineari, e se $L' - L$ esprimasi in gradi e parti di grado. Essa può viceversa servire a determinare Q, dato s ed e; che se sarà $L' + L = 90°$, darà il valore di Q con molta precisione, ancorchè sia e mediocremente noto. Si vede di qui che le misure eseguite in Francia sono valevoli a dare Q con esattezza, poichè posta la latitudine di Formentera $= L = 38° \; 39' \; 56'',11$, e quella di Greenwich $= L' = 51° \; 28' \; 40'',00$, sarà $L' - L = 12° \; 48' \; 43'',89 = 12°,812192$; $L' + L = 90° \; 8' \; 36'',11$; e perciò nel secondo membro della (13) il secondo e terzo termine saranno picciolissimi, ed un leggero errore in Q non sarà sensibile nel risultamento. Quindi dato s avremo

$$Q = \frac{90}{L' - L} s + \frac{90\,Q}{\pi (L' - L)} \left(\tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{3}{4} e^4\right) \operatorname{sen}(L' - L) \cos(L' + L)$$

$$- \frac{1350\,Q\,e^4}{64\,\pi (L' - L)} \operatorname{sen} 2 (L' - L) \cos 2 (L' + L) \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Per ottenere Q da questa equazione, si trascureranno da principio nel secondo membro gli ultimi due termini, ed il primo darà un valore di Q abbastanza prossimo per valutare quelli già omessi. Nel nostro caso ritenendo $e^2 = 0{,}00616568$, ed $s = 730431{,}3$ ritrovasi (con le tavole a 7 cifre) $Q = 5130957^t$ prossimam., e sostituendo questo valore negli ultimi due termini, il totale aggregato dà $Q = 5130942^t$. Siccome poi si stabilì che il metro o nuova unità lineare fosse la dieci-millionesima parte di Q, sarà dietro questo risultamento $1^m = 0^t,5130942 = 3^P \; 0^P \; 11^l,313$. Il signor La-Place nella sua Meccanica celeste dall'arco misurato fra Montjoui e Dunkerque trova $1^m = 0^t,5130740 = 3^P \; 0^P \; 11^l,296$, ed a questo risultamento si attenne la Commissione dei pesi e misure.

439. L'equazione (13) darà in ogni latitudine il valore di $1°$, solchè si faccia $L' - L = 1°$. Chiamando g il grado del meridiano, la cui estremità più australe corrisponde alla latitudine L, si avrà dietro i valori superiori di e^2, Q

$$g = 57010^t,48 - 264^t,43 \cos(2L + 1°) + 0^t,51 \cos(4L + 2) \ldots (15)$$

nella quale $2L + 1$ è la doppia latitudine media del grado misurato. I numeri o coefficienti di questa equazione possono soffrire qualche modificazione in grazia dell'incertezza di e^2 e di Q. Indicando per α, β le correzioni del primo e secondo termine (potendosi quasi interamente trascurare il terzo come picciolissimo) si faranno concorrere nella loro determinazione tutti i gradi misurati; trovati α, β, sarà poi facile determinare e^2, e quindi anche l'appianamento (Vedasi la Meccanica celeste del signor La-Place vol. II).

440. Del resto dobbiamo qui osservare non essere stato possibile

un accordo plausibile di tutti i gradi misurati con la superficie di un' ellissoide di rivoluzione. Il più probabile schiacciamento che accordasi anche con le osservazioni della lunghezza del pendolo semplice a diverse latitudini è $= 1 : 312$. Le misure fatte in Francia prese separatamente lo indicano $= 1 : 151$ circa. Se vogliamo credere alla misura di La-Caille al Capo di Buona Speranza, dobbiamo concludere che l' emisfero australe non è simile al boreale, e si potrebbe credere che la vera figura della terra non sia di rivoluzione. Ad ogni modo la differenza degli assi essendo molto picciola, questa incertezza non ha influenza sensibile sui calcoli astronomici, nei quali volgarmente si sceglie lo schiacciamento $1 : 334$ dato dalle misure all' equatore, ed in Francia. Oriani nella sua Trigonometria sferoidica lo trova $= 1 : 334,96$, donde poi deduce $a = 3271209^t$, $b = 3261443^t$, $e^2 = 0,0059614825$. In queste ipotesi l' equazione (12) dà $Q = 5130740$. Indi si avrà

$$g = 57008^t,22 - 255^t,64 \cos(2L + 1^\circ) + 0^t,47 \cos(4L + 2) \ldots (16)$$

dei quali numeri ci varremo nelle cose seguenti (*).

441. L' equazione (11) serve ancora a risolvere il problema inverso; *data cioè la lunghezza s di un arco di meridiano in tese, e la latitudine del suo primo punto, cercasi la latitudine dell' altro suo estremo punto*. In fatti se dividasi quella equazione da ambe le parti per $a(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4)$, e per brevità si ponga

$$s' = \frac{s}{a(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4)} = \frac{90^\circ s}{Q}, \quad L' - L = x,$$ si cangerà nella seguente

$$s' = x - (\tfrac{3}{8}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4)[\operatorname{sen}(2x + 2L) - \operatorname{sen} 2L] + \tfrac{15}{256}e^4[\operatorname{sen}(4x + 4L) - \operatorname{sen} 4L],$$

la qual serie convertita col mezzo del teorema di La-Grange (§ 87) con le opportune riduzioni, ed avendo riguardo di moltiplicare per R'' quei coefficienti che sarebbero numeri astratti, darà il valore di x, che sommato con L, porgerà per L' la seguente serie

$$L' = L + s' + (\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)R'' \operatorname{sen} s' \cos(s' + 2L) - \tfrac{15}{128}R''e^4 \operatorname{sen} 2s' \cos(2s' + 4L)$$
$$+ \tfrac{9}{16}R''e^4 \operatorname{sen} s' \cos(2L + s') \cos(2L + 2s') \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Posto $e^2 = 0,00596148$, avremo in numeri

$$L' = L + s' + 924'',98 \operatorname{sen} s' \cos(s' + 2L) - 0'',86 \operatorname{sen} 2s' \cos(2s' + 4L)$$
$$+ 4'',12 \operatorname{sen} s' \cos(2L + s') \cos(2L + 2s') \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

(*) Leggesi nelle *Notizie astronomiche di Schumacher* (vol. VII pag. 332) un estratto molto interessante di una discussione del signor Schmidt, nella quale ha intrapreso a determinare la figura della terra, come risulta dal confronto delle principali e più sicure misure dei gradi del meridiano finora conosciute, assumendo per principio, che la somma dei quadrati delle differenze fra le latitudini osservate e calcolate debba divenire un minimo. Ecco il risultamento delle sue ricerche

$a = 3271852^t,32$; $b = 3260853^t,70$; $Q = 5130778^t,95$; schiacciamento $= \frac{1}{297,479}$.

Digitized by Google

dalla quale apparisce che potranno trascurarsi i termini dipendenti da e^4, se non si aspiri all'ultima esattezza.

IV. Di alcune proprietà della linea brevissima, ossia della linea geodesica, considerando la terra come un'ellissoide.

442. Sieno nella superficie terrestre due punti qualunque L, M (*Fig.* 26.) situati sotto due meridiani ellittici PLA, PMQ intersecantisi nel polo P della terra; LM rappresenti la linea brevissima che gli unisce, ed AB sia l'equatore terrestre.

Pongasi la latitudine del punto $L = l$, del punto $M = \lambda$; la differenza di longitudine dei due meridiani, ossia l'angolo da essi compreso nel polo $P = \omega$, la linea brevissima LM espressa in unità lineari $= s$; l'angolo sotto cui taglia il meridiano in $L = z'$ ed in $M = z$; il raggio del paralello condotto per $L = r'$, di quello condotto per $M = r$; il raggio di curvatura del meridiano al punto $L = R'$, ed al punto $M = R$. È manifesto che riguardando il punto L come principio della linea LM, le precedenti quantità relative ad esso saranno costanti, e variabili quelle relative al punto M, che può considerarsi sotto qualunque meridiano. Si conduca un meridiano Pmq infinitamente vicino a PMQ, e si descriva l'archetto $M\mu$ del paralello appartenente al punto M. Si avrà dietro le denominazioni precedenti $Mm = ds$, $M\mu = r\,d\omega$, $\mu m = R\,d\lambda$, e quindi il triangolo rettangolo infinitesimo $M\mu m$ darà $ds = \sqrt{(r^2\,d\omega^2 + R^2\,d\lambda^2)}$.

Per istabilire la natura del rapporto fra ω, λ opportuno a rendere ds un elemento della linea brevissima, pongasi $d\lambda = p\,d\omega$, e la precedente diverrà $ds = \sqrt{(r^2 + R^2 p^2)}\,d\omega = u\,d\omega$, essendo

$$u = \sqrt{(r^2 + R^2 p^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ed $\int u\,d\omega$ sarà l'integrale che dovrà rendersi un minimo dietro i precetti del *calcolo delle variazioni*.

Io osservo perciò che u è funzione di λ e di p indipendente da ω; le espressioni di r, R date al § 434 non contenendo che la sola λ. Sarà perciò . . . $du = \left(\frac{du}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{du}{dp}\right) dp$ . . . (2)

e perchè l'integrale sia un minimo, dovrà aver luogo l'equazione (Paoli, *Elem. d'algebra* T. II § 191) $\left(\frac{du}{d\lambda}\right) = \frac{1}{d\omega}\,d\left(\frac{du}{dp}\right)$. Sostituito questo valore nell'equazione (2), osservando che $d\lambda : d\omega = p$, essa diviene integrabile, ed eseguita l'integrazione si ottiene

$$u = p\left(\frac{du}{dp}\right) + C \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Per determinare la costante arbitraria C si osservi che il triangolo

$M m \mu$ dà (essendo $M m \mu = z$) $M \mu = M m \operatorname{sen} z$, la quale per la sostituzione di $M \mu$, $M m$ diviene $r = u \operatorname{sen} z$. Ora dall'equazione (1) si ha $p\left(\frac{du}{dp}\right) = \frac{R^2 p^2}{u}$; sostituendolo nell'equazione (3) si troverà $C = \frac{u^2 - R^2 p^2}{u} = \frac{r^2}{u} = r \operatorname{sen} z$. Quindi per il punto dato L avremo $C = r' \operatorname{sen} z'$, donde si trae l'equazione finita dovuta al celebre Clairaut . . . $r \operatorname{sen} z = r' \operatorname{sen} z'$ . . . (4)

Inoltre essendosi trovato $C = \frac{r^2}{u}$, avremo . . . $u = \frac{r^2}{r' \operatorname{sen} z'}$ . . . (5)

e se in questa sostituiscasi per u il suo valore (1), e si ricavi il valore di p, avremo . . . $p = \pm \frac{r\sqrt{(r^2 - r'^2 \operatorname{sen}^2 z')}}{R r' \operatorname{sen} z'}$ . . . (6)

In seguito dalle equazioni $d\lambda = p\, d\omega$, $d s = u\, d\omega$ otterremo

$$d\omega = \frac{d\lambda}{p} = \frac{-r' \operatorname{sen} z' R\, d\lambda}{r\sqrt{(r^2 - r'^2 \operatorname{sen}^2 z')}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$d s = \frac{u\, d\lambda}{p} = \frac{-r R\, d\lambda}{\sqrt{(r^2 - r'^2 \operatorname{sen}^2 z')}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ove si dà al secondo membro il segno —, perchè si suppone che crescendo ω, s, la via brevissima pieghi all'equatore, e λ diminuisca.

Se ora in quelle equazioni si sostituiscono i valori di r, R espressi per λ, e quelli di r', R' dati per l, i secondi membri non conterranno che la variabile λ, e perciò si potranno sempre ottenere i loro integrali od esattamente, o per serie. Così tra i sei elementi che compongono il triangolo sferoidico MPL, cioè l, λ, ω, s, z, z' avremo le tre equazioni (4), (7), (8), in virtù delle quali datine tre qualunque, si possono ottenere gli altri tre. La loro generale integrazione, e l'evoluzione dei casi particolari di cui questo problema è suscettibile troppo a lungo ci guiderebbe, e per questa rimandiamo i nostri lettori agli Elementi di trigonometria sferoidica del signor Oriani inseriti nel vol. I e II dell'Istituto Italiano, ove questa materia è trattata con tutta l'estensione e chiarezza. Noi qui ci contenteremo di considerare il caso più comune in geodesia, quello cioè in cui la linea brevissima taglia alla sua origine il meridiano ad angolo retto, e per conseguenza in cui $z' = 90°$.

443. Posto pertanto $\operatorname{sen} z' = 1$, si sostituiscano per r, r', R i loro valori dati dalle equazioni (1), (4) del § 434, che nelle attuali nostre denominazioni si riducono ai seguenti

$$r' = \frac{a \cos l}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 l)}}, \quad r = \frac{a \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)}}, \quad R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)^{3/2}},$$

e le equazioni (7), (8) con facili riduzioni diverranno

$$d\omega = \frac{-\sqrt{(1-e^2)}\,(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\lambda)^{-1:2}\cos l\,d\lambda}{\cos\lambda\sqrt{(\mathrm{sen}^2 l-\mathrm{sen}^2\lambda)}},$$

$$d s = \frac{-a\sqrt{(1-e^2)}\sqrt{(1-e^2\,\mathrm{sen}^2 l)}\cos\lambda\,(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\lambda)^{-3:2}\,d\lambda}{\sqrt{(\mathrm{sen}^2 l-\mathrm{sen}^2\lambda)}}.$$

Se ora si faccia . . . $\mathrm{sen}\,\lambda = \mathrm{sen}\,l\cos\psi$ . . . (9)
e si esprima $d\lambda$ per $d\psi$, le equazioni precedenti si cangiano in

$$d\omega = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\cos l\,(1-e^2\,\mathrm{sen}^2 l\cos^2\psi)^{-1:2}\,d\psi}{1-\mathrm{sen}^2 l\cos^2\psi},$$

$$d s = a\sqrt{(1-e^2)}\sqrt{(1-e^2\,\mathrm{sen}^2 l)}\,(1-e^2\,\mathrm{sen}^2 l\cos^2\psi)^{-3:2}\,d\psi,$$

le quali sviluppate in serie, trascurando i termini moltiplicati per e^4, danno

$$d\omega = \frac{\cos l\,d\psi}{1-\mathrm{sen}^2 l\cos^2\psi} - \tfrac{1}{2}e^2\cos l\,d\psi \quad . \; . \; . \quad (A)$$

$$d s = a\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}e^2\cos^2 l\right)d\psi + \tfrac{3}{4}a\,e^2\,\mathrm{sen}^2 l\cos 2\psi\,d\psi \; . \; . \; . \quad (B)$$

Le equazioni (A), (B) s'integrano ora facilmente coi primi precetti del calcolo integrale; eseguite queste integrazioni si ottiene

$$\omega = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{\mathrm{tang}\,\psi}{\cos l} - \tfrac{1}{2}e^2\psi\cos l,$$

$$s = a\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}e^2\cos^2 l\right)\psi + \tfrac{3}{8}a\,e^2\,\mathrm{sen}^2 l\,\mathrm{sen}\,2\psi,$$

alle quali non si aggiungono le costanti, perchè deve aversi $\omega = s = 0$ quando $l = \lambda$. Ora essendo $l = \lambda$, in virtù dell'equazione (9) si ha $\psi = 0$, perciò ω, s, ψ sono nulle al tempo stesso, ed in conseguenza le costanti sono pure $= 0$.

Quindi le seguenti equazioni serviranno sempre a determinare la via brevissima e la differenza in longitudine di due punti situati in una perpendicolare alla meridiana di uno di essi, date essendo le latitudini l, λ del primo ed ultimo punto, per primo punto intendendosi quello in cui la via brevissima fa con la meridiana un angolo retto.

La equazione superiore (9) darà $\cos\psi = \frac{\mathrm{sen}\,\lambda}{\mathrm{sen}\,l}$. Quindi pongasi

(10) . . . $\frac{\mathrm{tang}\,\psi}{\cos l} = \mathrm{tang}\,\varphi$; e si avrà

(11) . . . la diff. in longit. $\omega = \varphi - \tfrac{1}{2}e^2\psi\cos l$;

(12) . . . $s = a\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}e^2\cos^2 l\right)\frac{\psi}{R''} + \tfrac{3}{8}a\,e^2\,\mathrm{sen}^2 l\,\mathrm{sen}\,2\psi$.

La equazione (9) è poco atta a dare il valore di ψ con precisione, se l, λ poco fra loro differiscano. Si potrà sostituirle la seguente, che facilmente da essa deducesi con trigonometriche trasformazioni

$$(9)' \ldots \tang \tfrac{1}{2} \psi = \sqrt{\frac{\tang \tfrac{1}{2}(l-\lambda)}{\tang \tfrac{1}{2}(l+\lambda)}}.$$

Viceversa, quando sia dato il valore di s e quello di l, le equazioni precedenti daranno i valori di ψ, ω e λ. In fatti l'equazione (12) o mediante il regresso della serie, o mediante il teorema di La-Grange darà

$$(13) \ldots \psi = \frac{R'' s}{a}(1+\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{4}e^2\cos^2 l) - \tfrac{3}{8}R''e^2 \operatorname{sen}^2 l \operatorname{sen}\frac{2R''s}{a}.$$

Ottenuto ψ, l'equazione (10) darà l'angolo φ, e l'equazione (11) darà la differenza in longitudine ω. Per ultimo l'equazione (9) porgerà la latitudine λ dell'estremo punto della linea brevissima.

Le equazioni (9), (10) in virtù di riduzioni analoghe a quelle del § 429 danno eziandio

$$(14) \ldots \operatorname{sen}(l-\lambda) = \operatorname{sen} l \operatorname{sen}\psi \tang \tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{sen}\lambda \tang \psi \tang \tfrac{1}{2}\varphi,$$

dalla quale con facilità ed esattezza si può dedurre la differenza $l-\lambda$.

Dalle cose precedenti spontanea risulta la soluzione del seguente problema, la cui applicazione è frequentissima nei calcoli geodesici.

Problema. Date sopra la superficie terrestre le coordinate rettangole di un punto rapporto alla meridiana di un altro punto con la latitudine di quest' ultimo, si domanda la differenza delle loro latitudini, e la differenza delle loro longitudini; e viceversa date queste differenze con la latitudine di uno di essi punti, cercansi le coordinate rettangole dell' altro rapporto alla meridiana del primo.

444. Sieno A, F (*Fig.* 24) i due dati punti; AP la meridiana del primo, sopra la quale conducasi la perpendicolare geodesica FG; domandasi in primo luogo la differenza delle latitudini e delle longitudini di A ed F conoscendosi la latitudine di A, e le coordinate $AG = x$, $GF = y$ date in tese. Pongasi la latitudine del punto $F = \lambda$, quella di $G = l$, e del punto $A = L$. Si faccia, come nel

$$\S\ 441 \ldots s' = 90^\circ \frac{x}{Q} \ldots (1)$$

si avrà $\ldots l = L + s' + \tfrac{3}{4}e^2 R'' \operatorname{sen} s' \cos(s' + 2L) \ldots (2)$

Ottenuto l, la superiore equazione (13) trascurando e^4, può anche scriversi sotto la forma (se si rifletta che s corrisponde all'attuale y)

$$\psi = \frac{R''(1+\tfrac{1}{4}e^2)}{a}(1+\tfrac{1}{4}e^2\cos^2 l)y - \tfrac{3}{8}R''e^2 \operatorname{sen}^2 l \operatorname{sen}\frac{2R''y}{a} \ldots (3)$$

In seguito si otterranno φ, λ ed ω mediante le equazioni

$$\tang \varphi = \frac{\tang \psi}{\cos l} \ldots (4); \qquad \operatorname{sen}(l-\lambda) = \operatorname{sen} l \operatorname{sen}\psi \tang \tfrac{1}{2}\varphi \ldots (5);$$

$$\omega = \varphi - \tfrac{1}{2} e^2 \psi \cos l \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Egli è più comodo di esprimere nell'equazione (3) il semiasse a mediante il quarto di meridiano Q; trascurando i termini dipendenti da e^4, l'equazione (12) § 438 dà $a = \frac{2Q}{\pi(1 - \frac{1}{4}e^2)}$. S'introduca questo valore nell'equazione (3), e si osservi che $\frac{1}{2}(\pi R'') = 90°$; se per brevità si fa $\frac{90° y}{Q} = m$, la detta equazione diviene

$$\psi = m(1 + \tfrac{1}{4} e^2 \cos^2 l) - \tfrac{1}{8} R'' e^2 \operatorname{sen}^2 l \operatorname{sen} 2m \quad . \quad . \quad . \quad (3)'$$

Inversamente, se sieno dati ω, L, λ si domandano x, y. Perciò conviene calcolare gli angoli ausiliari φ, l, ψ (che entrano in composizione di x, y). Fra queste quantità per le cose precedenti esistono le seguenti equazioni . . . $\varphi = \omega + \frac{1}{2} e^2 \psi \cos l$ . . . (7)

Indi l'equazione $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\cos l}$ combinata con l'altra

$\operatorname{sen} \lambda = \operatorname{sen} l \cos \psi$ dà $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} \psi}{\cos \lambda}$, donde si forma

$$\operatorname{sen} \psi = \cos \lambda \operatorname{sen} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

In oltre sarà . . $\operatorname{sen}(l - \lambda) = \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$ . . . (9)

Sebbene sia facile esprimere φ mediante una serie ordinata per ω, tuttavia riesce più comodo il metodo delle continue approssimazioni, che ordino così.

Pongo $\varphi = \omega$, da cui differisce di una quantità dell'ordine e^2, le equazioni (8), (9) daranno i valori prossimi di l, ψ, col mezzo dei quali l'equazione (7) darà un più esatto valore di φ. Si calcoleranno di nuovo l, ψ colle equazioni (8), (9), ed in seguito se giudicherassi opportuno, si tornerà dalla (7) a ricavare φ. Così con due o tre operazioni si otterranno i veri valori di l, ψ, φ.

Quindi l'equazione (12) § 443 darà (esprimendo a per Q, ed osservando che $s = y$)

$$y = \frac{2Q}{\pi}(1 - \tfrac{1}{4} e^2 \cos^2 l) \frac{\psi}{R''} + \tfrac{3}{4} \frac{Q}{\pi} e^2 \operatorname{sen}^2 l \operatorname{sen} 2\psi \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Per ultimo sarà x la lunghezza dell'arco di meridiano fra le latitudini L, l, e sarà data dall'equazione (13) § 438 cangiando L' in l.

CAPITOLO VIII.

Principj generali di geografia, e della costruzione delle carte sì celesti che geografiche.

445. Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato coll'ajuto delle osservazioni che la superficie terrestre si avvicina moltissimo a quella di una sfera, il cui diametro è grandissimo, e prossimamente può ritenersi = 6532652 tese di Francia, che è il medio fra l'asse maggiore e l'asse minore dello sferoide assegnato al § 440. Quindi apparisce che quantunque la terra sia alla sua superficie variamente e con molta irregolarità intralciata di mari, monti, valli, fiumi, stagni, paludi ec. ciò non toglie che come sferica non possa riguardarsi, poichè tutte queste irregolarità spariscono del tutto se col diametro terrestre si confrontino. Così a cagione d'esempio una delle più alte montagne è il Chimboraco nella catena delle Andes in America; e pure la sua elevazione di circa 3300 tese, se riferiscasi al diametro della terra, costituisce quasi un punto sulla sua superficie, ed è qual sarebbe un'irregolarità di $\frac{1}{3}$ di linea sopra un globo di 10 piedi di diametro.

Quantunque sì picciole queste irregolarità, non devono trascurarsi se fra loro si confrontino; e la geografia si occupa dell'esatta descrizione di tutto ciò che osservasi alla superficie terrestre non solo, ma dei confini dei regni, del corso dei fiumi, delle coste ec., nella quale descrizione i Geografi hanno cura di riferire tutto alla superficie media della terra, facendo uso di alcuni disegni, ai quali danno il nome di carte geografiche, od assegnano dei diversi punti le posizioni e scambievoli distanze in numeri riferiti a date unità. Noi qui dobbiamo lasciare interamente da parte tutto ciò che è relativo alla indicata descrizione geografica, e soltanto occuparci 1.° del modo con cui determinare si possano le posizioni geografiche dei diversi luoghi, le loro distanze, le superficie dei paesi ec. in date unità; 2.° come data una tavola di queste posizioni si possano i diversi paesi in quella inscritti riferire in una carta geografica.

446. Sebbene nel corso di questi Elementi noi abbiamo già più volte avuto occasione d'indicare il modo con cui si determina la posizione di un punto nella superficie della terra rapporto all'equatore ed al primo meridiano, pure non sarà inutile di qui richiamare alcune nozioni a comodo dei giovani studiosi per evitare la noja di molte citazioni.

Rappresenti la *figura* 27 il globo terrestre, il cui centro C sia anche centro dell' apparente sfera celeste; $A\,Q\,B\,D$ sia la sezione del piano dell' equatore celeste colla superficie terrestre; la linea $P\,C\,P'$ sia la porzione dell' asse dell' equatore celeste terminata in P, P' alla terra; la circonferenza $A\,Q\,B\,D$ chiamasi *equatore terrestre*; P, P' sono i *poli della terra*, boreale l' uno per esempio P, australe l' altro in P'. Un circolo massimo condotto per P e per qualunque punto M, chiamasi *meridiano terrestre* di M. Fra i meridiani che sono di numero infiniti se ne sceglie uno $P\,A\,P'$, il quale passi per un luogo particolare della terra, a cui gli altri tutti si riferiscono, e questo appellasi *primo meridiano*. È interamente arbitrario il punto per cui condurre si voglia il primo meridiano; molti Geografi si accordano in farlo passare per la sommità del Pico di Teneriffa nelle isole Canarie; altri lo fanno passare per l' Osservatorio di Parigi; altri per quello di Greenwich. Ciò premesso, la posizione di un qualunque punto M è determinata dalla sua distanza $M\,Q$ dall' equatore, e dall' arco di equatore $A\,Q$ compreso fra il meridiano $P\,M\,Q$ ed il primo meridiano $P\,A$; l' arco $M\,Q$ chiamasi *latitudine geografica* del punto M, ed è questa boreale od australe, secondo che il punto M trovasi nell' emisfero boreale, ovvero nell' emisfero australe; l' arco di equatore $A\,Q$, ovvero l' angolo $A\,P\,Q$ da esso misurato chiamasi *longitudine geografica* di M, la quale distinguesi col nome di *orientale* ed *occidentale*, secondo che il punto M trovasi all' oriente od all' occidente del primo meridiano. È però più comodo ed uniforme il numerare le longitudini da occidente verso oriente fino a 360°, ed in allora è inutile la distinzione di orientale ed occidentale; un tale modo è in oggi universalmente abbracciato. Dalle esposte definizioni risulta che tutti i punti situati sotto il primo meridiano hanno una longitudine = 0°, e perciò rendesi estremamente facile riconoscere in una carta qual sia il primo meridiano, e per ove passi; ed in generale tutti i luoghi situati sotto uno stesso meridiano hanno una medesima longitudine geografica.

Uno degli usi importantissimi delle longitudini nella geografia è d' indicare la differenza delle ore contate sotto due diversi meridiani. Essendo il meridiano terrestre di un luogo la traccia del suo meridiano celeste, se fingiamo due luoghi distanti di 15° in longitudine, i loro meridiani celesti comprenderanno nel polo un angolo di 15°, e perciò giunto il Sole, in virtù del suo moto diurno al meridiano del luogo situato all' oriente, disterà di 1^h dall' altro meridiano; o in altri termini, quando nel luogo orientale sarà mezzogiorno, mancherà 1^h al mezzogiorno nell' altro. Generalizzando il discorso si vede che la differenza delle longitudini geografiche di due punti ridotta in tempo a ragione di 15° per ora, darà la differenza dei tempi contati ai loro

respettivi meridiani, e che si conterà un minore numero di ore sotto il meridiano del luogo posto all' occidente.

447. *Dei climi.* I paesi che sono sotto l'equatore terrestre con 0° di latitudine hanno l'orizzonte il quale passa per i due poli, divide l'equatore ed i paralelli per metà, ed i giorni sono in tutto l'anno uguali alle notti. In quei luoghi che hanno una latitudine per esempio boreale, l'orizzonte tagliando l'equatore per metà divide disugualmente i paralelli, e già abbiamo dimostrato (§ 19) che quindi traggono origine tutte le disuguaglianze osservate nella durata dei giorni alle diverse latitudini. In ogni latitudine boreale il massimo giorno ha luogo nel solstizio di estate, mentre la declinazione del Sole è $= 23^\circ\ 28' = \iota$, e tanto più crescono i giorni nei mesi di estate, quanto più aumentano le latitudini boreali. Ciò posto, appellasi I. *clima* quella zona della superficie terrestre, in cui il massimo giorno che ha luogo nell'anno non supera $12^h\ 30'$; II. clima una zona alla precedente consecutiva, in cui il massimo giorno non supera $13^h\ 0'$, e così procedendo di mezz' ora in mezz' ora fino al XXIV. clima, in cui il giorno massimo dell' anno è $= 24^h\ 0'$

Egli è ora facile assegnare la latitudine estrema di un qualunque clima, per esempio del n.^{mo}. In fatti detto P l'arco semidiurno massimo di un luogo situato alla latitudine L, per il § 19, osservando che in questo caso $\delta = \iota$, si ha $\cos P = -\tang L \tang \iota$. Frattanto per il clima n.^{mo} si ha $P = 6^h + 15' n = 90^\circ + (3^\circ\ 45')\, n$. Sostituendo questo valore di P nella precedente equazione, e ricavandone il valore di L, si otterrà $\tang L = \cot \iota \operatorname{sen} (3^\circ\ 45')\, n$, la quale porge la cercata latitudine.

448. *Scolio.* Se in questa equazione si fa $n = 24$, trovasi $L = 90^\circ - \iota = 66^\circ\ 32'$, e però tutti quei paesi che sono situati sotto un paralello all'equatore, la cui latitudine sia $= 66^\circ\ 32'$ vedono il Sole nel solstizio per tutte le ventiquattro ore del giorno. Questo paralello appellasi dai Geografi *circolo polare,* ed è la traccia che lascierebbe sulla superficie della terra l'asse dell' eclittica nella sua diurna rotazione. Al di là del circolo polare non solo il paralello descritto dal Sole il giorno del solstizio sta tutto sopra l'orizzonte, ma anche i paralelli da questo più remoti; sotto il polo l'orizzonte confondendosi con l'equatore è palese che esso è visibile per tutti i sei mesi di estate.

Per estensione chiamasi XXV clima quella zona, in cui il giorno non dura più di un mese; XXVI clima la zona che vede il Sole per due mesi, e così fino al XXX clima. Le latitudini estreme di questi ultimi sei climi non sono comprese nella formula precedente, ma facilmente si ottengono col mezzo di un' effemeride. Così se vorrassi la latitudine estrema del XXV clima, si osserverà di quanto varia la declinazione del Sole nei 15 giorni precedenti o seguenti il solstizio, e

sommata questa variazione con 66° 32′ si avrà l'estrema latitudine cercata. Si troverà una tale variazione = 0° 45′; perciò sarà il XXV clima una zona compresa fra 66° 32′ e 67° 17′.

Distanze dei luoghi nella superficie terrestre.

449. La distanza di due punti nella sfera misurasi col mezzo dell'arco di circolo massimo che gli unisce. Determinato adunque il numero dei gradi, minuti e secondi contenuti in quest'arco, si otterrà facilmente la cercata distanza se conoscasi il rapporto fra il grado di un circolo massimo e la misura lineare che si adotta. Le misure itinerarie adottate dalle diverse nazioni sono fra loro molto differenti. Gli Italiani contano per *miglia*, 60 dei quali formano un grado. Così un miglio equivale ad 1′; i Francesi contano per *leghe*, delle *quali* 20 formano un grado; i Tedeschi contano essi pure per miglia di 15 al grado, e così di altre nazioni. Dato il rapporto fra il grado e la unità di distanza itineraria, sarà sempre facile assegnare la distanza di luoghi, dei quali conoscansi le latitudini e le longitudini. Sieno in fatti (*Fig.* 27) M, M' due punti dei quali domandasi la distanza itineraria MM'. Pongansi le latitudini QM, $Q'M' = \lambda$, e λ', la differenza delle longitudini $QQ' = P$. Il triangolo MPM' darà l'equazione

$$\cos MM' = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\lambda' + \cos\lambda \cos\lambda' \cos P \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

la quale, se introducasi un angolo ausiliario φ dato dall'equazione

$$\cot\varphi = \cot\lambda' \cos P \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

diverrà . . . $$\cos MM' = \frac{\operatorname{sen}\lambda' \cos(\lambda - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Il calcolo delle equazioni (b), (c) dà l'arco MM', e quindi si avrà la distanza itineraria, come dal seguente esempio apparisce.

Domandasi la distanza itineraria fra Padova e Mosca supponendo

la longit. di Mosca = 35° 12′ 45″, sua latitudine $\lambda' = 55°\ 45'\ 45''$
di Padova = 9 32 30 . . . . . $\lambda = 45\ 24\ 2$
differenza = P = 25 40 15 (le long. sono all'oriente di Parigi)

$\log\cos P = 9,9548683$ . . . $\varphi = 58°\ 28'\ 33''$
$\log\cot\lambda' = 9,8328642$ $\lambda = 45\ 24\ 2$
$\log\cot\varphi = 9,7877325$ $\lambda - \varphi = -13\ 4\ 31$

$\log\operatorname{sen}\lambda' = 9,9173545$
c. $\log\operatorname{sen}\varphi = 0,0693465$ $MM' = 19°\ 8'\ 38'' = 1148',\frac{1}{3}$ circa
$\log\cos(\lambda - \varphi) = 9,9885918$ = dist. cercata in miglia ital.
$\log\cos MM' = 9,9752928$

450. L'equazione (a) ponendo $\cos MM' = 1 - 2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} MM'$, $\cos P = 1 - 2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} P$ può anche scriversi sotto l'aspetto $\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} MM' = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) + \cos\lambda' \cos\lambda\, \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} P$, e se si pone

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2} P}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)} \sqrt{(\cos\lambda' \cos\lambda)} \quad . \; . \; . \quad (d)$$

la precedente diviene

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2} MM' = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\cos\varphi} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2} P \sqrt{(\cos\lambda \cos\lambda')}}{\text{sen}\,\varphi} \; . \; . \; . \; (e)$$

Le equazioni (d), (e) risolvono il quesito con eguale semplicità delle precedenti (b), (c). Queste ultime divengono poi molto semplici se P, $\lambda' - \lambda$ sieno a segno piccioli che si possano prendere gli archi in luogo dei loro seni, ed allora si potrà fare $\sqrt{(\cos\lambda' \cos\lambda)} = \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda)$; le equazioni ($d$), ($e$) daranno

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{P \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda)}{\lambda' - \lambda} \quad . \; . \; . \quad (d)'$$

$$MM' = \frac{\lambda' - \lambda}{\cos\varphi} = \frac{P \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda)}{\text{sen}\,\varphi} \quad . \; . \; . \quad (e)'$$

le quali formule potranno adoperarsi senza sensibile errore se $\lambda' - \lambda$, P, MM' non superino 3°, ovvero anche 4°. È qui da notarsi che la quantità $P \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda)$ rappresenta l'arco del paralello all'equatore compreso fra i due meridiani alla latitudine media aritmetica fra le due date (Trig. XVIII. osserv.).

Della superficie dei paesi, dei quali conoscesi l'estensione in longitudine ed in latitudine.

451. Sia (*Fig.* 28) $t\,t'\,s\,s'$ un elemento della superficie sferica compreso fra i due meridiani infinitamente vicini $P\,t\,Q$, $P\,t'\,q$, e fra due paralelli $t\,t'$, $s\,s'$, e pongasi

AQ (longitudine del punto t) $= p$; Aq (longit. di s') $= p + dp$
Qt (latitudine del punto t) $= \lambda$ Qs' (latitud. di s') $= \lambda + d\lambda$

Sarà l'arco di paralello $t\,t' = Q\,q \cos\lambda = dp \cos\lambda$ (Trig. XVIII oss.) perciò l'area del dato elemento $= dp\,d\lambda \cos\lambda$. Quindi integrando rapporto a p e λ, si avrà l'area finita $= p\,\text{sen}\,\lambda + C$, ove la costante dipenderà dai limiti dell'integrale che devono essere dati. Vogliasi a cagione di esempio la porzione di zona sferica compresa fra i due meridiani PA, PB, che comprendono un dato angolo P, e fra i due paralelli MM', SS' situati sotto le latitudini λ', λ''. L'integrale dovrà sparire ponendo $p = 0$, ed essere completo quando $p = P$; si dovrà del pari annullare ponendo $\lambda = \lambda'$, ed essere completo quando $\lambda = \lambda''$. Indicando per S la superficie così estesa, otterremo $S = P\,(\text{sen}\,\lambda'' - \text{sen}\,\lambda')$.

Qui poi si osservi che i seni sono espressi in parti di raggio, e perciò numeri astratti. Se pertanto si desidera S espresso in miglia quadrate, ritenendo P dato in minuti (giacchè ogni minuto corrisponde ad un miglio lineare) si dovrà per la legge degli omogenei moltiplicare il secondo membro per 3437′,75 numero dei minuti contenuti nel raggio. Così ponendo $P = 1° = 60'$, la formula che esprime la superficie di un grado in longitudine fra le latitudini λ', λ'' sarà

$$S = 206265^{m.q}(\text{sen}\,\lambda'' - \text{sen}\,\lambda') = 206265.2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')\cos\tfrac{1}{2}(\lambda'' + \lambda') \quad (1)$$

Si domandano a cagione d'esempio i successivi valori di S di 5° in 5° di latitudine da 0° fino a 90°. Si porrà $\lambda'' = \lambda' + 5°$, ossia $\lambda'' - \lambda' = 5°$, e si troverà

$$S = 17994{,}3^{m.q}\cos(\lambda' + 2°\,30) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dalla quale con molta facilità e prontezza otterrassi la domandata tavola che qui unisco a comodo dei lettori.

Superficie di 1° in longitudine compresa fra le

latitudini	miglia quad.	latitudini	miglia quad.	latitudini	miglia quad.	latitudini	miglia quad.
0°— 5°	17977	25°—30°	15961	50°—55°	10954	75°—80°	3895
5 —10	17840	30 —35	15176	55 —60	9668	80 —85	2349
10 —15	17567	35 —40	14276	60 —65	8309	85 —90	785
15 —20	17162	40 —45	13267	65 —70	6886		
20 —25	16625	45 —50	12157	70 —75	5411		

L'uso di questa tavola è il seguente. Si noti fra quali gradi di latitudine cade la provincia, di cui domandasi la superficie, e la sua estensione in longitudine espressa in gradi si moltiplichi per i numeri che alle respettive latitudini di 5° in 5° si trovano nella tavola. L'aggregato di questi prodotti darà la domandata superficie in miglia quadrate italiane, che divisi per 9 daranno le leghe quadrate di Francia, e divisi per 16 le miglia quadrate germaniche.

Principj per la costruzione delle carte geografiche e celesti.

452. Chiamansi *carte geografiche* alcuni disegni, dai quali si può con facilità rilevare qual sia la figura di una provincia, l'andamento di un fiume, di un braccio di mare, la posizione di una città sopra la superficie della terra, e dove si possano stimare le distanze dei luoghi in date unità lineari, le superficie delle provincie ec.

Esattissima pertanto sarebbe quella carta che contemporaneamente soddisfacesse alle seguenti condizioni: 1.° che non alterasse la figura

dei paesi; 2.° che tutti quei paesi che sono sulla superficie terrestre situati sotto un circolo massimo, fossero nella carta situati in linea retta; 3.° che rappresentasse le distanze scambievoli dei luoghi con una scala fissa; 4.° che desse le superficie dei paesi uguali a quelle del globo; 5.° si richiede inoltre che i meridiani della carta taglino sempre l'equatore, ed i paralelli ad angolo retto come nel globo, la qual condizione è evidentemente inclusa nella prima. Ora per poco che si rifletta alla natura della sfera, si vedrà non essere possibile di soddisfare contemporaneamente a tutte queste condizioni, non essendo la sfera sviluppabile come il cilindro ed il cono. Così se si tenta di applicare un foglio di carta sopra un globo, si troverà non essere possibile di far combaciare perfettamente la carta alla superficie sferica senza fare delle piegature o lacerazioni, lo che prova non potersi trasportare in una superficie piana le figure disegnate in una superficie sferica senza alterare i rapporti delle parti. Il partito migliore che si possa scegliere è di ricorrere alle projezioni, e riportare con certe leggi in un piano i punti situati nella superficie sferica. In questo caso l'indole delle carte geografiche varierà colla natura delle projezioni, e fra queste saranno riputate le migliori quelle 1.° che saranno di più facile costruzione, 2.° che altereranno meno le distanze, la figura e la superficie delle provincie. Noi qui daremo da principio le regole per la costruzione dei planisferi o mappamondi; indi tratteremo delle principali carte speciali costruite dai Geografi più riputati.

453. Una carta geografica che dentro un circolo disegnato in una superficie piana rappresenta la metà del globo terracqueo appellasi *planisferio*, ed i due planisferj rappresentanti ambedue gli emisferi opposti della terra costituiscono un *mappamondo*. D'ordinario si disegnano i mappamondi o adoperando la projezione così detta *ortografica*, e più comunemente ancora adoperando la projezione *stereografica*. Brevemente esporremo i principj dell'una e dell'altra costruzione.

Principj della projezione ortografica.

454. 1.° Se da tutti i punti della linea AB (*Fig.* 20) si abbassano delle perpendicolari sopra la AM, o sopra la PQ ad AM paralella, la linea AB, o la $a'b'$ formata dai piedi di queste perpendicolari dicesi *projezione ortografica* di AB. Rappresentando con i l'inclinazione della AB alla linea AM od alla sua paralella, sarà la sua projezione $a'b' = AB \cos i$.

2.° Se da un punto qualunque M della circonferenza di un circolo si abbassi la perpendicolare MP (*Fig.* 30) sul raggio AC, P sarà la projezione del punto M, AP la projezione dell'arco AM, e PC la projezione di MQ.

3.° Sia il circolo AMD (*Fig.* 31) inclinato al piano della tavola di un angolo i, e da qualunqne suo punto M si abbassi sul piano della tavola una perpendicolare Mm. Sarà il piede di questa perpendicolare la projezione di M; il piano della tavola, sopra cui si conducono queste perpendicolari, chiamasi *piano di projezione*. Posto ciò dico, *che la projezione di tutta la circonferenza data è un' ellisse, il cui semiasse maggiore sarà il raggio del circolo stesso, ed il semiasse minore lo stesso raggio moltiplicato per* cos i.

Sia AD la comune sezione del piano AMD col piano di projezione; m la projezione di M, sicchè sia Mm perpendicolare al piano di projezione. Dal punto m si conduca nel piano di projezione la perpendicolare mP alla comune sezione AD, e congiunta MP, sarà questa pure ad AD normale, e l' angolo $MPm = i$; CP, PM saranno le coordinate ortogonali del punto M nel piano del circolo, mentre CP, Pm saranno le coordinate di m nel piano di projezione. Pongasi $CP = x$, $PM = y$, $CA = CD = CB = a$, $Pm = y'$. L'equazione del ci[illegible] darà $y^2 = a^2 - x^2$. Ma il triangolo MmP rettangolo in m dà $y = \frac{y'}{\cos i}$. Scrivendo questo valore di y nell'equazione del circolo otterrassi (tolte le frazioni) $y'^2 = a^2 \cos^2 i - x^2 \cos^2 i$, la quale porge l' equazione della curva rappresentante la cercata projezione, ed è, come si vede, un' ellisse il cui semiasse maggiore è $= a = AC$, il minore $= a \cos i$. Si vede nel tempo stesso che l' asse maggiore della ellisse trovasi nell' intersezione del piano del dato circolo col piano di projezione, ed in conseguenza l' asse minore sarà a questo perpendicolare.

4.° Se da tutti i punti di un emisfero si conducono sul circolo che gli serve di base, tante perpendicolari, ciascun punto ha la sua projezione nel piede della respettiva perpendicolare, e la superficie dell' indicato circolo è la projezione di tutto l' emisfero. Così l' equatore rappresenterà la projezione dell' emisfero boreale della terra, il suo centro sarà la projezione del polo, ed il quarto del meridiano sarà rappresentato per il raggio, lungo il quale il suo piano taglia l' equatore; un paralello all' equatore avrà per projezione un circolo concentrico a quest' ultimo, il cui raggio uguaglia il seno della distanza del paralello dal polo.

Dietro questi principj sarà facile la costruzione della projezione ortografica della sfera in qualunque piano, come si renderà ancora più chiaro cogli esempj seguenti.

455. *I. Projezione ortografica nel piano dell' equatore* (*Fig.* 32).

Prendasi una linea Po per rappresentare il raggio dell' equatore, e col centro P descritto un cerchio dividasi di grado in grado, o di

5° in 5° secondo l'estensione che vorrassi dare al planisferio. La *figura* 32 presenta per la sua picciolezza l'equatore diviso di 30° in 30°. Si unisca ogni punto di divisione col centro, e questi raggi saranno le projezioni dei corrispondenti meridiani, fra i quali uno a piacere, per esempio 0° *P*, si sceglierà per il primo meridiano, ed allora gli altri saranno i meridiani corrispondenti alle longitudini segnate nell'equatore.

Per descrivere anche i paralelli nel planisferio, si portino nel raggio *P* o i seni delle loro distanze dal polo *P*, e saranno i raggi dei cercati paralelli. Così preso *P* 30 uguale al seno di 30°, il circolo descritto con questo raggio rappresenterà la projezione del paralello situato a 60° di latitudine. Fatta questa costruzione, sarà il planisferio diviso in una rete di spazietti, ognuno dei quali rappresenterà sotto data latitudine l'estensione di un grado in longitudine, ed inserendovi i varj punti della superficie terrestre secondo le loro longitudini e latitudini si avrà il planisferio cercato. Di questi planisferj se ne dovranno costruire due, in uno dei quali s'inseriranno tutti i punti dell'emisfero boreale, nell'altro tutti i punti dell'emisfero australe, e posti i due planisferj a contatto nella divisione segnata 180° costituiranno il mappamondo richiesto. Si suole in questi planisferj descrivere la projezione dell'eclittica, che si riguarda come un circolo massimo della sfera, il quale incontra l'equatore in 0° e 180° ad esso inclinato di 23° 28′, e si otterrà descrivendovi un'ellisse, il cui semiasse maggiore sia = *P o*, ed il semiasse minore = *P* o cos 23° 28′. Di questa ellisse metà si descriverà nell'emisfero boreale al di sopra dell'equatore, e l'altra metà si farà nell'altro emisfero cadere sotto dell'equatore.

II. Projezione ortografica della sfera nel coluro dei solstizj.

Questa projezione non si pone in uso per la costruzione delle carte geografiche, ma bensì per le carte celesti, e quando sia costruita in iscala grande con ogni accuratezza ha il vantaggio di dare sull'istante la longitudine e latitudine di una stella, essendo nota la sua *AR* e declinazione, o viceversa.

Passando il coluro dei solstizj per i poli dell'equatore e dell'eclittica, sarà ad ambedue non meno che ai loro respettivi paralelli perpendicolare, ed in conseguenza tutti questi circoli vi saranno projettati in altrettante linee rette. Gli equinozj, essendo i poli del coluro, avranno la loro projezione nel suo centro. I circoli di declinazione sono inclinati al coluro di un angolo che è il complemento della loro *AR*; perciò le loro projezioni saranno tante ellissi, delle quali l'asse dell'equatore sarà l'asse maggiore, e l'asse minore sarà nella direzione dell'equatore, ed uguale al seno della loro *AR* duplicato. Del pari i circoli di latitudine si projettano in altrettante ellissi che hanno l'asse

dell' ecclittica per asse maggiore, e l' asse minore cade sull' ecclittica stessa, ed è uguale al doppio del seno della loro longitudine.

La *figura* 33 rappresenta l' equatore, ed i suoi paralelli di 30° in 30° projettati nel coluro dei solstizj; $PEP'Q$ rappresenta il coluro o piano di projezione, in cui conducesi EQ per rappresentare l' equatore; il diametro PP' perpendicolare ad EQ rappresenta il suo asse; P, P' sono i poli dell' equatore. Divisi i quadranti EP, PQ, EP', $P'Q$ di 30° in 30°, le linee 30° — 30°, 60° — 60° sono i respettivi paralelli all' equatore; le mezze ellissi PmP', PrP' sono le projezioni dei circoli di declinazione corrispondenti a 60° e 30° di AR, i semiassi minori delle quali sono i seni di 60° e 30°, che prendonsi sulla stessa figura, e sono $= a$ 30°, $= b$ 60°. Se si volesse condurvi l' ecclittica si prenderebbe da E verso P un arco di 23° 28′, e condotto per il suo estremo un diametro, questo rappresenterebbe l' ecclittica. I suoi paralelli ed i circoli di latitudine si guiderebbero allo stesso modo.

Quando la figura sia estesa di grado in grado, sarà divisa in una rete di tanti quadrilateri, ognuno dei quali corrisponderà ad una data AR e declinazione, o ad una data longitudine e latitudine. Vi s' inseriranno le stelle secondo le loro posizioni date dai cataloghi. Si dovranno costruire due di questi planisferj, uno dei quali rappresenterà l' emisfero all' occidente del coluro, l' altro quello all' oriente.

III. Projezione ortografica della sfera nel meridiano.

Questa projezione si costruisce colle stesse regole della precedente. Se supponiamo (*Fig.* 33) che il circolo PEQ rappresenti il meridiano, EQ l' equatore, PP' il suo asse, P, P' i poli dell' equatore, i paralelli all' equatore rappresenteranno i circoli, che in virtù del moto diurno sembrano descrivere gli astri; le ellissi, che nella precedente projezione rappresentavano i circoli di declinazione, sono qui i circoli orarj; così l' ellisse PmP' è la projezione del circolo orario distante due ore dal meridiano. Per descrivere in questa projezione l' orizzonte di un dato luogo, prendasi EZ uguale alla sua latitudine; la linea ZZ' sarà l' asse dell' orizzonte, ed il diametro OR a questa perpendicolare rappresenterà lo stesso orizzonte.

Un astro di data declinazione, per esempio di 30° bor., sembrerà descrivere due volte in un giorno la linea 30° — 30°. Quando sarà in a, disterà 6^h dal meridiano; giunto in r, r' ec. avrà un angolo orario di 4^h, 2^h...., nel punto c nascerà, se è ad oriente, tramonterà ad occidente. Le perpendicolari da qualunque punto r condotte sull' orizzonte sono i seni dell' altezza corrispondente all' angolo orario dello stesso punto r; le distanze dei piedi di queste perpendicolari dal centro C sono i coseni degli azimut valutati dal polo più vicino. Quindi coll' ajuto di queste carte facilmente risolvonsi i seguenti problemi.

1.° *Determinare l'arco semidiurno di un dato astro;* 2.° *determinare il tempo in cui passerà pel primo verticale* ZC, *e l'altezza che avrà in allora sopra l'orizzonte;* 3.° *determinare l'altezza e l'azimut di un astro per un dato angolo orario;* 4.° *data l'altezza e l'azimut di un astro, determinare la sua declinazione e l'angolo orario corrispondente.* Tutti questi problemi si risolveranno tanto più precisamente, quanto più grande sarà la figura, e maggiore la esattezza con cui fu costruita.

Principj della projezione stereografica.

456. *Lemma preliminare. Se un cono qualunque a base circolare venga segato da un piano per l'asse, e per la sua altezza* SP (*Fig.* 34) *io dico che qualunque sezione* $s'pb'$ *fatta da un piano normale ad* SAB *tale che sia l'angolo* $s'b'S = SAB$ *ed* $Ss'b' = SBA$ *sarà un circolo* (Una tale sezione viene dai Geometri detta *subcontraria*).

Per qualunque punto p di essa sezione guidisi un piano spb parallelo alla base, ed in conseguenza perpendicolare ad SAB. È noto che la sezione spb sarà un circolo, e la po comune sezione dei due piani spb, $s'p'b'$ sarà al piano SAB normale, e però ancora alle due rette sb, $s'b'$. Ora nel circolo spb si ha $\overline{po}^2 = so.ob$. D'altra parte i due triangoli sos', bob' simili danno $so.ob = s'o.ob'$; dunque $\overline{po}^2 = s'o.ob'$, e però la curva $s'pb'$ sarà un circolo.

457. *Definizione.* Se sia AZB (*Fig.* 35) un emisfero terminato da un circolo massimo eretto verticalmente al piano della tavola sopra AB, i di cui poli sieno O, Z, supponendo l'occhio situato in O, vedrà qualunque punto P dell'opposto emisfero rappresentato nel punto p intersezione della OP col piano del circolo eretto sopra AB. Il punto p chiamasi *projezione stereografica* di P, O il luogo dell'occhio, il circolo eretto sopra AB perpendicolare al piano della figura chiamasi *piano di projezione*, ed anche *piano della tavola*. L'arco ZP del circolo massimo condotto per il polo opposto all'occhio viene projettato in Cp, il semicircolo AZB nel diametro AB, e tutto l'emisfero opposto all'occhio O viene rappresentato dal circolo di projezione. Qualunque gran circolo condotto per Z ed O è rappresentato dal diametro, lungo cui sega il piano della tavola. Vedesi al tempo stesso che la projezione Cp dell'arco ZP, avente la sua origine nel polo opposto all'occhio, è $= \text{tang}\, COp = \text{tang}\, \frac{1}{2} ZP$.

Proposiz. I. La projezione stereografica di un qualunque circolo della sfera è un circolo.

458. Sia O il luogo dell'occhio (*Fig.* 35), PP' rappresenti il circolo della sfera da projettarsi nel piano AB, N il suo polo. Condotto

per Z e per N un circolo massimo ZAO, riuscirà questo normale al piano del dato circolo, e la sezione del cono $OP'P$ col piano della tavola sarà la cercata projezione. Ora una tal sezione è subcontraria, poichè l'angolo $P'PO$ ha per misura $\frac{1}{2}P'O$, e l'angolo $pp'O$ ha per misura $\frac{1}{2}BO+\frac{1}{2}AP'=\frac{1}{2}(AO+AP')=\frac{1}{2}P'O$. Dunque per per il lemma precedente la sezione $p'p$ è un circolo.

459. *Coroll.* Il diametro della projezione sarà situato nella comune sezione del piano della tavola col piano del circolo ZNB condotto per l'occhio e per il polo N del dato circolo. Pongasi ora $ZN=L$, $NP=NP'=\delta$. Sia in oltre n il centro della projezione, ed il raggio $np=np'=r$, $Cn=a$. Si avrà

$$2r=Cp'-Cp=\tang\tfrac{1}{2}(L+\delta)-\tang\tfrac{1}{2}(L-\delta)=\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\frac{1}{2}(L+\delta)\cos\frac{1}{2}(L-\delta)},$$

ed

$$a=Cp+np=\tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}(L-\delta)+\tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}(L+\delta)=\frac{\operatorname{sen}L}{2\cos\frac{1}{2}(L+\delta)\cos\frac{1}{2}(L-\delta)},$$

dalle quali risulta la proporzione $a:r::\operatorname{sen}L:\operatorname{sen}\delta$.

Proposiz. II. Determinare la projezione di un gran circolo della sfera, il cui piano non passa per l'occhio (*Fig.* 36).

460. Per il luogo dell'occhio O si conduca un circolo massimo $OAZB$ perpendicolare al piano del dato circolo segante lungo AB il piano di projezione, e lungo FG il circolo da projettarsi. Sarà AF la sua inclinazione al piano di projezione, e condotte OF, OG, che si prolunghi fino in L, sarà PL il diametro della cercata projezione. Posto $AF=i$, sarà $FZ=90^\circ-i$, $ZG=90^\circ+i$, $PL=2R$, si avrà $CP=\tang(45^\circ-\frac{1}{2}i)$, $CL=\tang(45^\circ+\frac{1}{2}i)=\cot(45^\circ-\frac{1}{2}i)$; e perciò

$2R=\tang(45^\circ-\frac{1}{2}i)+\cot(45^\circ-\frac{1}{2}i)=\frac{2}{\cos i}$. Divisa PL a metà nel punto m, sarà m il centro della projezione. Si avrà poi $Cm=a=Pm-PC=\tang i$.

È dunque il raggio della projezione uguale alla secante dell'inclinazione del dato circolo al piano di projezione, e la distanza del suo centro dal centro della projezione è = tangente della stessa inclinazione. Le stesse formule si deducono dal § preced. ponendo $\delta=90^\circ$ ed $L=i$, le quali supposizioni rientrano nel caso attuale.

Proposiz. III. Data la posizione di un punto nella superficie della sfera, determinare le coordinate della sua projezione (*Fig.* 37).

461. Sia $AZBO$ un circolo massimo determinato condotto per il luogo dell'occhio O, ed AB sia la sua intersezione col piano di projezione. M sia un punto qualunque riferito al circolo AZB ed al punto fisso P preso in esso. Dal luogo dell'occhio O condotto

OM, tagli il piano di projezione nel punto m, di cui le coordinate rettangole sieno $Cq = x$, $qm = y$, delle quali domandasi l'espressione analitica. Pongasi perciò $PZ = \iota$, $PM = \varphi$, $ZM = \nu$, $ZPM = \omega$, $PZM = \theta$, ed il raggio della sfera $AC = 1$. Sarà evidentemente l'angolo $BCM = PZM = \theta$, $Cm = \text{tang}\,\frac{1}{2}\nu$. Quindi il triangolo rettangolo Cqm darà

$$x = -\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\nu\cos\theta = \frac{-\text{sen}\,\nu\cos\theta}{1+\cos\nu};\quad y = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\nu\,\text{sen}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\nu\,\text{sen}\,\theta}{1+\cos\nu}.$$

Ora il triangolo sferico ZPM dà

$$\cos\nu = \cos\iota\cos\varphi + \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega;\quad \text{sen}\,\nu\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega;$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varphi - \cos\iota\cos\nu}{\text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\nu} = \frac{\cos\varphi\,\text{sen}\,\iota - \cos\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega}{\text{sen}\,\nu}.$$

Sostituendo questi valori di $\cos\nu$, $\cos\theta$, $\text{sen}\,\theta$ nei superiori valori di x, y, otterremo le due seguenti

$$x = \frac{\cos\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega - \cos\varphi\,\text{sen}\,\iota}{1+\cos\iota\cos\varphi + \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$y = \frac{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega}{1+\cos\iota\cos\varphi + \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Si può ancora riferire la posizione del punto m al punto p projezione del punto fisso P mediante le coordinate polari $pm = u$, e l'angolo $qpm = \lambda$. In fatti si avrà in primo luogo $Cp = \text{tang}\,\frac{1}{2}\iota$, che per brevità porremo $= h$. Quindi sarà $pq = h + x$, $pm = \sqrt{[(h+x)^2 + y^2]}$, donde risulta $u = \sqrt{[h^2 + 2hx + x^2 + y^2]}$, $\text{tang}\,\lambda = \frac{y}{h+x}$. Sostituendo i valori di h, x, y dati di sopra, fatte le convenienti riduzioni, si troverà

$$u = \sec\tfrac{1}{2}\iota\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\iota\cos\varphi + \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\varphi\cos\omega}} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\iota\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi + \text{sen}\,\varphi\cos\omega} = \frac{\cot\frac{1}{2}\varphi\,\text{sen}\,\omega}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\iota + \cot\frac{1}{2}\varphi\cos\omega} \; . \; . \; . \; (4)$$

Questa ultima equazione indica che λ è l'angolo di un triangolo rettilineo, di cui due lati comprendono un angolo $= 180^\circ - \omega$, ed in lunghezza sono $\text{tang}\,\frac{1}{2}\iota$ quello adjacente a λ, e $\cot\frac{1}{2}\varphi$, l'altro opposto a λ.

462. *Coroll.* Varii l'angolo ω restando φ costante. I punti M costituiranno sopra la superficie della sfera un circolo il cui polo sarà P, e la sua distanza dal polo sarà $= \varphi$. Il centro di questo circolo sarà nel piano di projezione sopra la retta AB in un punto m' tale

che sia $C m' = a = \frac{\text{sen } \iota}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi + \iota) \cos \frac{1}{2} (\varphi - \iota)}$, ed il raggio sarà $= \frac{a \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \iota}$.

Un problema interessantissimo è quello di dividere questa projezione in modo che ogni punto di divisione corrisponda alle divisioni tracciate nel dato circolo sopra la sfera; così se a cagion d'esempio il circolo nella sfera sia diviso in 12 parti uguali, si domandano i punti della projezione corrispondenti a ciascheduna di esse. Vi si perverrà colla seguente semplicissima costruzione fondata sull'equazione (4), dovuta, per quanto io credo, al celebre Lambert. Sia (*Fig.* 38) $A Z B$ il circolo di projezione, p la projezione del polo, m' il centro della projezione del dato circolo, ed il suo raggio $m' o'$. Essendo per le cose dette $C p = \text{tang } \frac{1}{2} \iota$, si prenda $C o = \cot \frac{1}{2} \varphi$, e descrivasi con questo raggio un circolo o. 3. 6. 9, il quale nella fatta ipotesi dividasi in 12 parti uguali segnate coi numeri respettivi.

Congiunti tutti i punti di queste divisioni con il punto p, le intersezioni o', 1', 2', 3' ec. saranno le loro projezioni cercate. Di fatti ponendo l'angolo $o C 2 = \omega$, dal triangolo $C 2 p$ si ha $\text{tang } p = \frac{\cot \frac{1}{2} \varphi \text{ sen } \omega}{\text{tang } \frac{1}{2} \iota + \cot \frac{1}{2} \varphi \cos \omega}$, e però sarà l'angolo in $p = \lambda$, donde risulta essere 2' la projezione del punto 2.

463. I valori di x ed y dati dalle superiori equazioni (1), (2) danno tutte le proprietà delle projezioni stereografiche dedotte da sintetiche considerazioni nei §§ precedenti.

1.° Consideriamo in primo luogo un sistema di punti M (*Fig.* 37) tutti distanti da P di una stessa quantità φ, e costituenti in conseguenza un circolo della sfera, il cui polo sia P. Saranno in questo caso ι, φ costanti, ed ω variabile, eliminando ω avremo l'equazione della curva formata nel piano di projezione dalle projezioni stereografiche dei punti M. Per eseguire facilmente questa eliminazione si osservi che le equazioni $x = \frac{- \text{sen } \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta}$, $y = \frac{\text{sen } \theta \text{ sen } \theta}{1 + \cos \theta}$ danno $x^2 + y^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \iota \cos \varphi - \text{sen } \iota \text{ sen } \varphi \cos \omega}{1 + \cos \iota \cos \varphi + \text{sen } \iota \text{ sen } \varphi \cos \omega}$. Ponendo pertanto $a = 1 + \cos \iota \cos \varphi$; $b = 1 - \cos \iota \cos \varphi$; $c = \text{sen } \iota \text{ sen } \varphi$; $a' = \text{sen } \iota \cos \varphi$; $b' = \text{sen } \varphi \cos \iota$, la precedente e l'equazione (1) diverranno $x^2 + y^2 = \frac{b - c \cos \omega}{a + c \cos \omega}$; $x = \frac{- a' + b' \cos \omega}{a + c \cos \omega}$, dalle quali eliminando $\cos \omega$ si ottiene

$$x^2+y^2=\frac{b\,b'-a'\,c-c\,(a+b)\,x}{a\,b'+a'\,c}=\frac{\cos\varepsilon-\cos\varphi-2\,x\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon+\cos\varphi},$$

che si può scrivere ancora sotto la seguente forma

$y^2+\left(x+\frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon+\cos\varphi}\right)^2=\frac{\mathrm{sen}^2\,\varphi}{(\cos\varepsilon+\cos\varphi)^2}$. Essa appartiene ad un circolo il cui centro cade nell'asse delle x dalla parte delle ascisse negative ad una distanza $C\,m'$ dall'origine

$=\frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon+\cos\varphi}=\frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon}{2\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varepsilon)}$, ed il suo raggio è

$=\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varepsilon+\cos\varphi}=\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varepsilon)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varepsilon)}$, le quali formule combinano con quelle della prima proposizione.

2.° Posto $\varphi=0°$, sarà $y=0$, ed $x=-\tang\frac{1}{2}\varepsilon$, che appartengono al punto p projezione di P; e fatto $\varphi=180°$ trovasi $y=0$, $x=\cot\frac{1}{2}\varepsilon$, le quali appartengono alla projezione del polo diametralmente opposto a P.

3.° Posto $\omega=0$, i punti M saranno tutti situati sul circolo AZB, le equazioni (1), (2) daranno in questo caso $y=0$, $x=\tang\frac{1}{2}(\varphi-\varepsilon)$, ed appartengono allo stesso asse delle x, sul quale in conseguenza si troverà la projezione del circolo AZB.

4.° Sia ω costante, e φ variabile; i punti M saranno tutti situati in un circolo massimo inclinato ad AZB di un angolo $=\omega$. Eliminando φ dai valori di x, y si avrà una relazione fra x, y, che esprimerà l'equazione della projezione stereografica del dato circolo massimo. Per eseguire questa eliminazione, riprendiamo le equazioni

$$x^2+y^2=\frac{1-\cos\varepsilon\cos\varphi-\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega}{1+\cos\varepsilon\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega},$$

$$y=\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega}{1+\cos\varepsilon\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega},$$

dalle quali con facile riduzione si forma la seguente

$\frac{1-x^2-y^2}{y}=\frac{2\cos\varepsilon+2\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos\omega\tang\varphi}{\mathrm{sen}\,\omega\tang\varphi}$. D'altra parte si ha

$\frac{x}{y}=\frac{\cos\varepsilon\cos\omega\tang\varphi-\mathrm{sen}\,\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\omega\tang\varphi}$. Eliminando da queste due equazioni $\tang\varphi$, si ottiene $1-x^2-y^2=\frac{2\,y\cos\omega-2\,x\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}$, la quale si riduce alla seguente

$$(x-\cot\varepsilon)^2+\left(y+\frac{\cot\omega}{\mathrm{sen}\,\varepsilon}\right)^2=1+\cot^2\varepsilon+\frac{\cot^2\omega}{\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\omega\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon},$$

ed indica che la cercata projezione è un circolo, il cui raggio è $= \frac{1}{\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\epsilon}$. Il suo centro poi trovasi nel piano di projezione, e corrisponde alle coordinate $x' = \cot\epsilon$, $y' = -\frac{\cot\omega}{\text{sen}\,\epsilon}$. È facile dimostrare la coincidenza di queste formule con quelle della prop. III. Rappresenti AZB (*Fig.* 39) il circolo AZB della *fig.* 37, ed ACB sia il circolo di projezione eretto in quella figura sopra AB; PMC il circolo da projettarsi inclinato al piano di projezione di un angolo $PCB = i$. Ritenute le superiori denominazioni, il triangolo sferico PCB rettangolo in B dà $\cos i = \text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\epsilon$, donde apparisce che il raggio della projezione è uguale alla secante dell'inclinazione. La distanza assoluta del suo centro dal luogo dell'occhio C nella carta sarà $= \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \frac{\sqrt{(1 - \text{sen}^2\omega\,\text{sen}^2\epsilon)}}{\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\epsilon} = \text{tang}\,i$, precisamente come nell'indicato luogo.

Proposiz. IV. L'angolo, sotto cui le projezioni stereografiche di due circoli massimi si segano, è sempre uguale a quello che essi comprendono nel globo (*Fig.* 40).

464. Sia AIB il piano di projezione eretto sopra AB della *fig.* 37, AB l'asse delle x, p la projezione del punto P comune ai due circoli nella sfera, e pongasi, come nella prop. III, $Cp = \text{tang}\,\frac{1}{2}\epsilon$, sia m la posizione del centro della projezione pF, cosicchè le sue coordinate sieno, come nel § precedente, $CQ = x' = \cot\epsilon$, $Qm = y' = \frac{\cot\omega}{\text{sen}\,\epsilon}$ (si fa astrazione dai segni delle quantità, avendo già disposte le linee secondo i loro segni rapporto all'asse delle x, ed all'origine della *fig.* 37). Condotto il raggio mp, ed indicando per p l'angolo Qpm, si avrà $\text{tang}\,p = \frac{\cot\omega}{\text{sen}\,\epsilon\,(\cot\epsilon + \text{tang}\,\frac{1}{2}\epsilon)} = \cot\omega$; quindi $p = 90° - \omega$, e però l'angolo $ApF = \omega$. Se ora un altro circolo condotto per il punto fisso P della *fig.* 37 tagliasse AZB sotto un altro angolo ω', la sua projezione taglierà la linea AB ad angolo $= \omega'$, e però le due projezioni conterranno un angolo $= \omega' - \omega$, come i proposti circoli nella sfera.

Proposiz. V. Determinare il rapporto fra le distanze dei luoghi nella sfera, e quelle delle loro projezioni stereografiche (*Fig.* 41).

465. Sia P il punto opposto al luogo dell'occhio nella superficie della sfera; A, B due luoghi, la distanza dei quali è misurata dall'arco di circolo massimo AB. Sia nella carta p la projezione di P; a, b le projezioni dei due punti A, B; saranno ap, bp le projezioni degli archi AP, BP, e l'angolo in p sarà uguale a quello in P.

Si faccia $AP = \xi$, $PB = \eta$, $AB = \zeta$, l'angolo in P, ovvero in $p = \lambda$, $ap = x$, $pb = y$, $ab = z$. Trattasi di trovare z espresso per ζ, ξ, η.

Per natura della projezione si ha $x = \text{tang}\,\frac{1}{2}\xi$, $y = \text{tang}\,\frac{1}{2}\eta$. Il triangolo sferico APB dà $\cos\zeta = \cos\xi\cos\eta + \text{sen}\,\xi\,\text{sen}\,\eta\cos\lambda$, la quale si può cangiare anche nella seguente

$$1 - 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\zeta = (1 - 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\xi)(1 - 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\eta) + 4\,\text{sen}\tfrac{1}{2}\xi\cos\tfrac{1}{2}\xi\,\text{sen}\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}\eta\cos\lambda,$$

ovvero ancora in

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\zeta = \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\xi\cos^2\tfrac{1}{2}\eta + \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\eta\cos^2\tfrac{1}{2}\xi - 2\,\text{sen}\tfrac{1}{2}\xi\cos\tfrac{1}{2}\xi\,\text{sen}\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}\eta\cos\lambda.$$

Dividendo da ambe le parti per $\cos^2\frac{1}{2}\xi\cos^2\frac{1}{2}\eta$, si avrà

$$\frac{\text{sen}^2\frac{1}{2}\zeta}{\cos^2\frac{1}{2}\xi\cos^2\frac{1}{2}\eta} = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\xi + \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\eta - 2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\xi\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\eta\cos\lambda.$$

Per altra parte il triangolo rettilineo apb dà l'equazione $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\lambda$, il secondo membro della quale è identico col secondo membro della precedente in grazia di $x = \text{tang}\,\frac{1}{2}\xi$, $y = \text{tang}\,\frac{1}{2}\eta$. Dunque sarà $z = \dfrac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\zeta}{\cos\frac{1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}\eta}$, e questa risolverà il proposto quesito. Essa annunzia che rimanendo ξ, η costanti, sarà z proporzionale a $2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\zeta$, ossia alla corda dell'arco ζ, essendo indipendente dall'angolo λ. Posto pertanto $\lambda = 0$, sarà $z = x - y$, onde in generale si avrà la proporzione $x - y : \text{cord}\,(\xi - \eta) :: z : \text{cord}\,\zeta$, dalla quale con facile costruzione sulla carta stessa si ottiene l'arco ζ.

Questa proporzione non può adoperarsi se $x = y$, ed in generale la corda ζ è male determinata se x, y si avvicinino ad essere uguali. Ponendo $\lambda = 180°$, sarà $z = x + y$, $\text{cord}\,\zeta = \text{cord}\,(\xi + \eta)$; quindi alla precedente si potrà sostituire la seguente $x + y : \text{cord}\,(\xi + \eta) :: z : \text{cord}\,\zeta$, dalla quale si avrà sempre con precisione $\text{cord}\,\zeta$, e quindi l'arco ζ.

466. Dopo di avere esposte nelle precedenti proposizioni le proprietà principali di questa projezione, passiamo dietro di esse ad indicare le regole per la costruzione dei mappamondi nei piani più usitati.

I. Projezione stereografica polare della sfera.

In questa projezione l'occhio si suppone in uno dei poli dell'equatore, ed il piano dell'equatore è il piano di projezione. Se vogliasi delineare l'emisfero boreale conviene fingere l'occhio nel polo australe; tutti i meridiani saranno rappresentati da tante linee rette intersecantisi nel centro dell'equatore sotto gli stessi angoli che nella sfera. I paralelli sono circoli concentrici all'equatore, ed aventi per raggio la tangente della metà della loro distanza dal polo. La projezione dell'ecclittica è un circolo che passa per le divisioni 0° 180° dell'equatore, ed ha per raggio la secante di 23° 28′. Si suole delineare in queste carte eziandio la projezione dell'orizzonte del luogo

per cui sono destinate, riguardandolo come un circolo inclinato all' equatore del complemento della latitudine geografica, e che passa per o° 180°, ovvero per 90° e 270°.

La *fig.* 42 rappresenta un picciolo modello di questa projezione, che si costruisce così. Con un raggio P o a piacere descrivesi l'equatore, e dividesi in gradi per esempio di 30° in 30°. I raggi alle singole divisioni rappresentano i meridiani aventi le longitudini indicate dalle medesime. Per o° conducasi una tangente, sulla quale si prenderanno le tangenti trigonometriche degli archi. Così se vogliasi la tangente dell'arco o a, condurrassi per il centro P e per a una linea, che prodotta alla tangente in a' darà la retta o a' per la cercata tangente trigonometrica. Nel tempo stesso sarà $P a'$ la secante di $o a$. I paralelli all' equatore si descriveranno prendendo nell' indicato modo le tangenti delle metà delle loro distanze dal polo. L'eccelittica o° q 180° avrà il suo centro nella linea P 270° in un punto m tale che sia $m P =$ tang 23° 28′. Se si vorranno descrivere i paralelli all'eccelittica si rifletterà che sono circoli aventi il loro centro nella linea $m p$. Dalle formule della proposizione I risulta che un paralello distante dal polo dell' eccelittica di un arco δ, ha per diametro
tang $\frac{1}{2}$ (23° 28′ + δ) — tang $\frac{1}{2}$ (23° 28′ — δ); da P verso 270° si porteranno le tangenti dei due archi $\frac{1}{2}$ (23° 28′ + δ), $\frac{1}{2}$ (23° 28′ — δ), e sulla loro differenza si costruirà il paralello, osservando di portare da P verso 90° la tang $\frac{1}{2}$ (23° 28′ — δ), quando l'arco è negativo. La figura presenta l' esempio del paralello distante 30° dal polo dell' eccelittica, per cui si ha $\frac{1}{2}$ (23° 28 + δ) = 26° 44′, $\frac{1}{2}$ (23° 28′ — δ) = — 3° 16′.

Si segna in questa projezione eziandio il polo dell' eccelittica ed i circoli di latitudine che passano tutti per il polo stesso. Il polo boreale dell' eccelittica trovasi in un punto p del raggio P 270 tale che sia $P p =$ tang 11° 44′ che si troverà prendendo $o a =$ 23° 28′, e congiunto a con 180 l'intersezione p sarà la cercata projezione. Si tracceranno i circoli di latitudine calcolando per ognuno di essi le coordinate del centro rapporto a P dietro le formule del § 463, od anche calcolando i punti, nei quali tagliano l'equatore. Sia l la longitudine di un circolo di latitudine qualunque, ed α l'AR di quel punto in cui incontra l'equatore; osservando che per il punto d'incontro si ha la declinazione $\delta = o$, dalla (1) e (2) delle equazioni (B) § 64, si ottiene tang $\alpha = \frac{\text{tang } l}{\cos \epsilon}$. Così posto $l =$ 30°, $\epsilon =$ 23° 28′ si troverà $\alpha =$ 32° 11′. Quindi la projezione di questo circolo passerà per le divisioni dell' equatore 32° 11′, 212° 11′, e per il punto p, e sarà con ciò pienamente determinata, e facile a descriversi. In tal guisa si condurranno tutti gli altri circoli di latitudine soppressi nella figura per non renderla troppo complicata.

Costruito il planisferio di grado in grado, vi s' inseriranno i paesi secondo le loro longitudini e latitudini, se si tratta di carte geografiche, o le stelle secondo le loro AR e declinazioni, se si tratta di carte celesti. Coll' ajuto di queste carte e dei problemi precedenti senza alcuna difficoltà risolvonsi i seguenti quesiti.

1.° *Determinare l' arco di circolo massimo fra due luoghi, o fra due stelle;* 2.° *avendo descritto nelle carte celesti l' orizzonte, determinare l' arco diurno di un astro di data declinazione;* 3.° *ad una data ora determinare la sua elevazione sopra l' orizzonte.*

II. Projezione stereografica equatoriale della sfera.

In questa projezione la più usitata per i mappamondi si suppone l' occhio in un punto dell' equatore, ed allora il meridiano da questo distante di 90° rappresenta il piano di projezione. D' ordinario si sceglie il piano del primo meridiano per piano di projezione, e ponesi l' occhio in 270° di longitudine per delineare l' emisfero orientale, ed in 90° per l' altro emisfero. Qualunque punto si scelga per il luogo dell' occhio l' equatore essendo un circolo massimo condotto pel medesimo sarà sempre un diametro del piano di projezione. Ecco le regole per delineare queste carte (*Fig.* 43).

Con un raggio Co a piacere descrivasi un circolo sPs', che riguarderassi come il primo meridiano. Tirisi il diametro 0° 180° per rappresentare l' equatore, ed il diametro PP' ad esso perpendicolare rappresenterà il suo asse, ed anche il meridiano condotto per l' occhio. I quadranti oP, oP' dividansi da 0° fino a 90°, e si avranno i punti per i quali passano i paralelli all' equatore nelle latitudini segnate sul meridiano. La distanza del loro polo dall' occhio essendo = 90°; i loro raggi dietro le formule del probl. I divengono = tang δ, e le distanze dei loro centri da C saranno = sec δ, l' arco δ esprimendo qui, come nel citato luogo, la distanza del paralello dal polo nella sfera. Quindi i paralelli boreali avranno il loro centro nella linea PP' al di sopra di P, ed i paralelli australi al di sotto di P'. Facilissima perciò riuscirà la loro costruzione. Vogliasi, per esempio, descrivere il paralello di 60°, che dista dal polo P di 30°. Aperto il compasso di una quantità = tang 30°, si ponga la punta nella divisione 60°, e si osservi ove l' altra punta sega PP' prolungato. Ivi sarà il centro della cercata projezione. I meridiani avranno i loro centri nell' equatore, e passeranno tutti per P, P'. Essendo inclinati al primo meridiano di una quantità uguale alla longitudine, la distanza dei loro centri da C sarà = tang longit. Quindi con somma facilità essi pure si descriveranno.

Spesse volte si desidera di descrivere in questi planisferj l' orizzonte di un luogo di cui conoscasi la longitudine e la latitudine. Per un tale oggetto conviene calcolare i punti, nei quali esso incontra l' e-

quatore ed il primo meridiano. Rappresenti perciò (*Fig.* 44) $RZPO$ il meridiano del dato luogo, RMO il suo orizzonte, PM il primo meridiano o circolo di projezione, EQ l'equatore, Z il zenit. Sarà PMO l'inclinazione del dato orizzonte al piano di projezione, PM la distanza della loro scambievole intersezione dal polo P; il punto E comune all'equatore, ed al dato orizzonte si troverà nella longitudine del dato luogo — 90° dalla parte d'occidente, e sarà in data longit. + 90° dall'altra parte. Si conosceranno così due punti E, M in ciascun planisferio, per i quali deve passare il dato orizzonte, ed il raggio della projezione essendo = sec M facilissima ne sarà la grafica descrizione dopo che colla Trigonometria si saranno calcolati PM, e l'angolo M. Se facciamo $PO = L$ la longitudine QPM del dato luogo $= \lambda$, il triangolo rettangolo POM (in cui l'angolo $MPO = 180° - \lambda$) darà $\cos M = \cos L \operatorname{sen} \lambda$, $\cot PM = - \cot L \cos \lambda$.

La *fig.* 43 porta per esempio la metà dell'orizzonte di un luogo a 45° di latitudine, ed a 120° di longitudine situato nell'emisfero orientale, e supposto l'occhio in 270°. In questo caso trovasi $M = 52° 14'$, $PM = 63° 26'$. Si costruirà pertanto la projezione del dato orizzonte al modo seguente; nel circolo esterno PoP' si prenderanno due archi $Ps' = 63° 26'$ dalla parte di occidente, ove hanno origine le longitudini nell'equatore, e $Ps = 116° 34'$ dalla parte di oriente (supplemento al precedente). Descritto un arco di circolo con un raggio = sec 52° 14', che passi per s' e per s sarà la cercata projezione, la quale dovrà nel caso presente tagliare l'equatore in 30° di longitudine, ed il meridiano di 120° di longitudine in una distanza dal polo $P = 135°$, o in altri termini dovrà riuscire tangente al paralello australe di 45°, lo che servirà di riprova alla fatta costruzione. Non vi sarà difficoltà per delineare l'ecclittica ed i suoi paralelli se si ricerchi prima la loro posizione rapporto al piano di projezione, nel che sarà sempre vantaggioso avere sotto gli occhi un globo di un piede almeno di diametro per facilitare il calcolo delle loro posizioni.

III. Projezione stereografica della sfera sopra un dato orizzonte.

Questa projezione si suole adoperare in Astronomia per disegnare in un determinato luogo le fasi di un'ecclisse, ed anche in Geografia per disegnare un mappamondo, come sarebbe quello del signor Ecker pubblicato in Vienna nel 1794. L'occhio si finge nel nadir per disegnare l'emisfero superiore, e nel zenit per l'emisfero inferiore; il piano di projezione è l'orizzonte razionale. Ecco le principali regole per costruirla.

Fingasi l'occhio nel nadir di un luogo situato alla latitudine L, per esempio 30°. Preso (*Fig.* 45) un raggio CA a piacere descrivasi un circolo che dividasi in gradi, e questo rappresenti l'orizzonte o

piano di projezione. Il diametro AB sia la projezione del suo meridiano, che riguarderemo come il primo meridiano; A segni il settentrione, B il mezzo giorno; DE perpendicolare ad AB sia la projezione del circolo massimo che passando pel zenit va dall'occidente D all'oriente E. Presi gli archi $AP = P'B = L$, e condotte EP, EP', si noteranno i punti p, p', nei quali segheranno la retta AB, e saranno questi le projezioni dei poli dell'equatore. Le projezioni dei meridiani sono tanti circoli sottoposti alla condizione di passare per p, p'; avranno perciò i loro centri sulla retta SS' perpendicolare a pp' nella sua metà in F, ed essendo $Cp = \text{tang}\,(45° - \frac{1}{2}L)$, $Cp' = \text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}L)$ facilmente si vedrà essere $CF = \text{tang}\,L$, $Fp = \sec L$. Per determinare i raggi dei meridiani si calcolino le loro inclinazioni all'orizzonte. Perciò sia RZP (*Fig.* 44) il primo meridiano projettato in AB, PM un meridiano corrispondente alla longitudine $QPM = \lambda$, il quale sega l'orizzonte di projezione sotto l'angolo M. Il triangolo PMO rettangolo in O darà

$$\cos M = \cos L \,\text{sen}\,\lambda, \quad \text{tang}\,MO = -\,\text{sen}\,L\,\text{tang}\,\lambda.$$

La prima dà l'inclinazione del meridiano all'orizzonte, la seconda i punti nei quali la projezione taglia lo stesso orizzonte. Così ponendo $\lambda = 60°$ si troverà $MO = 139° 6'$, $M = 41° 24'$. Preso perciò dal nord A verso l'oriente l'arco $A\,60 = 139° 6'$, ed aperto il compasso di un raggio $= \sec 41° 24'$, si appoggierà in p ed in 60, l'intersezione g' (che caderà sulla retta SS') dei due archetti descritti con quest'apertura sarà il centro della projezione del meridiano di 60° di longitudine.

Si può trovare il centro di ogni meridiano sulla linea SS' colla seguente costruzione. Descrivasi da p, come centro con un raggio pb a piacere, un circolo, sul quale preso l'arco $bg = 90° - \lambda$ (nel nostro esempio $= 30°$), e congiunta pg, il punto g' in cui segherà la retta SS' sarà il centro cercato. In fatti per il § 463 le sue coordinate CF, Fg' (se osserviamo che $\iota = 90 - L$, $\omega = \lambda$) divengono $CF = x' = \text{tang}\,L$; $Fg' = y' = -\dfrac{\cot\lambda}{\cos L}$, ove dovremo cambiare il segno, se rivolgasi, come nella figura, la linea Fg' dalla parte delle y negative. Essendo poi $pF = \sec L$, si troverà

$$\text{tang}\,bpg' = \frac{y'}{pF} = \cot\lambda = \text{tang}\,(90 - \lambda), \text{ e però } bpg' = 90 - \lambda$$

come esige l'enunziata costruzione.

Rimane a descrivere l'equatore ed i paralelli. Quanto all'equatore si troverà il suo centro portando da C verso A una linea $= \text{tang}\,(90 - L)$, e descrivendo un circolo col raggio $\sec(90 - L)$, il quale dovrà passare per E, D. Nell'attuale esempio l'equatore è

rappresentato da E 90 D descritto con un raggio = sec 60°. I paralelli hanno i loro centri nella linea AB prolungata, se occorra. In generale se δ rappresenta la distanza di uno di essi dal polo P, si troveranno le estremità del diametro portando da C verso A le tangenti degli archi $\frac{1}{2}(L+\delta)$, $\frac{1}{2}(L-\delta)$ osservando di prendere tang $\frac{1}{2}(L-\delta)$ da C verso B, quando l'arco si fa negativo. Si costruiscono queste stesse estremità portando l'arco δ sotto e sopra il punto P, e tirate dai suoi estremi due linee al punto E, i punti nei quali incontrano AC prolungato, se occorre, determinano il diametro della cercata projezione, sopra il quale facilmente si descriverà il circolo. La *figura* 45 contiene il paralello distante dal polo 30° essendosi soppressi gli altri.

Se si desiderasse in oltre di descrivere in questa projezione i verticali ed i paralelli all'orizzonte, si dividerebbe il circolo AED in gradi, ed i raggi condotti ad ogni divisione rappresenterebbero i verticali corrispondenti agli azimut indicati dalle medesime; i paralelli che nelle diverse altezze si conducono all'orizzonte vengono rappresentati da circoli aventi il centro comune in C, e per raggio le tangenti della metà delle loro distanze dal zenit. Ultimato il disegno dei due planisferj, saranno essi divisi dai meridiani e dai paralelli in quadrilateri, ciascuno dei quali corrisponderà ad una data longitudine e ad una data latitudine, le longitudini dovendosi scrivere sul circolo AED all'estremità di ogni meridiano, e le latitudini nell'intersezione di ogni paralello col primo meridiano pB. Vi s'inseriranno poscia i nomi dei luoghi secondo le loro longitudini e latitudini, e posti a contatto nella divisione 0°, ovvero 180°, si avrà l'intero mappamondo ricercato.

467. *Scolio*. Oltre le carte rappresentanti l'intero globo costruite dietro i principj delle projezioni ortografiche e stereografiche meritano di essere rammentati li planisferj del signor Lorgna descritti in una sua operetta pubblicata in Verona nel 1789 sotto il titolo: *Principj di geografia astronomico-geometrica*, i quali sebbene, a vero dire, non sieno derivati da principj di prospettiva, pure sono di semplicissima costruzione, danno le superficie di paesi esattamente, ed essendo i meridiani linee rette, ed i paralelli tanti circoli concentrici le figure dei paesi sono a sufficienza conservate.

Delle carte speciali.

468. Dopo di avere indicato i metodi più acconcj per la costruzione dei planisferj celesti e geografici, passiamo a trattare delle carte speciali, nelle quali si domanda di delineare soltanto una porzione della superficie terrestre compresa fra due dati paralelli, e fra due dati me-

ridiani. Si potrebbero anche in questo caso adoperare le projezioni ortografiche e stereograliche, delle quali abbiamo di sopra dato le principali proprietà; ma oltre che i precetti per la loro costruzione non sono di quella semplicità che d'ordinario si desidera in questo argomento, esse riescono incomode, perchè anche a mediocri distanze troppo notabilmente si alterano le figure dei paesi, e le distanze loro scambievoli; perciò i Geografi hanno ricorso ad altre costruzioni, di alcune delle quali più celebri e più comuni esporremo qui i principj, rimandando per le altre alle opere che trattano appositamente delle carte geografiche, e particolarmente ad un' opera eccellente e non mai abbastanza da raccomandarsi ai giovani geografi che porta per titolo: *Anweisung zur verfertigung der Land-see-undhimmelscharten etc.* di Tobia Mayer, terza edizione in Erlangen 1815. Ivi si troveranno unite ad una gran copia di esempj numerici tutte le pratiche avvertenze che non possono qui aver luogo, e la descrizione di molti stromenti, dei quali fanno uso i disegnatori nel delinearle.

Costruzione delle carte coi meridiani rettilinei convergenti in un punto, e con i paralelli pure rettilinei, e fra loro paralelli.

469. Gli antichi Geografi accortisi che i gradi dei paralelli dall'equatore ai poli andavano diminuendo adoperarono per le carte geografiche una comodissima costruzione, la quale può sempre con vantaggio porsi in opera nella mappa di una provincia o di un regno, come l'Italia, la Spagna, la Francia ec. Per fissare le idee noi supporremo che si voglia delineare una porzione della superficie terrestre compresa fra 40° — 50° di latitudine boreale, e fra 6° — 14° di longitudine. Si conducano perciò nella carta destinata a quest'oggetto (*Fig.* 46) due linee MN, PQ ad angolo retto, la prima delle quali rappresenti la direzione del meridiano medio della carta, che nel nostro caso è quello di 10° di longitudine, la seconda la direzione del paralello medio, che per noi corrisponde a 45° di latitudine. Se si vogliano far concorrere i meridiani tutti ad un punto, non si potrà conservare in tutti i paralelli la lunghezza dei loro gradi uguale a quella che nelle latitudini intermedie hanno nel globo, e tutto al più in due di essi si potranno conservare i veri rapporti, e negli altri dovremo contentarci di lasciare sussistere un errore, il quale sarà più o meno grande secondo la latitudine dei paralelli che faremo corrispondere al vero. Nel nostro caso supponiamo che i gradi dei paralelli situati alle latitudini di 41° e di 49° debbano coi gradi del meridiano mantenere il vero rapporto. Allora opereremo nel seguente modo. Si scelga una lunghezza arbitraria per rappresentare il grado del meridiano, e portisi al di sopra ed al di sotto di PQ nella linea MN tante volte quanti sono i gradi

di latitudine che deve abbracciare la carta; indi per ciascun punto di divisione si conducano le linee paralelle a PQ. Dovendo la carta per ipotesi abbracciare 4° in longitudine di qua e di là da MN, con un raggio uguale a 4° del meridiano descrivasi un quarto di circolo (*Fig.* 47), e presi in questo gli archi AB, AC rispettivamente $= 41°, 49°$, i loro coseni portati di qua e di là da MN nei paralelli di 41°, di 49° determineranno in ab, cd l'ampiezza della carta. Divise ab, cd in otto parti, si uniscano con altrettante linee rette i punti di divisione, e si prolunghino fino agli estremi paralelli; sarà così tutto lo spazio diviso in altrettanti trapezj, ciascuno dei quali corrisponderà ad una latitudine e longitudine determinata, ed in essi s'inseriranno i punti della superficie terrestre secondo le loro longitudini e secondo le loro latitudini.

Dalla indicata costruzione apparisce che tutti i meridiani convergono ad uno stesso punto di MN prolungato, e che i gradi di tutti i paralelli (a riserva di ab, cd) saranno in errore. Nelle due seguenti proposizioni determineremo il punto a cui nella carta convergono i meridiani, le loro respettive inclinazioni, e l'errore dei paralelli.

Problema I. Trovare il punto P, a cui concorrono i meridiani, e l'angolo che formano col meridiano medio (*Fig.* 48).

470. Sieno AB, CD i paralelli resi uguali a quelli del globo, e supponiamo a maggiore semplicità che CP rappresenti la direzione del meridiano medio della carta, essendo DP quello che nel globo fa col precedente l'angolo di un grado. Sia M la lunghezza del grado del meridiano nella carta; α, β le latitudini dei due punti C, A. Sarà $AC = M(\beta - \alpha)$, $AB = M \cos \beta$, $CD = M \cos \alpha$. Condotta BN paralella ad AC, i triangoli simili BDN, BAP daranno $DN : BN :: AB : AP$. Quindi sostituendo i valori superiori si troverà

$$AP = \frac{M(\beta - \alpha) \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

In seguito si avrà

$$\text{tang } P = \frac{AB}{AP} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\beta - \alpha} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Apparisce nel tempo stesso che chiamando φ l'angolo che il meridiano distante di n gradi in longitudine fa col meridiano medio, sarà

$$\text{tang } \varphi = \frac{n(\cos \alpha - \cos \beta)}{\beta - \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ed il complemento di φ rappresenterà l'inclinazione di esso meridiano ai paralelli. Nel calcolo delle equazioni (1), (2), (3) la quantità $\beta - \alpha$ deve esprimersi in gradi, e riguardarsi come numero astratto. Nel nostro esempio ponendo $\alpha = 41°$, $\beta = 49°$; si troverà $AP = 53,20\,M$, l'angolo $P = 42',4$, e per le longitudini di 4° e di 10° sarà

$\varphi = 2^\circ\, 49',6$, $= 7^\circ\, 1',9$. Però l'inclinazione dei meridiani ai paralelli sarà $87^\circ\, 10'$ per il meridiano di 4° distante dal medio, ed $82^\circ\, 58'$ per quello distante di 10°. Apparisce di qui che si potrebbe dare a queste carte un'estensione anche più grande, senza che venissero alterate sensibilmente le figure dei paesi.

Problema II. Trovare l'errore del grado di un qualunque paralello $P'Q$ situato in una latitudine λ intermedia fra α, β.

471. Pongasi per brevità $AP = qM$, di modo che sia $q = \frac{(\beta - \alpha)\cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$; sarà $PP' = M(\beta - \lambda + q)$, e $QP' = M(\beta - \lambda + q)\,\text{tang}\,P$, mentre nel globo si ha il grado del paralello rappresentato in $P'Q = M\cos\lambda$. Quindi indicando per ι l'errore del grado $P'Q$, avremo, sostituiti i valori di tang P e di q,

$$\iota = M(\beta - \lambda)\,\text{tang}\,P + M(\cos\beta - \cos\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ove non convien perdere di vista che le quantità $\beta - \lambda$, $\beta - \alpha$ si fingono ridotte in gradi e parti di grado.

Corollario. Si otterrà la latitudine del paralello soggetto al massimo errore ponendo $\frac{d\iota}{d\lambda} = 0$. Converrà però osservare nel differenziare la precedente equazione (4), che nel differenziale di $-\cos\lambda$ l'arco $d\lambda$ supponesi ridotto in parti di raggio, mentre per la natura dei differenziali viene sostituito a sen $d\lambda$. Se adunque sia $d\lambda$ espresso in parti di grado, dovrà quel termine dividersi per il numero dei gradi contenuti nel raggio, che è $= 57^\circ,296$. Con questa avvertenza si troverà la latitudine del paralello soggetto al massimo errore dall'equazione

$$\text{sen}\,\lambda = 57,296\,\text{tang}\,P \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ed in seguito sarà la lunghezza $P'Q = P'P\,\text{tang}\,P$, ed il massimo errore $= P'P\,\text{tang}\,P - M\cos\lambda$. Nel nostro esempio trovasi $\lambda = 44^\circ\, 57',2 = 44^\circ,955$, e però $P'P = 57,245\,M$, $P'Q = 0,7059\,M$, mentre nel globo si trova il grado in quella latitudine $= 0,7077\,M$. Quindi il massimo errore è $= 0,0018\,M$. Apparisce di qui che il massimo errore ha luogo nelle vicinanze del paralello medio della carta, ed essendo tuttavia insensibile attesta che si può abbracciare in latitudine un'estensione molto più grande di quella da noi assunta.

L'errore massimo nel grado dei paralelli sarebbe divenuto anche più picciolo ponendo $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 47^\circ$, ed in generale osserva il signor Mayer nella citata opera che *si devono far corrispondere al caso della natura i paralelli in modo che rimangano fra loro, e dagli estremi della carta equidistanti.*

Costruzione delle carte di Flamsteed (*Fig.* 49).

472. Flamsteed osservando che il principale difetto della precedente costruzione dipendeva dalla inesattezza dei rapporti fra i gradi dei paralelli, ed il grado del meridiano, rinunziò alla condizione dei meridiani rettilinei, e ritenendo i paralelli rappresentati da tante linee rette paralelle, portò in esse le esatte lunghezze dei loro gradi, e così ha potuto estenderle di più in longitudine e latitudine.

La *fig.* 49 rappresenta un picciolo modello di queste carte; la linea MN è la direzione del meridiano medio della carta che dividesi in tante parti uguali in a, b, c quanti sono i gradi in latitudine, ai quali si deve estendere la carta, e se le parti per la picciolezza della scala fossero per riuscire troppo picciole, vi si porteranno le divisioni di cinque in cinque gradi, o di dieci in dieci, e vi si apporranno i numeri esprimenti in gradi le respettive latitudini. Le perpendicolari ad MN condotte per ogni punto di divisione indicano i paralelli, in ognuno dei quali si trasportano le lunghezze dei gradi o di uno in uno, o di cinque in cinque, secondo la grandezza della scala. Le ampiezze di ogni paralello si possono comodamente ricavare dalla superiore costruzione (§ 469), e più facilmente si prenderanno da una tavola delle lunghezze dei gradi loro ad ogni latitudine precedentemente preparata in miglia. Unendo tutte le divisioni segnate 1 con una linea si avrà il meridiano che dista dal meridiano medio di 1°, 5° ec. in longitudine secondo che una parte rappresenta 1°, ovvero 5°; lo stesso dicasi delle altre. S'inseriranno quindi nei quadrilateri così delineati i nomi delle città, gli andamenti dei fiumi, coste ec., secondo le loro longitudini e latitudini prese da altre carte, o dalle tavole geografiche. Finalmente diviso il grado del meridiano in 60 parti uguali, si avrà la scala, col mezzo della quale in queste carte si devono valutare le distanze in miglia italiane.

473. Questa costruzione alla sua semplicità unisce il vantaggio di potersi estendere notabilmente in longitudine ed in latitudine *prima* che l'errore nelle distanze rendasi considerabile. Ma una loro proprietà rimarchevole avvertita dal signor Molweide si è che le superficie dei paesi da esse rilevate esattamente corrispondono a quelle del globo. Per dimostrarla, si chiamino x, y le coordinate di un punto della carta prese la prima sul meridiano MN, la cui origine per semplicità fingasi nell'equatore, e la seconda sopra una perpendicolare ad MN, e sia λ la sua latitudine, n la sua longitudine rapporto ad MN. Dietro il principio di questa costruzione sarà $x = M\lambda$, $y = Mn \cos \lambda$. Quindi indicata per S una porzione qualunque di area, avremo per gli elementi del calcolo differenziale

$dS = y\,dx = M^2 n \cos\lambda\, d\lambda$, e perciò $S = M^2 n \operatorname{sen}\lambda + C$, ed estesa l'integrazione fra i valori di λ corrispondenti a λ', λ'' avremo $S = M^2 n (\operatorname{sen}\lambda'' - \operatorname{sen}\lambda')$, la quale evidentemente coincide con la formula del § 451 per il calcolo delle superficie nel globo.

Coroll. Se fra le equazioni $x = M\lambda$, $y = M n \cos\lambda$ si elimina λ, si avrà l'equazione $y = M n \cos\frac{x}{M}$, che conviene a tutti i punti del meridiano di longitudine n, ed annunzia che in queste carte i meridiani sono rappresentati dalle curve dei seni sì celebri presso i primi Geometri del decorso secolo.

Costruzione delle carte del signor de l'Isle (Fig. 50).

474. Il celebre de l'Isle nella costruzione di una carta dell'Impero Russo ha adoperato i meridiani rettilinei convergenti ad un punto P, come nelle carte descritte al § 469, ma ha sostituito ai paralelli rettilinei tanti archi di circolo descritti col centro P da esso chiamato *polo della carta*, e di più ha sottoposto due paralelli ZQ, mV equidistanti fra loro, e dagli estremi N, M a corrispondere nella lunghezza dei loro gradi a quelli delle respettive latitudini del globo.

Apparisce di qui che in queste carte i meridiani manterranno sempre fra loro la stessa inclinazione, e rimarranno in tutti i punti perpendicolari ai paralelli come nel globo; perciò le figure dei paesi saranno molto meglio che nelle precedenti costruzioni conservate, e sebbene in due soli paralelli le lunghezze dei loro gradi sieno consentanee alla verità, pure si potranno estendere notabilmente prima che gli errori delle distanze divengano sensibili, come apparirà dall'esempio numerico annesso in fine.

Per la costruzione di queste carte tutto si riduce alla ricerca del polo P, centro comune a tutti i paralelli. Sieno perciò PM, PL due meridiani distanti di un grado; QR, VK le lunghezze del grado dei paralelli equidistanti dagli estremi, e corrispondenti a quelli del globo. Condotta RY paralella a QV, per la picciolezza degli archi RQ, KY, si potranno considerare come rettilinei i triangoli KRY, RPQ, e però la posizione del punto P, e l'angolo P si determineranno come nel § 470. Poste perciò le latitudini dei punti V, Q uguali α, β; la distanza $PQ = R$; l'angolo $RPQ = \omega$, avremo $R = \frac{M(\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \cos\beta}\cos\beta$, $\operatorname{tang}\omega = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta - \alpha}$, e la latitudine del paralello corrispondente al massimo errore sarà data da $\operatorname{sen}\lambda = 57{,}296 \operatorname{tang}\omega$, nelle quali formule $\beta - \alpha$ deve essere espresso in gradi, ed M rappresenta la lunghezza corrispondente al grado

del meridiano. Dalla costruzione di queste carte apparisce che se nel globo i meridiani estremi comprendono un angolo n, nel disegno comprenderanno un angolo $= n\,\omega$.

Debba per esempio estendersi la carta dai 50° ai 65° di latitudine, ed abbracciare 20° in longitudine. Si faranno corrispondere al globo i paralelli di 55° e di 60°; però sarà $\alpha = 55°$, $\beta = 60°$.

Si troverà $QR = 0{,}5000\,M$, $VK = 0{,}5736\,M$, $QP = R = 33{,}98\,M$, $\omega = 50'\,35'',1$. Sarà in seguito $PN = Ps = 28{,}94\,M$, $PM = Pn = 43{,}98\,M$, l'angolo $nPs = 20\,(50'\,35'',1) = 16°\,51'\,42''$.

Risolvendo il triangolo nPs si troverà $ns = 18{,}292\,M$, e tale appunto dovrebbe essere la distanza dei punti estremi s, n presa colla scala in un disegno ben eseguito coi superiori precetti.

Se ora si calcola colle formule del § 450 l'arco di circolo massimo che unisce due punti situati alle latitudini di 50° e di 65°, e dei quali la differenza di longitudine sia $= 20°$, si troverà che è $= 18°\,16'\,43'' = 18°{,}279$. Quindi la distanza vera sarà $= 18°{,}279\,M$, che non differisce sensibilmente dalla superiore, ed attesta potersi l'attuale costruzione estendere ad una porzione della superficie terrestre anche più grande della precedente.

Carte di sviluppo conico, e carte di Bonne.

475. Rappresenti la *fig.* 51 il globo terrestre, il cui centro sia in C, e vogliasi delineare una zona compresa fra i due paralelli γc, βb situati alle latitudini α e β. Diviso l'arco bc per metà al punto m, e condotto il paralello $m\,\mu$ circoscrivasi al globo terrestre un cono $p\,m\,\mu$, il cui vertice si troverà in un punto p dell'asse RP prolungato. Se l'arco bc non sarà soverchiamente grande, potremo riguardare la zona sferica da delinearsi come coincidente con la superficie del tronco di cono $\beta\,\gamma\,b\,c$ circoscritta ad essa, e sviluppando in un piano il cono, inscriremo secondo le loro longitudini e latitudini nella zona circolare che rappresenta lo sviluppo della detta porzione di cono, i nomi dei paesi.

I precetti per delineare questo sviluppo saranno i seguenti. Si calcoli in primo luogo la lunghezza della linea $p\,m$ in miglia colla formula che qui sotto daremo, e presa una linea determinata, per esempio un dodicesimo di pollice per rappresentare il miglio, si faccia (*Fig.* 50) $Pv = p\,m$ preso in questa scala, e descrivasi l'arco di cerchio $3\,v\,3$, che si riguarderà come lo sviluppo del paralello $m\,\mu$. Quindi al di sopra ed al di sotto del punto v si portino tante parti uguali rappresentanti ognuno un grado del meridiano quanti sono i gradi di latitudine compresi in bm, mc, e per ogni divisione col centro P si descrivano altrettanti archi di circolo, i quali rappresente-

ranno lo sviluppo dei successivi paralelli. Per condurvi i meridiani si calcoli in miglia il grado del paralello che passa per m nel globo, e coll'assunta scala si porti di qua e di là del meridiano $P\nu$ nell'arco $3\nu 3$ in 1, 2, 3 tante volte quanti sono i gradi di longitudine che deve abbracciare il disegno, indi per ogni punto di divisione e per P si conducano altrettante linee rette, che rappresenteranno i meridiani, e sarà tutta la carta divisa in quadrilateri corrispondenti a date longitudini e latitudini.

In questa costruzione, come nella precedente di de l'Isle, i meridiani sono linee rette sempre fra loro ugualmente inclinate nel polo, ed intersecano ovunque i paralelli ad angolo retto. Il solo paralello medio rappresenta con esattezza i gradi del suo corrispondente nel globo, e la carta si può estendere a 15°, 20° in latitudine, ed altrettanto in longitudine prima che gli errori delle distanze si rendano sensibili.

Resta a trovare il valore di $P\nu$, ossia di pm, che indicheremo con R (*Fig.* 51). Sia r il raggio terrestre mC espresso in miglia; essendo il numero dei minuti compresi nel raggio $= 3437',75$, sarà pure $r = 3437,75$. Quindi osservando che la latitudine del punto m è $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, l'angolo pCm sarà $= 90 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, ed il triangolo rettangolo mCp darà $pm = R = r \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Essendo poi il grado del paralello medio $= M \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, l'inclinazione ω di due meridiani che nel globo comprendono un grado in longitudine, sarà data dall'equazione

$$\omega = \frac{M \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{R} = \frac{60' \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{3437,75} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{57,296},$$

ed un meridiano distante da MN di n gradi in longitudine, comprenderà nel polo P con PM un angolo $= n\omega$.

476. Il signor Bonne avendo osservato che uno dei principali difetti di queste carte era l'inesattezza del rapporto fra i gradi dei paralelli e del meridiano, ad imitazione di Flamstedio rinunziò alla condizione dei meridiani rettilinei, ed immaginò di portare in ogni paralello di qua e di là dal meridiano medio della carta le vere lunghezze dei loro gradi. Così il meridiano medio rimane tuttavia rettilineo, i paralelli sono tanti archi di circolo concentrici descritti colle regole indicate nel § precedente; ma i meridiani di qua e di là del medio si allontanano di più in più dalla linea retta, e risultano dal congiungere con un tratto continuo le divisioni corrispondenti di tutti i paralelli. Questa costruzione è ora generalmente adottata, avvegnachè le distanze dei luoghi non vengono alterate sensibilmente, se anche si facciano abbracciare una zona di 120° in 130° di longitudine, e si estendano per 60° in 70° di latitudine. Godono poi dell'altro prezioso

vantaggio di porgere esattamente le superficie delle diverse provincie, siccome per il primo ha dimostrato il chiar. signor Molweide nel volume XIII della Corrispondenza in tedesco del signor Zach pag. 144. La *fig.* 52 ne presenta un picciolo modello per una zona di 140° in longitudine dai 10° fino ai 70° di latitudine. Il meridiano rettilineo PM è il meridiano medio della carta; il paralello di 40° è il paralello medio, e si calcola il suo raggio Pc dietro l'equazione $R = r \cot 40°$.

477. Dalla costruzione di queste carte apparisce che, ritenute le denominazioni precedenti, il raggio del paralello medio sarà $R = r \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, ed il raggio ϱ di un altro paralello qualunque sotto la latitudine λ sarà $\varrho = R - M[\lambda - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$. Quindi se un qualunque punto q posto alla latitudine λ, ed in una longitudine n contata dal meridiano medio si riferisca alle coordinate *polari* $Pq = \varrho$, $bPq = u$, avremo

$$\varrho = R - M[\lambda - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)]; \quad u = \frac{bq}{Pb} = \frac{nM\cos\lambda}{\varrho},$$

dalle quali eliminando λ si otterrà l'equazione della curva del meridiano di n gradi di longitudine riportata a coordinate polari.

Si può ora facilmente dimostrare la proprietà di queste carte scoperta dal signor Molweide, della quale abbiamo parlato di sopra. In fatti chiamando $d'S$ un elemento compreso fra due paralelli infinitamente vicini corrispondenti alle latitudini λ, $\lambda + d\lambda$, e fra due meridiani corrispondenti alle longitudini n, $n + dn$, sarà la sua *base* $= \varrho\left(\frac{du}{dn}\right)dn = M\cos\lambda\, dn$, e la sua altezza $= -\left(\frac{d\varrho}{d\lambda}\right)d\lambda = M d\lambda$. Quindi avremo $d'S = M^2 \cos\lambda\, d\lambda\, dn$, che integrata fra i limiti λ', λ'' darà $S = M^2 n (\operatorname{sen}\lambda'' - \operatorname{sen}\lambda')$, ove n esprimerà l'estensione della zona in longitudine; donde rilevasi che la sua superficie esattamente combina con quella della zona sferica corrispondente.

Scolio. Oltre le carte finora descritte molte altre costruzioni si adoperano, fra le quali commendevole è pure quella del signor Murdoch, ma noi più non ci estenderemo in questo argomento, rimandando per questa e per le altre all'opera di Mayer sopra citata, ed anche ad alcuni Commentarj del signor Albers nella più volte citata Corrispondenza di Zach vol. XI.

CAPITOLO IX.

Applicazione dell' Astronomia alla Nautica.

Metodo per istimare il viaggio di un vascello in longitudine ed in latitudine.

478. In alto mare non vedendo il nocchiero che cielo ed acqua è obbligato di ricorrere al moto degli astri come a certa norma del suo corso, per evitare il pericolo di rompere in iscogli o bassi fondi, e se può con sicurezza fare il giro del globo, ed attraversare in ogni direzione la vasta superficie delle onde, lo deve ai progressi dell' Astronomia e della Meccanica, e soprattutto alla sorprendente esattezza delle tavole lunari. Non è nostro scopo di dare qui un trattato completo di Nautica, nè di descrivere tutti i mezzi dei quali si fa uso in mare per riconoscere la posizione del vascello; per tali oggetti conviene ricorrere a trattati speciali di Nautica, fra i quali sono molto da raccomandarsi ai giovani studiosi quelli dei signori Bezout e Brunacci. Noi qui ci contenteremo di dare in primo luogo una succinta descrizione degli stromenti più usitati in mare, ed in seguito passeremo a riferire i metodi più comuni per determinare dietro le osservazioni la posizione del naviglio rapporto all' equatore terrestre.

479. Si esplora la celerità del vascello col mezzo del *locche* che è una specie di tronco di piramide triangolare di legno caricato nella minore base di un pezzo di piombo, in modo che gettato nell' acqua di mare possa galleggiare; nella base superiore trovasi un anello di ferro, a cui si assicura una lunga cordicella detta *sagola* o *trecciuola*, la quale ad eguali distanze, per esempio di 10 in 10 piedi, porta un nodo. Gettasi il locche nell' acqua dietro il naviglio, ed aspettando che siasi da esso allontanato, finchè cessata l' agitazione delle onde smosse apparisca fermo, si conta il numero dei piedi svolti nella sagola per un tempo dato, per esempio in un minuto, e si ottiene lo spazio percorso dal vascello nello stesso tempo, dal quale con una semplice proporzione si avrà lo spazio trascorso per tutto il tempo in cui la direzione del movimento e l' impulso del vento nelle vele rimase costante. È bene di replicare questa osservazione più volte nella giornata, ed anche di ora in ora per potere con più sicurezza stimare il viaggio fatto in una determinata direzione.

480. Finchè la posizione delle vele e la forza del vento rimane

costante il naviglio conserva la stessa direzione, ed incontra i successivi meridiani sotto un angolo costante descrivendo una curva, alla quale i Nautici danno il nome di *loxodrimia*. Per potere stimare il viaggio percorso tanto in longitudine quanto in latitudine è necessario di conoscere oltre la celerità assoluta valutata col locche eziandio l'angolo della loxodrimia col meridiano, al che si perviene colla *bussola nautica*, che è una bussola ordinaria equilibrata dentro una cassa apposita stabilita in un determinato luogo della nave, sicchè la sua continua agitazione non turbi la direzione dell'ago magnetizzato, e gli lasci la libertà di disporsi in ogni luogo nel meridiano magnetico.

La circonferenza interna dividesi d'ordinario secondo i rombi dei venti, e più comodamente dividerebbesi in gradi e mezzi gradi, siccome noi lo supporremo nelle cose seguenti. Sopra il cristallo che ricuopre l'ago ed il circolo graduato, concentrico a quest'ultimo, rendesi girevole un altro circolo munito di un traguardo per rilevare la posizione degli oggetti lontani rapporto alla direzione dell'ago, o vogliamo dire del meridiano magnetico. Con tal mezzo si rende facile esplorare la direzione del corso della nave rapporto al meridiano magnetico, imperciocchè rivolgesi il traguardo sulla traccia delle onde rotte dal naviglio, e numerati i gradi contenuti fra la posizione della linea del traguardo e l'ago magnetico si ha l'angolo della loxodrimia con quest'ultimo. In fine il confronto dell'angolo così rilevato coll'angolo compreso fra il meridiano magnetico ed il meridiano terrestre, in cui trovasi il naviglio, farà conoscere la direzione del suo corso rapporto a quest'ultimo circolo. Così se l'angolo della loxodrimia col meridiano magnetico sia stato osservato di 60° all'oriente, e si sappia d'altronde che il meridiano magnetico declina dal meridiano terrestre di 18° verso l'occidente, sarà l'angolo cercato della loxodrimia col meridiano terrestre $= 60° - 18° = 42°$ verso l'oriente. Per brevità indicheremo in seguito quest'angolo colla lettera i.

481. La declinazione magnetica non è costante nè in ogni luogo, nè in ogni tempo. Primieramente in uno stesso punto del globo terrestre è sottoposta ad una lentissima variazione, in virtù della quale sembra oscillare attorno al meridiano terrestre deviando ora a levante ed ora a ponente. Nelle nostre regioni al presente il meridiano magnetico declina di $18\frac{1}{4}$ ad occidente, e sembra sottoposta ad un'annua diminuzione. Variando notabilmente la longitudine e la latitudine varia pure la declinazione magnetica, e rendesi necessario determinarla con frequenza, se vogliasi con qualche precisione stimare i. Sogliono i Nautici determinare la declinazione magnetica coll'osservazione del Sole, o di un astro luminoso ben conosciuto nel momento in cui nasce o tramonta. Sia (*Fig* 23) $M\,Z\,T$ il meridiano del naviglio; B' il punto dell'orizzonte, a cui è diretto l'ago magnetico; S' il punto in

cui apparentemente sorge il Sole sopra l'orizzonte. Diretto il traguardo ad S', sarà $B'S'$ l'angolo compreso fra l'ago e la direzione del traguardo, il quale in conseguenza verrà dato dalle divisioni della bussola. Calcolando quindi coi precetti del § 420 3.° la posizione del punto S', in cui il lembo osservato del Sole perviene all'orizzonte, si avrà l'arco $S'T'$, da cui tolto $B'S'$ rimarrà la declinazione dell'ago magnetico rapporto al meridiano. Del pari l'osservazione del tramonto apparente di uno dei due lembi del Sole, farà scoprire la declinazione magnetica; e più generalmente si potrà essa determinare ogni volta che siasi osservato la differenza di azimut fra l'astro giunto in una qualunque elevazione SS', ed il punto B', purchè da un altro osservatore siasi presa contemporaneamente l'altezza SS' sopra il vero orizzonte. In fatti se P rappresenta il polo dell'equatore, Z il zenit del bastimento, si conosceranno i tre lati del triangolo PZS, e però agevolmente si avrà dalla Trigonometria l'angolo in Z, che è $= T'S'$; se da questo levisi $B'S'$, si avrà la cercata declinazione magnetica.

482. Premesse queste cose, passiamo alla soluzione dei due seguenti problemi importantissimi per il navigatore.

Data la longitudine e latitudine del punto da cui parte il naviglio, il viaggio assoluto che ha percorso nella sua loxodrimia insieme coll'angolo i, sotto cui questa taglia i meridiani, si domanda la longitudine e latitudine del punto di arrivo.

Rappresenti (*Fig.* 53) EQ l'equatore terrestre, E il punto da cui si numerano le longitudini, P il polo, C il punto di partenza situato sotto il meridiano PC alla latitudine $CA = l$, ed alla longitudine $EA = m$; sia CF la loxodrimia percorsa dal naviglio, la quale seghi i meridiani sotto un angolo costante $PCF = i$; si ponga inoltre il viaggio trascorso CF stimato col locche $= V$, e la latitudine incognita del punto d'arrivo $F = l'$, la sua longitudine $= m'$. Si domandano i valori di m', l'.

Sia ad un istante qualunque pervenuto il vascello nel punto m in una latitudine $mf = \lambda$, ed in una longitudine $Ef = \mu$, e passi nell'istante seguente nel punto m' sotto la latitudine $\lambda + d\lambda$, e nella longitudine $\mu + d\mu$. Condotto l'arco mr paralello all'equatore, sarà $m'r = d\lambda$, $mr = d\mu \cos\lambda$; e se inoltre si fa $Cm = v$, $mm' = dv$, il triangolo rettangolo $mm'r$, in cui l'angolo in $m' = i$, darà $d\mu \cos\lambda = dv \operatorname{sen} i$, $d\lambda = dv \cos i$, dalle quali, eliminando dv, si ottiene $d\mu = \frac{d\lambda \operatorname{tang} i}{\cos\lambda}$. L'equazione $d\lambda = dv \cos i$ integrata fra i limiti del problema, cioè fra $\lambda = l$, ed $= l'$, e da $v = 0$ fino a $v = V$ darà . . . $l' - l = V \cos i$ . . . (1)

Del pari l'equazione $d\mu = \frac{d\lambda \operatorname{tang} i}{\cos\lambda}$ integrata fra gli stessi limiti darà

$m' - m = \text{tang}\, i\, [\log \text{iperb tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} l') - \log \text{iperb tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} l)]$ (2)

La equazione (1) dà l'avanzamento del vascello in latitudine, e la equazione (2) il viaggio fatto in longitudine. La prima equazione dà direttamente i minuti contenuti in $l' - l$, se V è dato in miglia italiane. Il secondo membro dell'equazione (2) essendo un numero astratto, si dovrà moltiplicare per 3437′,75 per ridurlo a minuti di grado; inoltre se si vogliano adoperare i logaritmi delle tavole ordinarie in luogo dei logaritmi iperbolici si dovrà moltiplicare il secondo membro per log iperb 10, ossia per 2,302585. Così l'equazione (2) diverrà

$m' - m = 7915',71\ \text{tang}\, i\, [\log \text{tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} l') - \log \text{tang}\,(45 + \tfrac{1}{2} l)]$ (3)

483. *Scolio*. La quantità 7915′,71 log tang $(45 + \tfrac{1}{2} l)$ si suole dagli scrittori di Nautica chiamare *latitudine crescente*, e se ne trovano in tutti i trattati di navigazione delle tavole estese ad ogni latitudine. Se pertanto indicheremo colla lettera L la latitudine crescente corrispondente alla latitudine l, le equazioni che determinano la posizione del punto d'arrivo rapporto al punto di partenza sono $l' - l = V \cos i$, $m' - m = \text{tang}\, i\,(L' - L)$. Dalla prima si avrà la latitudine l' del punto d'arrivo, dietro la quale si prenderanno nella tavola delle latitudini crescenti i valori di L', L, ed in seguito si troverà $m' - m$.

Queste equazioni si costruiscono facilmente sopra le carte nautiche di Mercatore, chiamate anche *carte ridotte*, nelle quali i meridiani sono paralelli fra loro, e perpendicolari all'equatore, e però in esse i gradi dei paralelli sono costanti; ma in compenso le loro distanze dall'equatore si fanno aumentare, cangiando ogni latitudine geografica nella sua latitudine crescente. La loxodrimia tagliando i meridiani ad angolo costante, vi è rappresentata da una linea retta, e però facilissima cosa è il tracciare in esse la linea che il naviglio percorre. Se durante il viaggio si cambierà l'angolo i, si stimerà ad ogni cambiamento di rombo il viaggio V, e quindi dietro le equazioni superiori si calcolerà il viaggio in latitudine ed in longitudine per ciascheduno; la somma algebrica di tutti i risultamenti parziali in una stessa direzione darà il viaggio totale.

484. *Coroll.* Per i minori corsi, come accade nelle navigazioni che fannosi nel mare Mediterraneo, può avérsi il viaggio in latitudine ed in longitudine dalle due equazioni

$$l' - l = V \cos i; \quad m' - m = V \,\text{sen}\, i \sec \tfrac{1}{2}(l + l');$$

la seconda delle quali si ottiene integrando l'equazione $d\mu \cos\lambda = d\nu \,\text{sen}\, i$, nel supposto di λ costante ed uguale alla latitudine media fra il punto di arrivo e di partenza. A queste formule si appoggia l'uso delle *carte piatte*, nelle quali i meridiani sono paralelli e divisi in gradi di lunghezza uguale a quella del globo; i gradi dei paralelli si assumono tutti uguali al grado del paralello medio della carta.

485. *Investigare il rapporto che hanno fra loro gli errori della longitudine, latitudine e rombo del vento i.*

Le equazioni del § precedente condurrebbero al vero valore di m' ed l', se V ed i potessero osservarsi accuratamente; ma d'ordinario queste quantità non possono che stimarsi grossolanamente, e quindi riusciranno anche l' ed m' male determinate, e perciò appellansi *posizioni stimate*. Vedremo in appresso essere molto più facile determinare l' con le osservazioni astronomiche, di quello che m'. L'errore nell'angolo i dipende per lo più dall'errore della declinazione magnetica supposta, la quale agevolmente si trae dall'osservazione dell'azimut del Sole o di un astro dato (§ 481). Ma dati i veri valori di i, l', che suppongo rappresentati da $i + di$, $l' + dl'$, si troverà il vero valore di m', che porrò $= m' + dm'$. In fatti riprendasi l'equazione (2), e si differenzi nella supposizione di m', i, l' variabili, ed l costante. Si troverà, dietro facili riduzioni,

$$dm' = \frac{(m' - m)\, di}{\text{sen}\, i \cos i} + \frac{\text{tang}\, i\, dl'}{\cos l'}.$$

Nel calcolare il secondo membro di questa equazione, supponendo di, dl' dati in minuti di grado, ed $m' - m$ pure dato in minuti dalla stima precedente, si dovrà per l'omogeneità dividere $m' - m$ per il numero dei minuti contenuti nel raggio, o ciò che torna lo stesso, si moltiplicherà per 0,000291. Così la correzione della longitudine sarà data da

$$dm' = \frac{0,000291\,(m' - m)}{\text{sen}\, i \cos i}\, di + \frac{\text{tang}\, i}{\cos l'}\, dl' \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Descrizione dell' ottante di Hadley; sue verificazioni.

486. La continua agitazione della nave in mare rende impossibile l'uso degli stromenti ordinarj d'Astronomia, la posizione dei quali rapporto all'orizzonte viene esplorata mediante un livello a bolla d'aria, o mediante un filo a piombo. Hanno perciò i marinari ricorso ad altri stromenti per determinare le elevazioni degli astri sopra l'orizzonte, e le loro scambievoli distanze angolari, fra i quali descriveremo soltanto quello più usitato ai nostri giorni, come di gran lunga più esatto di tutti gli altri antichi stromenti, voglio dire l'*ottante a riflessione* immaginato dal signor Hadley nel 1721, al quale si può sostituire con vantaggio soltanto il *circolo di riflessione*, di cui si potrà vedere la descrizione nella eccellente Dissertazione del sig. Borda che ha per titolo: *Description et usage du cercle de reflexion; Paris* 1787, dove si troveranno inoltre tutti i suoi usi esposti con molta chiarezza, ed illustrati con esempj diversi relativi a tutte le operazioni occorrenti nei lunghi viaggi marittimi.

Per ben comprendere la descrizione di questa macchina è necessario di esporre una notissima proprietà degli specchi piani. Sieno due specchi piani verticalmente eretti sopra le linee DKE, BAC (*Fig.* 54), ed un raggio di luce emanato dall'oggetto S percuota in A lo specchio BC, sicchè venga da esso rimandato con un angolo di riflessione KAC uguale all'angolo d'incidenza SAB all'altro specchio in K, e da questo all'occhio situato in O lungo KO per modo che sia $OKE = AKD$.

Ruoti ora lo specchio BC intorno al punto A di un angolo $GAC = i$, di modo che prenda la posizione FAG richiesta, perchè il raggio di luce emanato dall'oggetto S' possa giungere all'occhio O per la strada $S'AKO$. Sarà sempre l'angolo $S'AS = 2GAC = 2i$. In fatti, a motivo degli angoli $KAC = SAB$, $KAG = S'AF = KAC - i$, avremo evidentemente $KAS + 2KAC = 180°$; $KAS + SAS' + 2KAC - 2i = 180°$; donde tosto si deduce $SAS' = 2i$.

Si deduce da questa proprietà che se la disposizione degli specchi è tale che l'occhio situato in O possa vedere lungo OK l'oggetto S, affinchè veda un oggetto S' conviene far ruotare intorno ad A lo specchio BC di un angolo GAC, che sia la metà di SAS'.

487. Posto ciò, ecco la descrizione degli ottanti e dei sestanti a riflessione. L'arco BC (*Fig.* 55) rappresenta l'ottava parte di un circolo divisa in 90 parti uguali, o la sesta parte divisa in 120 parti che si prendono per gradi. AD un raggio mobile, il quale porta in D il nonio, od anche le trasversali per suddividere i gradi in minuti e mezzi minuti. Al centro A dell'arco BC erigesi uno specchietto piano perpendicolare al piano del circolo, ed essendo fissato sul raggio mobile AD può prendere qualunque movimento angolare intorno al centro. Ad una certa distanza AF nel raggio AB erigesi perpendicolare al piano dello stromento un altro specchio piano F di cristallo, la cui metà inferiore è rivestita di una lamina di stagno e riflette i raggi di luce, e la parte superiore è diafana, e lascia loro libero il passaggio. In O si fissa un traguardo o cannocchiale coll'asse parallelo al piano dello stromento, il cui prolungamento passa per la linea che separa nello specchio F la parte ricoperta dalla parte diafana, e serve a vedere tanto gli oggetti diretti attraverso la parte superiore di F, quanto le immagini riflesse dalla sua parte inferiore. La disposizione degli specchi è tale che venendo il raggio AD ricondotto in AC sul principio della numerazione, i loro piani sono esattamente paralelli.

Se pertanto riconducasi il raggio AD in AC si guarderà un oggetto H molto lontano, i raggi di luce da esso verranno in direzioni paralelle HA, HFO. Il raggio HA rimandato allo specchio F di-

pingerà nella sua parte inferiore l'immagine di H, la quale veduta da O lungo il raggio OF paralello ad HA sembrerà coincidere coll'oggetto stesso veduto direttamente da O per la parte superiore, trascurando la picciola differenza prodotta dalla distanza FA dei due specchj impercettibile all'occhio.

Conducasi ora il raggio mobile nella posizione AD. Lo specchio A avendo ruotato di un angolo DAC, verrà da esso condotta sullo specchio F l'immagine riflessa di un oggetto S tale che l'angolo HAS sia $= 2\,DAC$; e siccome l'arco DC è stato diviso in un numero di parti doppio del numero dei gradi contenuti in DC, le parti scolpite sulla macchina daranno la misura dell'angolo HAS. Risulta da ciò che se rivolgasi lo stromento in modo che col cannocchiale O attraverso la parte superiore F vedasi direttamente l'oggetto H in contatto con l'immagine di un altro oggetto S formata dai due specchj A, F, sarà DAC la misura dell'angolo HAS.

488. Questo stromento è opportunissimo per osservare in alto mare l'altezza del Sole o di un astro sopra l'orizzonte apparente, e la distanza di una stella dal lembo della Luna. Se trattisi di osservare l'altezza del centro del Sole, si rivolgerà la macchina nel verticale condotto per il Sole in modo da vedere direttamente l'orizzonte; quindi guidasi il raggio mobile AD in tal posizione che l'immagine del Sole discenda all'orizzonte, ed allora coi piccioli movimenti procurati dall'artefice in AD si porrà in contatto la linea che sembra separare l'orizzonte dal cielo con uno dei lembi del Sole, e si otterrà l'altezza di questo sopra lo stesso orizzonte apparente, alla quale applicando il semidiametro solare si avrà l'altezza del centro. Del pari per ottenere la distanza di una stella dal centro della Luna, si dispone lo stromento nel piano che passa per l'occhio, per la Luna e per l'astro, e si gira il raggio AD finchè l'astro a ponente comparisca in contatto nello specchio F coll'astro veduto direttamente a levante; posti a contatto il lembo della Luna colla stella, si applicherà alla distanza osservata il semidiametro, e si avrà la distanza apparente della stella dal centro della Luna. Qui poi conviene procurare che il piano condotto per l'asse del traguardo o cannocchiale, e per il raggio tirato al punto di contatto sia paralello al piano dello stromento, al quale oggetto si dispone nel foco dell'oculare un filo a questo stesso piano paralello, sul quale si ha cura di stabilire il contatto.

489. Prima di accingersi ad osservare col mezzo del sestante a riflessione conviene verificare la posizione degli specchj. Suppone la teoria di questo stromento: 1.° che i due specchj F, A sieno perpendicolari al piano del sestante; 2.° che condotto il raggio AD in o° le loro superficie sieno paralelle; 3.° che gli specchi sieno perfettamente piani, e le loro superficie anteriore e posteriore paralelle, se pure sono di cristallo.

Per esplorare se lo specchio F sia perpendicolare al piano dell'arco ABC, si appoggi la macchina sopra un piano orizzontale, e rivolgendosi in disparte si guardi l'immagine diretta dell'orizzonte per la sua parte diafana, e l'immagine riflessa formata nella sua parte stagnata; se formeranno una linea continuata, sarà il piano di questo specchio perpendicolare ad ABC; in caso diverso si muoveranno le viti che lo sostengono finochè vi si riduca. Tenendo in seguito lo stromento in un piano verticale, si ponga il raggio mobile AD in o°, e si guardi per O l'orizzonte. Se l'immagine dallo specchio A riflessa in F apparisca paralella all'immagine diretta veduta per la sua parte diafana, sarà A perpendicolare al piano dello stromento; e, se inoltre sembrerà quella formare una sola linea continuata con questa, i piani dei due specchj A, F saranno allora paralelli. In caso diverso vi si ridurranno coi movimenti che procurano loro gli artefici.

Accade spesse volte che condotto AD in o° le immagini diretta e riflessa dell'orizzonte non formino una linea continuata; allora i due specchj essendo perpendicolari allo stromento non sono paralelli, ed invece di alterare la loro posizione, si muove AD, finchè appariscano le due immagini in linea retta, o meglio ancora si fissa un oggetto deciso e lontano, e si muove AD finchè l'immagine diretta e riflessa coincidano. Il punto m, in cui dovrassi fermare, è quello ove dovrebbe scriversi o°; e per conseguenza a tutti gli angoli letti nella macchina, ove o° sia scritto per esempio in C dovrà applicarsi la correzione Cm, alla quale dassi il nome di *errore della linea di fiducia*, o del *principio di numerazione*.

Si può anche con vantaggio adoperare il seguente metodo per rendere lo specchio A perpendicolare al piano dello stromento. Si disponga il raggio mobile AD verso la metà di BC. Quindi ritirandosi verso S si osservi dentro A; vi si scorgerà l'immagine di BD, la quale se apparirà in continuazione del rimanente arco DC veduto direttamente, sarà A perpendicolare al piano ABC. Assicurata la posizione di A, si esplorerà quella di F, come sopra abbiamo indicato.

Rimane a vedere se le superficie degli specchj sieno paralelle. Il mezzo più sicuro per questa verificazione è la misura di varj angoli con lo stromento, i quali sieno stati già precedentemente misurati con un circolo, o con un grafometro. Se non si riscontreranno quali devono essere, si faranno di nuovo lavorare gli specchj, ovvero si costruirà una tavola degli errori di grado in grado, o di 5° in 5°, col mezzo della quale si correggeranno in seguito gli angoli misurati in mare.

490. Quando un sestante sia stato opportunamente verificato può con sommo vantaggio adoperarsi a misurare le altezze degli astri, e le loro distanze scambievoli non solo in mare, ma anche in terra. Ab-

biamo già indicato di sopra come si misurino le altezze sopra l'orizzonte apparente del mare. Resta che esponiamo le correzioni che loro devonsi applicare per ridurle all'orizzonte vero.

Sia MAB (*Fig.* 56) il globo terrestre il cui centro sia C; Z il zenit del naviglio posto in A; AR rappresenti l'orizzonte vero, ed essendo l'occhio situato in T, la tangente TB ruotando attorno TC produce l'orizzonte apparente, mentre TR' paralella ad AR rappresenta l'orizzonte vero, e tutte le altezze misurate sono maggiori delle vere dell'angolo BTR', che rappresenta l'inclinazione dell'orizzonte apparente all'orizzonte vero. Se pongasi l'elevazione dell'occhio AT sopra il mare $= e$, CB (raggio della terra) $= r$, $BTR' = i$, a motivo di $CBT = CAR = CTR' = 90°$, avremo $CTB = 90° - i$; e però dal triangolo rettangolo CBT si avrà $\cos i = \frac{r}{r+e}$, donde si ottiene $1 - \cos i = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i = \frac{e}{r+e}$, e quindi $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} i = \sqrt{\left(\frac{2e}{r+e}\right)}$. Essendo e quantità molto picciola in confronto di r, sarà i un picciolo angolo, in luogo del quale si potrà scrivere il suo seno; trascurando poi nel denominatore della frazione precedente e in confronto di r, e riducendo il secondo membro a secondi si avrà $i = R'' \sqrt{\frac{2}{r}} \sqrt{e}$. Il coefficiente $R'' \sqrt{\frac{2}{r}}$ è costante, e varia solo coll'unità di misura lineare. Così prendendo per unità di misura il metro, la tesa ed il piede di Parigi troveremo respettivamente le seguenti espressioni per il calcolo di i,

$$i = 115'',61 \sqrt{e^m} = 161'',40 \sqrt{e^t} = 65'',90 \sqrt{e^p}.$$

Suppongono queste formule che il raggio luminoso $T'B$ nel passaggio dal punto B al punto T proceda in linea retta, o in altri termini incontri strati aerei di densità costante. Ora ciò non accade realmente, e se si aspiri a tutta l'esattezza si dovrà diminuire l'angolo i della quantità di cui la rifrazione terrestre sembra elevare il punto B, la qual correzione dietro molte osservazioni si fissa ad un settimo del totale, e secondo il signor De-Lambre è $= 0,0783$. Quindi moltiplicando i coefficienti precedenti per $1 - 0,0783$ si avranno le formule vere, sulle quali si dovrà calcolare i, che trovasi ridotto in tavole per ogni elevazione nei libri di nautica, ove però d'ordinario trascurasi la correzione dovuta alla rifrazione.

491. Può con sommo vantaggio adoperarsi il sestante a riflessione anche in terra per determinare le altezze degli astri, ed essendo uno stromento di poco prezzo e di facile trasporto, resosi comune, può essere alla Geografia di grande utilità, mentre coll'osservazione delle

altezze meridiane del Sole o delle principali stelle si ottiene la latitudine geografica con più precisione che far non si suole ai più alti gnomoni. Essendo però l'orizzonte a terra sempre impedito da alberi, colline, fabbriche od altri ostacoli, non si può far collimare l'immagine riflessa del Sole e degli astri direttamente coll'orizzonte, e perciò si fa uso del seguente semplicissimo apparato.

In una vasca rettangolare MN (*Fig.* 57) internamente colorita di nero si versa del mercurio o dell'olio fino all'altezza MA. Disponendosi la sua superficie superiore in un piano orizzontale, se si espone al Sole S, vi si vede quest'astro riferito in S' per modo che l'angolo $MQS' = MQS$. Se adunque stando in B si conduce col mezzo del sestante l'immagine riflessa del Sole S in contatto dell'immagine S', l'angolo indicato dallo stromento sarà doppio della cercata altezza sopra l'orizzonte, e diviso per metà darà l'altezza, dalla quale dedurrassi poi l'altezza vera applicandogli la rifrazione e la paralasse. Egli è poi chiaro che messo in contatto il lembo inferiore del Sole col superiore dell'immagine S' si avrà l'altezza del lembo inferiore, a cui si aggiungerà il semidiametro per avere quella del centro. Quello che dicesi del Sole dovrà intendersi della Luna, e di una stella qualunque.

Il più leggero movimento di aria fa prendere delle ondulazioni alla superficie MA, e quindi anche all'immagine S', donde accade che difficilmente possa giudicarsi del contatto. Per riparare a questo inconveniente si ricuopre con una lastra di cristallo a superficie piane e paralelle la vasca, e l'osservazione in seguito non ha difficoltà. Bisogna però bene assicurarsi del paralellismo delle due superficie, altrimenti gli angoli MQS', MQS non risulterebbero uguali. Si fabbricano ancora gli orizzonti artificiali con uno specchio perfettamente piano, la cui superficie rendesi orizzontale mediante l'uso di un livello a bolla d'aria. Il loro uso è lo stesso di quello ad olio o mercurio sopra descritto.

Esposizione dei metodi che si praticano in mare per determinare il tempo vero del vascello, e la sua latitudine.

492. Dopo di avere esposto con quai metodi si stimi la posizione geografica di un naviglio dietro la stima della sua velocità e della sua direzione, richiede l'ordine che si tratti del modo di rettificare con le osservazioni astronomiche gli errori che possono essersi commessi in quelle determinazioni di lor natura grossolane. Supporremo pertanto l'osservatore provedito di un sestante, od anche meglio di un circolo intero a riflessione ben rettificato, e di più di un cronometro a secondi, il cui movimento sia mantenuto dall'azione di una molla, e

venga questo sospeso intorno ad un' asse orizzontale dentro una cassetta, affinchè la continua agitazione del vascello non ne alteri la regolarità, e per maggiore semplicità fingeremo questo cronometro regolato sul tempo siderale, qualora osservare si vogliano le stelle fisse, e sul tempo medio se le osservazioni si riferiscano al Sole. Tali cronometri a compensazione, conosciuti sotto il nome di *orologi nautici*, si possono dai più riputati artefici ai nostri giorni ottenere costruiti con tanta cura che il loro movimento anche nei più lunghi viaggi attorno al globo non sia notabilmente alterato, e perciò ben si comprende che per l'intervallo di poche ore o di un giorno si può assumere il loro moto del tutto regolare. In tal guisa osservando le altezze del Sole o di un altro astro si potrà unirvi eziandio l'osservazione del tempo che contasi sull'orologio nautico, quando ciò sia necessario.

493. Ciò premesso, principiamo dal ricercare in quali circostanze sia più vantaggioso fare l'osservazione di un astro per determinare il tempo e la latitudine geografica sul naviglio, affinchè gli errori delle osservazioni abbiano nei risultamenti la minore influenza.

Rappresenti (*Fig.* 39) ACB l'orizzonte, APB il meridiano del naviglio, il cui zenit sia in Z; P sia il polo, ed un astro in virtù del suo moto diurno sia giunto in M ad un'altezza h sopra l'orizzonte. Indicando per δ la declinazione dell'astro, per l la latitudine, sarà $ZM = 90 - h$, $PM = 90 - \delta$, $PZ = 90 - l$, ed inoltre gli angoli del triangolo in Z ed in P sieno $= Z$, $= P$. Sieno dh, dl, dP le variazioni degli elementi h, l, P. Dietro le relazioni differenziali della Trigonometria, osservando che $d\delta = 0$, avremo

$$dh = \cos Z\, dl - \cos l \operatorname{sen} Z\, dP \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

dalla quale dedurremo le seguenti importantissime conseguenze.

1.° Supponendo le altezze bene osservate ed immuni da errore avremo $dh = 0$, e però $\cos Z\, dl = \cos l \operatorname{sen} Z\, dP$. Quindi se $Z = 90°$, sarà $dP = 0$, e perciò il tempo ricavato dall'osservazione dell'altezza di un astro, mentre il suo azimut è $= \pm 90°$ riesce determinato con esattezza, anche se siavi un errore grossolano nella stima della latitudine. In generale sarà sempre vantaggioso determinare l'angolo orario P, e quindi il tempo a bordo del naviglio coll'osservazione dell'altezza di un astro situato verso il primo verticale, affinchè l'errore commesso nella stima della latitudine abbia nel risultamento la minima influenza.

2.° Viceversa se sia $Z = 0$, sarà (qualunque sia dP) $dl = 0$, e perciò anche supponendo il tempo erroneo, la latitudine riuscirà bene determinata con le osservazioni delle altezze meridiane degli astri, e se sia Z molto picciolo, sicchè l'astro osservato sia nelle vicinanze del meridiano, l'errore commesso nella stima del tempo non avrà al-

lora sensibile influenza nella latitudine dedotta dalle altezze di un astro di nota declinazione. Premesse queste cose raccoglieremo nei seguenti problemi le regole per determinare il tempo vero e la latitudine geografica del vascello.

Problema I. Determinare l' errore dell' orologio a bordo del vascello.

494. Si osservi l' altezza apparente di un astro ben conosciuto, ed il tempo indicato dall' orologio nautico, mentre trovasi nelle vicinanze del primo verticale; si corregga l' altezza osservata dall' effetto della rifrazione, e dalla inclinazione dell' orizzonte apparente rapporto all' orizzonte vero. Quindi pongasi il complemento dell' altezza vera dell' astro $= h'$; il complemento della declinazione calcolata $= \delta'$, il complemento della latitudine stimata $= l'$, l' angolo orario dell' astro per l' istante dell' osservazione $= P$. In seguito si faccia $\frac{1}{2}(l' + h' + \delta') = p$. Per le formule del § 21 si avrà P dalle equazioni

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p - l')\,\text{sen}\,(p - \delta')}{\text{sen}\,l'\,\text{sen}\,\delta'}}\,;\quad \cos\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p - h')}{\text{sen}\,l'\,\text{sen}\,\delta'}}\,,$$

la coincidenza delle quali farà fede dell' esattezza del calcolo.

Trovato P, si riduca in tempo, e si aggiunga all' AR ridotta in tempo, o da quella si tolga, secondo che l' astro ha passato il meridiano, o non vi è giunto; si avrà il tempo siderale dall' osservazione, che confrontato con quello dell' orologio, darà il cercato errore. Se trattasi del Sole, si aggiunga a 0^h, o si tolga da 24^h, e si avrà il tempo vero dell' osservazione, che ridurrassi poi in tempo medio, e si confronterà con quello indicato dall' orologio per ottenere l' errore del medesimo, supposto che fosse regolato al tempo medio. Questa differenza presa in modo, che aggiunta col suo segno al tempo dell' orologio porga il tempo che dovrebbe indicare, si chiamerà *equazione dell' orologio*.

495. *Scolio*. Muovendosi il vascello continuamente sopra la superficie del mare passa ad ogni istante sotto un diverso meridiano, ed in conseguenza l' equazione dell' orologio nautico varia ad ogni istante. Se però sia essa stata determinata una volta nel giorno, si potrà avere con sufficiente precisione il suo valore per qualunque altra ora, purchè si tenga conto del moto del vascello in longitudine dopo l' istante dell' osservazione astronomica stimandolo coi metodi dei §§ 482 e seg. Sia in fatti E l' equazione addittiva dell' orologio, ed α il cambiamento in longitudine dopo il tempo dell' osservazione: la sua vera equazione sarà $= E \pm \frac{1}{15}\alpha$, valendo il segno $+$ se il vascello si è trasportato ad oriente, ed il segno $-$ se trasportasi ad occidente.

Problema II. Determinare colle osservazioni meridiane del Sole, o di una data stella la latitudine geografica del vascello.

496. Qualora coi precetti precedenti siasi determinata l'equazione dell'orologio nautico, si calcoli il passaggio del Sole o di un astro conosciuto per il meridiano del naviglio; si osservi la sua altezza sopra l'orizzonte apparente mentre passa per il meridiano, e da essa poscia deducasi l'altezza vera, il cui complemento darà la sua distanza vera dal zenit. Quindi coll'ajuto della sua declinazione calcolata per il medesimo tempo si dedurrà la latitudine dietro i precetti del § 19.

Siccome nelle vicinanze del meridiano il paralello percorso dall'astro sensibilmente si confonde col paralello all'orizzonte, la sua altezza sensibilmente non varia per qualche minuto avanti e dopo il passaggio per il meridiano. In conseguenza si potrà prendere il medio di tutte le altezze osservate nei cinque minuti precedenti e seguenti il passaggio medesimo per togliere l'influenza dei piccioli errori delle osservazioni.

497. *Scolio*. Può sovente accadere che le nubi od altre circostanze impediscano di osservare l'altezza nel meridiano precisamente. In allora se la differenza fra il tempo dell'osservazione ed il passaggio per il meridiano sia di pochi minuti, per esempio non maggiore di 20′ o 30′, si aggiungerà all'altezza osservata l'incremento che sarà per acquistare fino al meridiano, e si farà uso dell'altezza così corretta, come se fosse stata direttamente osservata. Un tale incremento poi si calcolerà dietro l'equazione (a) che abbiamo riferita al § 49 per ricondurre al meridiano le osservazioni delle distanze dal zenit prese col circolo moltiplicatore in vicinanza del medesimo. Siccome nelle osservazioni nautiche non si può aspirare a tutta la precisione, così il solo suo primo termine sarà sufficiente, se anche l'angolo orario P giunga ai 30′ di tempo.

Problema III. Date le AR e declinazioni di due astri, le loro altezze osservate e ridotte all'orizzonte vero insieme con la differenza dei tempi indicati dall'orologio nautico fra la prima e seconda osservazione, si domanda la latitudine del vascello e l'equazione dell'orologio.

498. Sia per l'astro più vicino al meridiano l'altezza osservata e ridotta all'orizzonte vero $= h$, la declinazione data dalle tavole $= \delta$, la sua AR in tempo $= a$, il tempo sidereo della prima osservazione $= s$, l'angolo orario $= P$, e supponiamo che le stesse lettere con un accento sieno relative all'astro più lontano dal meridiano. Inoltre supponiamo che l'orologio nautico siderale segni nella prima osservazione un numero di ore espresso da t, e nella seconda da $t + \theta$, cosicchè sia θ l'intervallo siderale ben conosciuto, e siasi il vascello avanzato in latitudine verso il settentrione di una quantità espressa da α, ed in longitudine verso oriente da β; per ultimo sia l la cercata latitudine nella prima osservazione, cosicchè nella seconda sia $= l + \alpha$.

Egli è palese che sarà $P = 15\,(s - a)$, $s' = s + \theta + \frac{1}{15}\beta$, $P' = 15\,(s' - a') = 15\,(s + \theta - a') + \beta$.

Poste queste cose, i due triangoli formati al zenit, al polo dell'equatore, ed a ciascuno dei punti occupati dai due astri danno le due seguenti equazioni (§ 20)

$$\text{sen}\, h = \text{sen}\, l\, \text{sen}\, \delta + \cos l \cos \delta \cos P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{sen}\, h' = \text{sen}\,(l + \alpha)\, \text{sen}\, \delta' + \cos (l + \alpha) \cos \delta' \cos P' \quad . \quad (2)$$

e se in queste s'introducano per P e P' i loro valori esse non conterranno più che due incognite l, s, le quali in conseguenza si potranno sempre da esse dedurre risolvendole o direttamente, o con le false posizioni. La soluzione diretta è alquanto laboriosa, e perciò noi qui ci atterremo alla seguente soluzione indiretta che illustreremo con un esempio a comodo dei giovani principianti.

Dietro la latitudine stimata si calcoli l'angolo orario P' per l'istante della osservazione più lontana dal meridiano coi precetti del § 494, e sebbene possa la latitudine essere sottoposta a qualche leggero cambiamento, l'errore che ne risulterà in P' sarà tanto minore, quanto più vicino al primo verticale era allora l'astro osservato. Ottenuto P', si avrà il tempo sidereo s per la prima osservazione dall'equazione

$$s = \tfrac{1}{15}\,(P' - \beta) + a' - \theta \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

e quindi tosto si avrà l'angolo orario P per la prima osservazione. Quando siasi ricavato il valore di P, dall'equazione (1) si troverà la latitudine l mediante le seguenti equazioni

$$\text{tang}\, \varphi = \cos P \cot \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\text{sen}\,(l + \varphi) = \frac{\cos \varphi\, \text{sen}\, h}{\text{sen}\, \delta} = \frac{\text{sen}\, h\, \text{sen}\, \varphi}{\cos \delta \cos P} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Se il valore di l ottenuto da questa equazione coincide con quello stimato da cui si parte, nulla vi sarà da cambiare al risultamento. In caso diverso si riprincipierà un nuovo calcolo, ritenendo l'ultimo valore di l, e calcolando con questo P', indi P, si troverà un valore di l più esatto del precedente, a cui con una terza ripetizione non si avrà d'ordinario nulla da aggiungere.

499. *Scolio*. Il signor Borda prescrive una regola per la soluzione di questo problema, la quale riducendo i tentativi a due soli, e ad una semplice interpolazione, riesce molto comoda, e perciò non sarà inutile di qui dimostrarla. Sia l la latitudine stimata nella prima osservazione, ed $l + \alpha$ sarà la latitudine stimata nella seconda osservazione. Ricercando con questo valore dalla seconda osservazione l'angolo P', supponiamo che per l'epoca della prima osservazione si trovi una latitudine l', ed un tempo siderale σ. Sia la vera latitudine nella prima osservazione $= l''$, e pongasi $l'' = l + d\,l = l' + d\,l'$. Sia $d\,\sigma$ la correzione del tempo siderale, e sarà $d\,P = d\,P' = 15\, d\,\sigma$. Se

supponiamo le altezze immuni da errori, l'equazione (A) § 451 darà $\cos Z' d l - \cos l \operatorname{sen} Z' 15 d\sigma = 0$, $\cos Z d l' - \cos l' \operatorname{sen} Z 15 d\sigma = 0$, Z, Z' indicando gli azimut valutati dal nord nella prima e seconda osservazione. Se ora da queste due equazioni si elimini $d\sigma$, e si ponga $\cos l = \cos l'$, perchè l, l' differiscono di quantità di primo ordine, avremo $d l \operatorname{tang} Z = d l' \operatorname{tang} Z'$, donde si ha $d l : d l' :: \operatorname{tang} Z' : \operatorname{tang} Z$.

Si faccia ora una seconda ipotesi, in cui fingasi una latitudine per la prima osservazione $= \lambda$ diversa da l di 10′, ovvero 20′. Con la latitudine $\lambda + \alpha$ dalla seconda osservazione si calcoli il tempo sidereo, ed indi la nuova latitudine dedotta dalla prima osservazione sia $= \lambda'$. Sieno $d\lambda$, $d\lambda'$ le correzioni di λ e λ', cosicchè sia $l'' = \lambda + d\lambda = \lambda' + d\lambda'$. Fra le correzioni $d\lambda$, $d\lambda'$ regnerà come sopra la seguente proporzione $d\lambda : d\lambda' :: \operatorname{tang} Z' : \operatorname{tang} Z$. Queste due proporzioni porgono la seguente $d l : d l' :: d\lambda : d\lambda'$, la quale equivale ad $l'' - l : l'' - l' :: l'' - \lambda : l'' - \lambda'$. Se ora si moltiplichino gli estremi ed i medj, e si ricavi il valore di l'', si otterrà

$$l'' = \frac{\lambda l' - \lambda' l}{(l' - l) - (\lambda' - \lambda)} = l + \frac{(l' - l)(\lambda - l)}{l' - l - (\lambda' - \lambda)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

la quale porge la correzione della latitudine stimata l nell'ultimo termine del secondo membro, come si ottiene dalla regola del signor Borda ridotta in formule (*Description et usage etc.* pag. 49).

500. *Esempio.* Li 2 Aprile 1787 in una longitudine stimata di 40° all'occidente di Parigi, e sotto una latitudine boreale di 33° 13′ si osservarono due altezze del Sole. I dati dell'osservazione sono i seguenti:

1.ª Osservazione, 0^h 22′ 39″ orologio nautico sul tempo vero; l'altezza del centro del Sole, fatte tutte le correzioni, si trovò = 61° 1′ 0″.

2.ª Osservazione, 3^h 10′ 31″ dello stesso orologio. Altezza del centro ☉ = 37° 6′ 0″.

Fra la prima e la seconda osservazione il vascello si è avanzato di 9′ verso il mezzodì, e di 7′ verso occidente, cosicchè $\alpha = -9'$, $\beta = -7'$. Qui abbiamo $h = 61° 1' 0''$, $h' = 37° 6' 0''$, $\theta = 2^h 47' 52''$, ed in gradi $15\theta = 41° 58' 0''$. Le declinazioni del Sole calcolate dalla *Connais. des tems* di quell'anno per il meridiano del naviglio danno $\delta = +5° 3' 15''$, $\delta' = +5° 6' 0''$. Il calcolo delle *AR* è inutile, perchè si tratta dello stesso astro, e l'orologio è regolato sul tempo vero.

Con questi dati io calcolo l'angolo orario P' per la seconda osservazione nelle due seguenti ipotesi

	I. ipotesi	II. ipotesi
	$l = 33^\circ\ 13'\ 0''$	$\lambda = 33^\circ\ 23'\ 0''$
latitudine del vascello $l + \alpha =$	$33\ \ 4\ \ 0$	$\lambda + \alpha = 33\ \ 14\ \ 0$
comp. di latitudine . . . . $L' =$	$56\ \ 56\ \ 0$	$= 56\ \ 46\ \ 0$
comp. di decl. ☉ . . . . $\Delta' =$	$84\ \ 54\ \ 0$	$= 84\ \ 54\ \ 0$
comp. di alt. oss. ☉ . . . $H' =$	$52\ \ 54\ \ 0$	$= 52\ \ 54\ \ 0$
mezza somma . . . . . $p' =$	$97\ \ 22\ \ 0$	$= 97\ \ 17\ \ 0$
$p' - L' =$	$40\ \ 26\ \ 0$	$= 40\ \ 31\ \ 0$
$p' - \Delta' =$	$12\ \ 28\ \ 0$	$= 12\ \ 23\ \ 0$
log sen $(p' - L') =$	$9,8119521$	$= 9,8126923$
log sen $(p' - \Delta') =$	$9,3341955$	$= 9,3313285$
c. l. sen $L' =$	$0,0767372$	$= 0,0775623$
c. l. sen $\Delta' =$	$0,0017228$	$= 0,0017228$
l. sen² $\frac{1}{2} P' =$	$19,2246076$	$= 19,2233059$
l. sen $\frac{1}{2} P' =$	$9,6123038$	$= 9,6116530$
$\frac{1}{2} P' =$	$24^\circ\ 10'\ 35''$	$= 24^\circ\ 8'\ 16''$
$P' =$	$48\ \ 21\ \ 10$	$= 48\ \ 16\ \ 32$
$-15\ \theta =$	$-41\ \ 58\ \ 0$	$= -41\ \ 58\ \ 0$
$-\beta =$	$+\ 0\ \ 7\ \ 0$	$= +\ 0\ \ 7\ \ 0$
somma $= P =$	$+\ 6\ \ 30\ \ 10$	$= +\ 6\ \ 25\ \ 32$
l. cos $P =$	$9,9971969$	$= 9,9972632$
l. cot $\delta =$	$1,0533446$	$= 1,0533446$

l. tang $\varphi = 1,0505415$; $\varphi = 84^\circ\ 54'\ 48''$; $= 1,0506078$; $\varphi = 84^\circ\ 54'\ 50''$.

Per continuare ora il calcolo preferisco l'equazione $\text{sen}\,(l' + \varphi) = \frac{\text{sen}\,h\ \text{sen}\,\varphi}{\cos\delta\ \cos P}$ perchè in questo caso nell'altra espressione il denominatore e numeratore divengono troppo piccioli, e perciò un leggero errore in φ o δ diviene troppo sensibile nell'arco $l' + \varphi$.

I. ipotesi	II. ipotesi
log sen $h = 9,9418893$	$= 9,9418893$
log sen $\varphi = 9,9982863$	$= 9,9982866$
c. l. cos $\delta = 0,0016919$	$= 0,0016919$
c. l. cos $P = 0,0028031$	$= 0,0027368$
l. sen $(l' + \varphi) = 9,9446706$	l. sen $(\lambda' + \varphi) = 9,9446046$

$l' + \varphi =$	118°	18′	42″	$\lambda' + \varphi =$ 118° 19′ 40″	
$\varphi =$	84	54	48	$\varphi =$ 84 54 50	
$l' =$	33	23	54	$\lambda' =$ 33 24 50	
suppos. $l =$	33	13	0	$\lambda =$ 33 23 0	
$l' - l =$		10	54	$\lambda' - \lambda =$ 1 50	

Donde deducesi $l'' = l + \frac{(\lambda - l)(l' - l)}{l' - l - (\lambda' - \lambda)} = l + 12' 1'',3$, e però la vera latitudine = 33° 25′ 1″ bor.

Si troverà l'angolo orario P, osservando che se l'aumento di 10′ in l dalla prima alla seconda ipotesi dà in P una diminuzione di 4′ 38″, un aumento di 12′ 1″,3 darà la diminuzione di 5′ 34″,2. Però si avrà

$P = 6° 30' 10'' - 5' 34'' = 6° 24' 36''$, ed in tempo $= 0^h 25' 38'',4$
tempo segnato dall'orologio . . . . . $= 0\ 22\ 39,0$

equazione dell'orologio . . . . . $= +\ 2\ 59,4$

Dei metodi che si praticano in mare per determinare la longitudine geografica del vascello.

501. La ricerca delle longitudini in alto mare ha nei secoli precedenti esercitato moltissimo gli Astronomi ed i Geometri, ed in questa vista sono stati intrapresi tutti gli spinosi calcoli che hanno servito a ridurre all'ultimo grado di perfezione le tavole della Luna e dei satelliti di Giove. Non ripeteremo qui ciò che intorno al modo di determinare le longitudini geografiche abbiamo detto trattando degli ecclissi di Luna, di Sole, delle occultazioni delle stelle, e degli ecclissi dei satelliti di Giove, potendo ciascheduno consultare i capitoli di questi Elementi ove si trattano questi argomenti; solo a compimento di quanto nei citati luoghi è stato detto aggiungeremo i due metodi seguenti, che sono anche quelli più comunemente messi in opera a bordo dei bastimenti, avvegnachè le osservazioni degli ecclissi di Luna, del Sole e dei satelliti sono sempre difficili a farsi in grazia della continua agitazione dal moto delle onde prodotta nel naviglio.

502. *I. Metodo. Cogli orologj nautici a compensazione.* I celebri orologiaj Berthoud, Emery, Le-Paute, Barwise, Arnauld ed altri sono riusciti a perfezionare talmente i cronometri nautici a compensazione che il loro moto non viene sensibilmente alterato dalle più forti variazioni di temperatura, come abbiamo avvertito anche di sopra. Se adunque abbiasi la fortuna di possedere una di queste preziose

macchine, con leggera fatica si potrà determinare la longitudine del vascello nel modo seguente.

Quando partesi da un porto conosciuto si regoli il cronometro sul tempo medio del primo meridiano, od in generale di un meridiano qualunque che assumesi a termine di confronto. Allora questo cronometro segnerà $0^h\ 0'\ 0''$ tutte le volte che il Sole medio passerà per il primo meridiano, e le altre ore del giorno lette in questo orologio saranno al medesimo relative. In qualunque luogo venga trasportato l'orologio col naviglio, si osservi l'altezza del Sole o di qualunque altro astro ben determinato che trovisi nelle vicinanze del primo verticale. Quindi coi precetti del § 494 si calcoli il tempo vero che al meridiano del bastimento si contava nel momento dell'osservazione, e convertasi in tempo medio; questo tempo confrontato con quello indicato dall'orologio ridotto in gradi a ragione di 15° per *ogni ora* darà la longitudine cercata (§ 184).

Questo metodo, come si vede, è molto pregevole per la sua speditezza, e conduce a risultamenti soddisfacentissimi, specialmente se si abbia cura di verificare l'andamento dell'orologio in tutti i punti ben conosciuti, e di scuoprire in essi la sua equazione rapporto al primo meridiano, dovuta od all'irregolarità del suo moto, od alla sua diurna accelerazione o ritardo sul tempo medio.

503. *II. Metodo. Colle distanze della Luna dal Sole o dalle stelle.* Il metodo più comunemente usato, e che ha apportato alla Nautica ed alla Geografia massimi vantaggi è quello che si fonda sulla misura delle distanze della Luna dal Sole, dalle stelle e dai pianeti. Avendo la Luna un moto rapidissimo in longitudine, è chiaro che la sua distanza da un punto fisso, o da un punto dotato di minore movimento, come il Sole va variando da un istante all'altro con tale rapidità che in due minuti di tempo cambj circa un minuto di arco. Egli è palese pertanto che se a bordo del bastimento si osserva la distanza apparente della Luna dal Sole o da una stella, e se ne deduce poi la distanza vera veduta dal centro della terra *insieme* col tempo che contavasi al meridiano del vascello; quindi se sotto un dato meridiano, per esempio sotto quello di Londra o di Parigi, col mezzo delle tavole astronomiche, si calcola il tempo in cui ebbe luogo la stessa distanza vera dedotta dall'osservazione, il confronto dei due tempi darà, ragionando come al § 184, la differenza dei meridiani, e quindi quella cercata delle longitudini.

Si vede che questo metodo suppone una grande esattezza nelle tavole lunari, e per questa parte nell'odierno stato dell'Astronomia è a tutti gli altri preferibile, giacchè le tavole lunari, mercè gli sforzi degli Astronomi incitati da reiterati premj di saggi e munificentissimi

Governi, sono state ricondotte a tanta perfezione che non si potrebbe per certo desiderarne una maggiore.

504. Tutta la difficoltà è adunque ricondotta ad osservare 1.° il tempo sotto il meridiano del bastimento; 2.° la distanza apparente della Luna dall'astro; 3.° a dedurne poscia la distanza vera veduta dal centro della terra; 4.° a calcolare il tempo in cui la trovata distanza vera ha avuto luogo sotto un meridiano conosciuto.

Noi supporremo che vi sieno a bordo del bastimento tre osservatori proveduti di tre sestanti a riflessione egualmente bene rettificati, i quali volendo determinare la longitudine colle distanze della Luna dal Sole, contemporaneamente facciano le seguenti osservazioni. Il primo osservi l'altezza apparente del centro della Luna, la quale corretta dalla sola inclinazione dell'orizzonte sia $= H'$; corretta poi eziandio dalla paralasse e rifrazione sia $= H$.

Il secondo osservi l'altezza apparente del centro del Sole, che corretta dall'inclinazione dell'orizzonte apparente sia $= h'$; e dalla rifrazione e paralasse $= h$.

Il terzo finalmente osservi la distanza apparente del lembo illuminato della Luna da un lembo del Sole, e coll'ajuto dei semidiametri di questi due astri, se ne deduca la distanza apparente dei loro centri, che pongasi $= D$.

Se mancassero questi tre osservatori sarebbe facile supplire al loro difetto da un solo osservatore, il quale osservasse successivamente 1.° l'altezza apparente del centro della Luna; 2.° l'altezza apparente del centro del Sole; 3.° la distanza apparente del centro della Luna dal centro del Sole; 4.° di nuovo l'altezza apparente del centro del Sole; 5.° l'altezza apparente del centro della Luna, e ad ogni osservazione notasse il tempo che viene segnato dall'orologio nautico. Avendo sott'occhio queste diverse osservazioni successive, con una semplice proporzione sarà facile dedurre quali essere dovevano le altezze apparenti del centro del Sole e della Luna per l'istante in cui fu osservata la distanza apparente dei centri, come nel caso di tre osservatori contemporanei.

Ciò premesso, sia (*Fig.* 58) Z il zenit del vascello; S' il luogo apparente del centro del Sole, ed S il suo luogo vero, situati ambedue nello stesso verticale, cosicchè sia $S'S =$ rifrazione — paralasse; sia del pari L il luogo vero del centro della Luna, L' il suo luogo apparente. Sarà $S'L'$ la distanza misurata D; SL la distanza vera cercata, che rappresenteremo per x. Ritenute le denominazioni di sopra stabilite, avremo $S'O = h'$, $SO = h$, $L'H = H'$, $LH = H$, ed il triangolo $ZS'L'$ darà (Trig. XI)

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(D + H' - h')\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(D - H' + h')}{\cos H' \cos h'};$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(H' + h' + D) \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' - D)}{\cos H' \cos h'}.$$

In seguito dal triangolo $Z S L$ si avrà l'equazione $\cos x = \cos h \cos H \cos Z + \operatorname{sen} H \operatorname{sen} h$; e siccome $\cos Z = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z$, ovvero anche $= 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} Z - 1$, la precedente equivalerà alle due seguenti

$$\cos x = \cos (H - h) - 2 \cos H \cos h \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$
$$\cos x = 2 \cos H \cos h \cos^2 \tfrac{1}{2} Z - \cos (H + h) \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Sommando ora l'unità con ciascuna di queste equazioni, ovvero sottraendole dall'unità, con le debite riduzioni si formeranno le quattro seguenti equazioni

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} x = \cos^2 \tfrac{1}{2}(H - h) - \cos H \cos h \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(H - h) + \cos H \cos h \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} x = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(H + h) + \cos H \cos h \cos^2 \tfrac{1}{2} Z \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \cos^2 \tfrac{1}{2}(H + h) - \cos H \cos h \cos^2 \tfrac{1}{2} Z \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Introducendo in queste equazioni i superiori valori di $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} Z$, $\cos^2 \tfrac{1}{2} Z$, ed adoperando gli angoli ausiliarj sotto indicati, si formeranno con un poco di attenzione i seguenti quattro sistemi di formule per passare dalle distanze apparenti osservate alle distanze vere.

I. Pongasi

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\cos \tfrac{1}{2}(H - h)} \sqrt{\frac{\cos H \cos h \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(D + H' - h') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(D - H' + h')}{\cos H' \cos h'}},$$

e si avrà $\cos \tfrac{1}{2} x = \cos \tfrac{1}{2}(H - h) \cos \varphi$.

II. Pongasi

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(H - h)} \sqrt{\frac{\cos H \cos h \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(D + H' - h') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(D - H' + h')}{\cos H' \cos h'}},$$

e si avrà $\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(H - h)}{\cos \psi}$.

III. Pongasi

$$\operatorname{tang} \psi' = \frac{1}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(H + h)} \sqrt{\frac{\cos H \cos h \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' + D) \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' - D)}{\cos H' \cos h'}},$$

e si avrà $\cos \tfrac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(H + h)}{\cos \psi'}$.

IV. Infine sia

$$\operatorname{sen} \varphi' = \frac{1}{\cos \tfrac{1}{2}(H + h)} \sqrt{\frac{\cos H \cos h \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' + D) \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' - D)}{\cos H' \cos h'}},$$

e si avrà $\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \cos \tfrac{1}{2}(H + h) \cos \varphi'$.

fra i quali l'accorto calcolatore sceglierà quello che sarà più conveniente al caso particolare che ha fra le mani, nella qual scelta si do-

vrà regolare in modo che nè l'angolo ausiliario venga determinato per un seno se è molto vicino a 90°, nè la distanza x venga determinata per una funzione che troppo si avvicini a divenire $= \frac{0}{0}$.

Sotto molti altri aspetti si può presentare il valore della distanza x più o meno comodi al calcolo logaritmico, o per la costruzione di tavole speciali che alleggeriscano la fatica del calcolo. Noi non ce ne occuperemo, ed invece rimanderemo i nostri lettori all'Astronomia del signor De-Lambre (vol. III), ove sono riferiti i metodi più in uso, ed illustrati con esempj; ci limiteremo ad osservare che il IV sistema è quello stesso che unito ad un esempio trovasi nella prefazione alle tavole di logaritmi di Callet, il qual libro essendo fra le mani di tutti, ci dispensa dal farne alcuna numerica applicazione.

505. Ottenuta la distanza vera della Luna dal Sole, si deve calcolare il tempo vero del vascello mediante l'altezza vera del centro del Sole contemporaneamente osservata, al che sempre si giungerà coll'ajuto dei precetti del § 494.

Per ultimo non altro resta a fare che ricercare il tempo colle tavole astronomiche, che allora contavasi al meridiano di Parigi, o di Greenwich, o a qualunque altro meridiano conosciuto. Siccome questa ricerca riuscirebbe troppo molesta se direttamente s'intraprendesse colle tavole, perciò i bureau delle longitudini di Francia e d'Inghilterra sempre intenti a promuovere con ogni cura tutto ciò che per la Geografia e per la Nautica può essere vantaggioso, fanno inscrire nelle Effemeridi astronomiche pubblicate sotto le loro respettive direzioni le distanze vere della Luna dal Sole, e dalle principali stelle in ogni giorno in cui si può essa osservare, calcolandole per uguali intervalli di tempo, di tre in tre ore, o di sei in sei ore, e così rendono prontissima quest'ultima operazione, non richiedendosi che una semplice proporzione tostochè si veda fra quali intervalli cade la data distanza.

CAPITOLO X.

Regole per la costruzione degli orologi solari.

506. Una delle più importanti applicazioni dell'Astronomia agli usi della vita civile è la *Gnomonica*, ossia quella scienza in cui s'insegna a riconoscere l'ora del giorno dalla lunghezza dell'ombra di uno stilo eretto sopra una data superficie. Nessuna parte delle matematiche applicate è stata con tanta passione coltivata quanto la Gnomonica, e quindi è che abbiamo una gran moltitudine di trattati teo-

rici e pratici, nei quali con maggiore o minore estensione si tratta della costruzione degli orologi solari; e pochi sono i villaggi ove non s'incontrino con maggiore o minore esattezza disegnati sui muri per comodo del popolo, e per regola dei lavori campestri. Il piano da noi trascelto per queste applicazioni dell'Astronomia non ci permette di troppo estenderci in questo argomento dilettevolissimo; perciò ci limiteremo ai precetti per disegnare gli orologi in una superficie piana orizzontale, ed in un piano verticale comunque situato rapporto al meridiano.

Costruzione degli orologi solari in un piano orizzontale.

507. Si conduca una meridiana in un piano orizzontale mediante la regola esposta al § 14, ed in seguito per un punto di questa meridiana guidisi una linea diretta al polo boreale dell'equatore, *la quale* in conseguenza starà nel piano del meridiano, e farà col piano orizzontale un angolo uguale alla latitudine che porremo $= L$. Questa linea verrà da noi appellata *asse del mondo*, il punto in cui l'asse incontra la meridiana dirassi *centro dell'orologio*. Egli è chiaro che il Sole col suo moto diurno descrivendo un circolo, il cui piano è a questa linea perpendicolare, la sua ombra occupa sempre dall'altra parte la metà del circolo di declinazione in cui trovasi il Sole, e l'intersezione del suo piano col piano orizzontale determina sempre la posizione dell'ombra dell'asse in quest'ultimo piano.

Ciò ben compreso, rappresenti (*Fig.* 59) AZC il meridiano celeste, AHC l'orizzonte la cui intersezione col meridiano costituisce la linea meridiana; sia Z il zenit, EQ l'equatore, P il suo polo, e supponiamo che il Sole trovisi dalla parte d'occidente nel circolo orario distante dal meridiano H ore, ove per semplicità fingeremo H ridotto in gradi. Condotto dalla parte d'oriente un circolo massimo PIH, che faccia col meridiano un angolo $ZPI = 180° - H$, sarà il suo piano ricoperto dall'ombra dell'asse, la quale perciò taglierà l'orizzonte nel punto H. Quindi l'ombra dell'asse nel piano verticale si troverà nella linea condotta dal punto H al centro dell'orologio, e questa sarà in conseguenza la *linea oraria* corrispondente all'indicata ora H. Al tempo stesso è manifesto che l'arco CH, ovvero l'angolo PZH misurerà l'angolo della linea oraria colla meridiana dalla parte di tramontana. Condotto pertanto ZH, si faccia $CH = PZH = X$, ed essendo $ZP = 90° - L$, $ZH = 90°$, il triangolo sferico ZPH darà $\cot P = \frac{\cot ZH \operatorname{sen} ZP - \cos Z \cos ZP}{\operatorname{sen} Z}$, la quale per le attuali denominazioni dà $\operatorname{tang} X = \operatorname{sen} L \operatorname{tang} H$. Se s'impieghi per L la latitudine del luogo, e si faccia successivamente $H = 15°$, $= 30°$,

$= 45°$ ec. si avranno gli angoli X', X'', X''' ec. che le linee orarie della prima, seconda, terza ec. ora fanno colla meridiana.

Calcolati di ora in ora, od anche di mezza ora in mezza ora i valori di X; si costruirà l'orologio così. Rappresenti (*Fig.* 60) HI la direzione della meridiana; prendasi un punto H a piacere per centro dell'orologio; da una parte e dall'altra di HI si conducano le rette HS', HS'' ec. che facciano dalla parte boreale con essa gli angoli X', X'' ec.; rappresenteranno esse linee orarie pomeridiane se cadono all'oriente, ed antimeridiane se sono ad occidente. Per erigere l'asse del mondo nella sua vera situazione si farà un triangolo di metallo $G'GH$ tale che l'angolo in H sia $= L$, ed eretto questo verticalmente all'orizzonte per modo che l'angolo in H sia nel centro delle linee orarie, ed HG' sulla direzione della meridiana, l'ombra dell'ipotenusa ad 1^h cadrà in HS', a 2^h in HS'', e così di seguito. Se ora si lasciasse sussistere il solo lato GG' al posto che occupa annichilando tutto il restante, l'ombra dell'estremità di questo stilo per tutto l'anno cadrebbe sempre nelle linee orarie alle ore corrispondenti, e l'orologio sarebbe egualmente atto ad indicare il tempo.

508. *Scolio.* Il calcolo dell'angolo X mediante l'equazione $\tang X = \sen L \tang H$ imbarazza bene spesso gli artefici, i quali più volentieri maneggiano la regola ed il compasso. Si potranno perciò condurre le linee orarie mediante la seguente geometrica costruzione.

Facciasi nel piano orizzontale l'angolo $PHG = L$ (presso di noi $= 45° 24'$); presa poi HG a piacere, si tiri PG ad angolo retto con HG, e si prolunghi fino all'incontro colla meridiana in P, e si conduca PS'' perpendicolare alla meridiana HI. Posto $PI = PG$, col centro I descrivasi un circolo P 15. 30, che dividasi di 15° in 15°. Si congiunga il centro I con ogni divisione, e si prolunghino i raggi fino alla $PS'S''$, come si vede nella *figura* 60 per le divisioni 15°, 30°. Conducendo al centro H dell'orologio le linee HS', HS'' ec. queste rappresenteranno le cercate linee dell'ora prima, seconda ec.

In fatti pongasi uno qualunque degli angoli $PIS' = H$. Avremo $PG = PH \sen PHG = PH \sen L$; $PS' = PI \tang PIS' = PH \sen L \tang H$; per ultimo sarà $\tang PHS' = \frac{PS'}{PH} = \sen L \tang H$; perciò l'angolo $PHS' = X$, e quindi HS' la linea oraria corrispondente all'ora H.

Questa costruzione riesce comoda per le prime quattro ore, ma per la quinta, sesta, settima, ottava i punti S allontanandosi grandemente da P, malamente si può determinare la loro posizione colle ordinarie regole, e però difficile riesce il descrivere le corrispondenti linee orarie. Quanto alla sesta, riuscendo $X = 90°$, sarà la paralella a PS condotta per H; la posizione delle altre comodamente si cal-

colerà per la formula superiore, ovvero adoperando altre costruzioni che in copia trovansi nei trattati di Gnomonica, fra le quali per la loro semplicità sono commendevoli quelle proposte dal celebre Lambert nel vol. I, part. II dei suoi opuscoli tedeschi intitolati *Baytrage zum Gebrauche der Mathematik*, Berlino 1770, che si fondano sui principj della projezione ortografica e stereografica della sfera.

Costruzione degli orologi solari sopra muri verticali.

509. *Definizioni.* 1.° Una linea materiale eretta normalmente alla superficie di un muro, destinata a segnare l'ombra del Sole appellasi *stilo* o *gnomone*.

2.° La linea dalla sua estremità condotta al polo dell'equatore chiamasi *asse del mondo;* il punto in cui questa incontra il muro dicesi *centro dell'orologio;* la sua projezione ortografica sulla superficie del muro si appella *sostilare*.

3.° Se per il vertice del gnomone, per il zenit e per il polo si conduce un piano, sarà questi il meridiano, e la sua intersezione col muro sarà la meridiana, la quale è in conseguenza una linea retta verticale.

4.° L'angolo compreso dal piano del muro con un muro fittizio, il quale fosse nella direzione del vero oriente al vero occidente chiamasi *declinazione del muro*. Essendo lo stilo per costruzione perpendicolare al piano del muro, ed il meridiano essendo perpendicolare all'indicato muro fittizio, sarà la declinazione eziandio rappresentata dall'angolo che lo stilo fa col piano del meridiano.

Ciò premesso, raccoglieremo nei seguenti problemi le cose principali relative a questi orologi solari.

Problema I. Descrivere la meridiana in un muro verticale, e determinare al tempo stesso la sua declinazione.

510. Mentre un orologio comune precedentemente ben regolato, od anche una meridiana in un piano orizzontale ben costruita, indica in un qualunque giorno il mezzodì, si noti l'estremità dell'ombra del gnomone, e per il punto così determinato guidisi nel muro una linea retta verticale. Sarà questa la meridiana ricreata, e tutte le volte che l'estremità dell'ombra dello stesso gnomone caderà in questa linea sarà mezzogiorno.

Per determinare la declinazione del muro, sia P il piede del gnomone (*Fig.* 62), CLM la trovata meridiana. Per P si conduca una orizzontale PLA, ed una verticale PB. Posta PB uguale alla lunghezza dello stilo, e congiunta BL sarà LBP la cercata declinazione. Se adunque sia $LP = d$, $PB = l$, e la declinazione si appelli i, avremo . . . $\tang i = \frac{d}{l}$ . . . (1)

Scolio. Abbiamo supposto che il gnomone fosse perpendicolare al piano del muro. Se ciò non ha luogo, si dovrà abbassare dal suo vertice una perpendicolare sul piano del muro; il suo piede sarà il punto indicato per P, e si dovrà prendere la lunghezza di questa perpendicolare per il valore di l.

Problema II. Determinare l'angolo che la sostilare fa colla meridiana e l'angolo che l'asse del mondo fa col piano del muro.

511. Sia (*Fig.* 61) IZP il meridiano, Z il zenit, P il polo, ZX il verticale che passa per il piano del muro, di modo che PZX sia $= 90° - i$. Siccome l'asse passa per il vertice del gnomone eretto normalmente al piano di ZX, e per il polo P, perciò se da P si abbassa un arco PX di circolo massimo perpendicolare a ZX, il gnomone, l'asse e la sostilare saranno comprese nel di lui piano; e giacendo la sostilare nel piano del muro è forza che sia la comune intersezione dei piani dei due circoli PX, ZX. Pertanto ZX misurerà l'angolo della sostilare colla meridiana (comune sezione di ZX ed IZP), e PX misurerà l'angolo che fa l'asse del mondo col piano del muro. Posto ciò sia $ZX = S$, $PX = A$, ZP (complem. della latitudine) $= 90° - L$, l'angolo $PZX = 90° - i$; il triangolo rettangolo PZX darà

$$\text{sen}\, A = \cos L \cos i \;\ldots\; (2)\,; \qquad \text{tang}\, S = \text{sen}\, i \cot L \;\ldots\; (3)$$

ed inoltre avremo . . . $\text{tang}\, ZPX = \dfrac{\text{tang}\, i}{\text{sen}\, L} = \dfrac{\text{tang}\, S}{\text{sen}\, A} \;\ldots\; (4)$

Le equazioni (2), (3) risolvono il proposto problema.

Problema III. Determinare la posizione di una qualunque linea oraria rapporto alla meridiana o rapporto alla sostilare (*Fig.* 61).

512. »Chiamasi *linea oraria* una linea in cui sul muro cade l'om»bra dell'asse ad una data ora, e poichè in qualunque tempo del»l'anno il Sole ad un'istessa ora del giorno trovasi in uno stesso cir»colo orario, la cercata linea sarà rappresentata dalla comune inter»sezione del piano del dato circolo orario col piano del muro».

Sia adunque PH il proposto circolo orario corrispondente ad un angolo orario $= H$; la linea oraria di questo nome sarà l'intersezione del piano del circolo PH col piano ZX, ed in conseguenza farà colla sostilare un angolo misurato da HX, e colla meridiana un angolo $= ZH$. Pongasi $HX = X$, e l'angolo $HPX = ZPX - ZPH = D$; si avrà dal triangolo HPX . . . $\text{tang}\, X = \text{sen}\, A\, \text{tang}\, D \;\ldots\; (5)$

Egli è ora facile vedere che il calcolo delle equazioni precedenti somministrerà tutti i dati per costruire l'orologio solare. In fatti avendo descritta la meridiana CLM (*Fig.* 62), e determinato il piede del gnomone P, si misurino con una stessa scala le linee d ed l, l'equazione (1) darà l'angolo i; le equazioni (2), (3), (4) daranno gli

angoli S, A e ZPX. Per costruire la sostilare si conduca per il piede P la retta PB paralella alla meridiana, ed in seguito una retta PO che faccia con PB l'angolo $BPO = S$ disposta per modo che prolungata incontri la meridiana in un punto C al di sopra dell'orizzontale. Sarà CPO la sostilare, C il centro dell'orologio a cui convergono tutte le linee orarie. Trovato il punto C, si calcolino mediante l'equazione (5) tutti i valori di X, ponendo successivamente $D = ZPX - 15°$, $= ZPX - 30°$ ec. per le ore pomeridiane, ed $= ZPX + 15°$ ec. per le ore antimeridiane; si conducano per C altrettante linee rette inclinate alla sostilare dei respettivi angoli ottenuti col calcolo, e saranno le linee orarie di 1^h, 2^h ec. che si prolungheranno fino alle estremità del quadro stabilito nel muro, ed ivi si scriveranno i numeri delle ore.

Dalla enunziata costruzione è palese che un asse di ferro, il quale passando per C si appoggiasse sull'estremità del guomone, ricoprirebbe colla sua ombra le linee orarie nelle ore indicate, e sopprimendo l'asse l'ombra del vertice del guomone per tutto l'anno cadendo in qualche punto delle medesime indicherà l'ora del giorno.

Si può con una costruzione grafica evitare qualunque calcolo trigonometrico, e noi andremo ad esporla a comodo di tutti nel seguente

Problema IV. Esporre le regole per delineare con una costruzione grafica un orologio solare in un piano verticale (*Fig.* 62).

513. Avendo disegnato la meridiana CLM, e condotta la orizzontale ALN e la verticale PB per il piede del gnomone, si faccia PB uguale all'altezza del gnomone, e condotta LB, pongasi $LA = LB$. In seguito al punto A si applichi un angolo $LAC = L$ (latitudine del luogo), C rappresenterà il centro dell'orologio. Unendo il punto C col punto P, e prolungando la linea, si avrà la sostilare $CPIO$. Al punto P guidisi ad angolo retto colla CP la PS, e pongasi $= PB$, e unita la CS si prolunghi fino all'orizzontale in N. La retta CS rappresenta l'asse del mondo. Si faccia l'angolo CST retto, e determinato il punto T nella sostilare, si conduca la MTH perpendicolare a CT; sarà questa l'equatoriale, ossia la linea percorsa dall'estremità dell'ombra del gnomone nel giorno degli equinozj. Presa $TO = TS$, col centro O descrivasi un circolo, e condotta OM si noti il punto K, in cui essa incontra il descritto circolo, il quale dividerassi in ore, od archi di 15° in 15° di qua e di là dal punto K. Cada in m una divisione qualunque, per esempio di 2^h. Si conduca il raggio Om, che incontri la equatoriale in M'. Condotta CM', e prolungata fino alle estremità del quadrato preparato nel muro, sarà questa la linea oraria della seconda ora; lo stesso dicasi delle altre.

In fatti pongasi per brevità $PB = 1$; sarà $LP = \text{tang}\, i$,

$LB = LA = \sec i$, $LC = \sec i \tang L$. In seguito si troverà $\tang LCP = \operatorname{sen} i \cot L$; perciò sarà in virtù dell'equazione (3) $LCP = S$; quindi CPO la sostilare. Avremo poi

$CS = \sqrt{(\overline{LC}^2 + \overline{LP}^2 + \overline{PS}^2)} = \frac{1}{\cos L \cos i}$; e però

$\operatorname{sen} PCS = \frac{PS}{SC} = \cos L \cos i$. Dunque in virtù dell'equazione (2) l'angolo $PCS = A$. Sarà poi $TS = \frac{1}{\cos A} = TO$, $TP = \tang A$,

$TC = \frac{CS}{\cos A} = \frac{1}{\cos L \cos i \cos A} = \frac{1}{\operatorname{sen} A \cos A}$,

$TM = TC \tang S = \frac{\tang S}{\operatorname{sen} A \cos A}$; e quindi $\tang TOM = \frac{TM}{TO} = \frac{\tang S}{\operatorname{sen} A}$, donde risulta essere $TOM = ZPX$ della *figura* 61, ed in conseguenza sarà $TOM' = ZPX - H = D$: $TM' = TO \tang D = \frac{\tang D}{\cos A}$; per ultimo $\tang TCM' = \frac{TM'}{TC} = \operatorname{sen} A \tang D$. Quindi in virtù dell'equazione (5) sarà $TCM' = X$, e però CM' la linea oraria corrispondente all'ora H.

514. *Coroll. I.* Sia $i = 0$, cioè il muro non abbia declinazione alcuna; l'equazione (2) darà $\operatorname{sen} A = \cos L$, e però $A = 90° - L$; dall'equazione (3) si avrà $S = 0$, cioè la sostilare si confonderà colla meridiana. L'angolo ZPX della *figura* 61 diverrà $= 0$, in virtù dell'equazione (4), e perciò sarà $D = H$. L'equazione (5) diverrà $\tang HX = \cos L \tang H$, la quale confrontata coll'equazione degli orologi solari orizzontali dimostra, che in questo caso descrivesi l'orologio colle stesse regole dell'orologio orizzontale, solo che si cangi L in $90° - L$.

515. *Coroll. II.* Sia $i = 90°$, cioè si voglia delineare un orologio solare nel piano del meridiano. Si troverà in questo caso $A = 0$, e però l'asse paralello al piano del muro; $S = 90 - L$, ossia la sostilare farà colla verticale un angolo che sia il complemento della latitudine. L'angolo ZPX della *figura* 61, ossia MOT della *figura* 62 sarà $= 90°$. In seguito si troverà X (inclinazione delle linee orarie alla sostilare) $= 0$, e però le linee orarie saranno ad essa sempre paralelle. Quindi conoscendo i punti, nei quali tagliano l'equatoriale, si costruiranno con somma semplicità.

L'equatoriale in questo caso sarà una perpendicolare alla sostilare condotta per il piede P del gnomone, poichè $PT = \tang A = 0$. Il raggio del circolo KT sarà $= PS = 1$, cioè $=$ alla lunghezza del

gnomone. Quindi una qualunque linea oraria H si troverà prendendo l'arco $Tm = TK - mK = 90° - H$, e prolungando fino in M' il raggio che passa per m; per il punto M' condotta una paralella alla sostilare, sarà questa la cercata linea oraria.

516. *Scolio*. La costruzione esposta nel § 513 riesce molto comoda se l'angolo i non sia soverchiamente grande. Ma se questo superi i 50° od i 60°, il punto C si trasporta in gran distanza dal punto P, e talvolta anche sorte dalla superficie del muro. In queste circostanze riesce molto incomoda la costruzione dell'orologio colla regola e compasso, e più facilmente si tireranno le linee orarie calcolandone la loro posizione rapporto alla equatoriale nel seguente modo. In primo luogo si calcoleranno i costanti i, A, S, e l'angolo ZPX; indi per il punto P condotta la sostilare $PT'O$, che faccia colla paralella alla meridiana un angolo $= S$, si prenda $PT = \text{tang}\, A$ (in una scala in cui la lunghezza del gnomone sia $= 1$), e guidata per T una perpendicolare $MT'H$ alla sostilare, rappresenterà l'equatoriale. Il centro del circolo KT si troverà prendendo $T'O = \sec A$ nella stessa scala. Indi colla superiore costruzione si determineranno i punti M', M'' ec., ovvero anche colle formule

$$TM' = \sec A \text{ tang } (ZPX - H) = \sec A \text{ tang } D \text{ ec.};$$

e per ultimo si guideranno le linee orarie per M', M'' col condurre per essi altrettante linee rette inclinate ad MH di una quantità che sia il complemento delle loro respettive inclinazioni alla sostilare calcolate dietro l'equazione (5) del § 512.

CAPITOLO XI.

Del calendario, e dei principali precetti per il confronto delle diverse epoche cronologiche.

517. La durata della rivoluzione tropica del Sole essendo di $365^{g}\ 5^{h}\ 48'\ 50'',2$, ossia prossimamente $= 365,24225$, si sogliono in società trascurare le frazioni di giorno per formare gli *anni*, od unità di tempo pei grandi intervalli di 365 giorni. Con questa pratica si commette in ogni rivoluzione del Sole un errore di circa 6^{h}, ed in fine di quattro, mentre si crederebbe il Sole ritornato allo stesso punto rapporto all'equinozio, egli n'è ancora lontano di un giorno. Per ricondurre adunque il Sole donde partimmo, convien formare il quarto anno di 366 giorni, formati avendo i primi tre di 365. Questo quarto anno chiamasi *bisestile*, e l'aggiunta del giorno soprannumerario si fa al mese di Febbrajo, che essendo negli anni comuni di

28 giorni, nei bisestili si forma di 29. Tali semplicissime regole si devono a Giulio Cesare, e da esso questa maniera di computare è detta *calendario giuliano*. Egli divise l'anno in 12 mesi alternativamente composti di 30 e di 31 giorni; Febbrajo contenendone però 28, ovvero 29, secondo che l'anno è comune, ossia bisestile. Ecco i nomi dei mesi, il numero dei loro giorni, ed il numero dei giorni decorsi dal principio dell'anno fino al principio di ciascun mese, ossia fino al termine del precedente.

Numero dei giorni di ciascheduno	giorni dal princ. dell'anno		Numero dei giorni di ciascheduno	giorni dal princ. dell'anno	
	comune	bisest.		comune	bisest.
Gennajo — 31	0	0	Luglio — 31	181	182
Febbraj. — 28 / 29	31	31	Agosto — 31	212	213
			Settembr. — 30	243	244
Marzo — 31	59	60	Ottobre — 31	273	274
Aprile — 30	90	91	Novembr. — 30	304	305
Maggio — 31	120	121	Dicembr. — 31	334	335
Giugno — 30	151	152	31 Dicembre	365	366

518. Il computo del calendario giuliano suppone la rivoluzione del Sole $= 365^{g}\ 6^{h}$, mentre è realmente un poco più picciola. Quantunque con questa supposizione si commetta un picciolo errore, pure col crescere successivamente il numero degli anni diviene sensibile; e se in una qualche epoca supponesi il principio di un anno avvenuto nell'equinozio di primavera, dopo un numero intero di anni, mentre stimeremo il Sole ritornato all'equinozio, lo avrà realmente oltrepassato.

Nel Concilio di Nicea, tenuto l'anno 325 dell'era cristiana, si osservò che l'equinozio di primavera accadeva il 21 di Marzo, e fu stabilito dai Padri di quel consesso che in progresso si celebrerebbe la Pasqua di Risurrezione la prima domenica dopo il plenilunio susseguente il 21 di Marzo, persuasi che nell'intercalazione giuliana a quell'epoca fosse per accadere sempre l'equinozio. Frattanto nel 1582 sotto il pontificato di Gregorio XIII l'equinozio accadeva verso gli 11 di Marzo, cosicchè il 21 il Sole lo aveva già passato di 10 giorni; ciò indusse questo Pontefice ad esortare i Matematici del suo tempo a presentare le intercalazioni più acconcie per mantenere il tempo dell'equinozio in gran vicinanza del 21 di Marzo. Il calendario che venne in quell'occasione decretato si chiamò *calendario gregoriano*, e la riforma adottata prese il nome di *riforma gregoriana*. Per ben

comprendere le regole di questo calendario, investighiamo le diverse intercalazioni che si potrebbero adottare.

Problema. Determinare in quanti anni le $5^h\ 48'\ 50'',2$ *formeranno un giorno.*

519. Se si fa la proporzione $5^h\ 48'\ 50'',2 : 24^h :: 1^{an} : x$, il quarto termine esprimerà evidentemente il cercato numero di anni. Ora riducendo i minuti a parti di ora, trovasi $x = \frac{24}{5,813944}$, e svolgendo questa frazione in frazione continua si trova

$$x = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \text{ec.}}}}}$$

dalla quale si ottengono le seguenti frazioni convergenti $x = \frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{516}{125}$ ec., le quali significano che in quattro anni si deve intercalare un giorno, o più esattamente 7 giorni in 29 anni, e così di seguito. L'ultima di queste frazioni, nella quale s'intercalano 125 giorni in 516 anni è già sì prossima al vero che produce il solo lievissimo errore di 17'' di tempo in un intervallo sì lungo. Facendo ora la proporzione $516 : 125 :: 400 : x$, si troverà il numero dei giorni da intercalarsi in 400 anni $= 96,9$, ossia prossimamente $= 97$ giorni, e questa è appunto l'intercalazione adottata dalla riforma gregoriana contenuta nella seguente semplicissima regola.

Si aggiunga un giorno ogni quattro anni, purchè si eccettuino entro 400 anni, gli anni secolari primo, secondo e terzo, i quali si computeranno come comuni, facendo bisestile il quarto anno secolare. Così valutando l'anno 1600 per bisestile, si dovranno stabilire comuni il 1700, 1800, 1900; ed in seguito l'anno 2000 sarà ancora bisestile, e così progredendo. Si vede di qui che gli anni dell'era volgare divisibili per 4 saranno bisestili, e quanto agli anni secolari quelli che non saranno divisibili per 4 saranno comuni; ed i secolari divisibili per 4 si faranno bisestili.

520. Questa appunto fu la semplicissima intercalazione decretata dal pontefice Gregorio XIII; siccome poi nel 1582 l'equinozio accadeva il giorno 11 di Marzo, per ricondurlo negli anni seguenti al 21 dello stesso mese, lo stesso decreto pontificio portò la soppressione di 10 giorni, ordinando che il giorno seguente il 4 Ottobre non fosse nominato 5 Ottobre, ma bensì 15 Ottobre.

Una tale riforma fù da principio ordinata ed adottata in tutti gli

stati cattolici; ma i principi protestanti ricusarono d'adottarla, e si attennero al calendario giuliano. Gl'Inglesi la adottarono nel 1752 al mese di Settembre, ed i protestanti di Alemagna verso il 1775. Al presente la riforma gregoriana è adottata da tutte le nazioni di Europa, eccettuato l'impero russo che tuttavia ritiene il calendario giuliano. Così i Russi fra il 1700 ed il 1800 contano 11 giorni di meno, ed attualmente 12 a motivo del nuovo bisestile soppresso nel 1800. Si suole tuttavia nei trattati ed in tutti gli atti pubblici scrivere la data secondo il vecchio e nuovo stile, scrivendosi per esempio $\frac{3}{15}$ Gennajo 1816, per significare li 3 Gennajo secondo il vecchio stile, e 15 Gennajo nuovo stile dell'anno 1816.

521. Dalle cose esposte fin qui è chiaro che la correzione gregoriana suppone che $5^h\,48'\,50'',2$ accumulate ogni anno per lo spazio di 400 anni formano 97 giorni. Ora il prodotto di 400 per $5^h\,48'\,50'',2$ forma invece $96^g\,21^h\,34'\,40''$, e perciò la correzione gregoriana suppone riondotto il Sole al termine di 400 rivoluzioni più presto di quello che realmente ci arrivi di $2^h\,25'\,20''$, le quali accumulate successivamente produrrebbero un giorno in 3964 anni, e quindi ogni quattro mila anni circa converrà sopprimere un nuovo bisestile. Questa nuova correzione è stata trascurata come picciolissima.

Del ciclo solare, e delle lettere dominicali.

522. Essendo l'anno comune composto di 365 giorni, qualora si ritenga il metodo ordinario di contare per settimane, si vede che in un anno saranno comprese 52 settimane ed un giorno. Così se l'anno comune ha principiato in Domenica, finirà pure in Domenica, ed il seguente avrà il suo principio in Lunedì; il terzo, qualora il secondo sia pure comune, principierà per Martedì; ma se invece fosse bisestile, allora il secondo invece terminerà in Martedì, ed il terzo non potrà riprincipiare che per Mercordì. Lo stesso dicasi degli altri. Si vede adunque che, senza l'intervento dei bisestili, ogni 7 anni si ristabilirebbe il principio dell'anno agli stessi giorni della settimana; i bisestili turbano un poco la regola, ed è facile a persuadersi che non può ristabilirsi lo stesso ordine di bisestili e di giorni nel principio dell'anno se non dopo 28 anni, prodotto di 4 per 7. Così l'anno 1809 seguente ad un bisestile principiò in Domenica; formandosi una tabella coi precedenti precetti del principio di tutti gli anni seguenti, si riscontrerà che nessun anno seguente un bisestile riprincipierà in Domenica fino al 1837. A questo periodo di 28 anni riconducente lo stesso ordine di bisestili e di giorni al principio dell'anno si dà il nome di *ciclo solare*, e si conta per 1, 2, 3 fino a 28, il quale per essere l'ultimo tiene anche luogo di zero.

Si assume dagli scrittori di cronologia il principio di un ciclo solare 9 anni avanti l'era cristiana. Quindi la seguente regola per trovare ad un dato anno il numero totale dei cicli decorsi, e l'anno corrente del ciclo seguente. *Al proposto anno aggiungete 9, e dividete la somma per 28; il quoto intero esprimerà il numero dei cicli decorsi, ed il residuo sarà l'anno corrente del ciclo solare*. Con questa regola si troverà il ciclo solare dell'anno 1820 dato da 9.

523. Per ben comprendere cosa debba intendersi per lettera dominicale, ed a cosa serva, consideriamo la tavola del calendario perpetuo, ed in essa vedrassi che ad ogni giorno dell'anno corrisponde una delle 7 lettere dell'alfabeto *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Quando il primo giorno dell'anno (a cui sta di fronte *A*) è Domenica, tutti i giorni dei diversi mesi che portano la lettera *A* cadranno in Domenica. Così se la prima Domenica di un anno sta di fronte ad una lettera per esempio *C*, tutti i giorni che sono nel calendario perpetuo accompagnati da *C* cadranno in Domenica. Se l'anno è bisestile, la lettera corrispondente alla prima Domenica dell'anno indicherà le Domeniche per i mesi di Gennajo e Febbrajo; per gli altri mesi si prenderà la lettera prossimamente superiore. Posto ciò, quella lettera negli anni comuni, o quelle due lettere negli anni bisestili che corrispondono ai giorni di Domenica nel calendario diconsi *lettere dominicali*.

Avendo ben comprese le cose precedenti, facile riuscirà la risposta ai seguenti quesiti di molta importanza nella cronologia.

I. Conosciuto il giorno della settimana, in cui principiò un qualunque anno dell'era nostra, si domanda il giorno della settimana corrispondente al principio dell'anno 1. Così sapendosi che il 1816 principiò per Lunedì, domandasi il giorno per cui principiò l'anno 1.

524. Se tutti gli anni fossero comuni, revoluto tutto il 1815, sarebbero decorsi giorni 365.1815; ma in 1815 anni vi sono 453 bisestili quoto intero di 1815 diviso per 4. Di più, in virtù della riforma gregoriana sono stati soppressi fino a questo secolo 12 giorni. Quindi il numero dei giorni decorsi fino a tutto il 1 del 1816 sarà $= 1815.365 + 453 - 12 + 1$, od il numero delle settimane sarà $= \frac{1815.365 + 453 - 12 + 1}{7}$, cioè $= 94702 + \frac{3}{7}$. Tornando indietro dal 1816 per 94702 settimane si ricade nel 3 giorno dell'anno 1, il quale in conseguenza corrisponderà ad un Lunedì; quindi il primo dello stesso anno corrisponderà al Sabato.

II. Determinare il giorno delle settimana, in cui principierà un dato anno dell'era nostra, e quindi assegnare la lettera dominicale.

525. Calcolate il numero delle settimane intere decorse dal prin-

cipio dell' anno 1 fino al principio dell' anno proposto, lo che si ottiene dividendo il numero totale dei giorni decorsi per 7. Se non vi ha residuo l'anno principierà per Venerdì, e se vi ha un residuo sarà questo sempre corrispondente al giorno della prima settimana. In generale il residuo preso in questa tabella

1	Sabato	3	Lunedì	5	Mercordì	7 ossia 0	Venerdì
2	Domenica	4	Martedì	6	Giovedì		

darà il giorno per cui principia l'anno. Siccome poi si trascurano le intere settimane, così tosto si vedrà la ragione della seguente regola. *Scrivete l'anno proposto; e toltane l'unità scrivete la quarta parte intera del residuo, che rappresenta i bisestili revoluti nell' ipotesi del calendario giuliano; toglietene i giorni soppressi dalla riforma gregoriana, l'aggregato totale diviso per 7 dà un residuo, che nella precedente tabella mostra il giorno per cui principia l'anno.* Domandasi il giorno in cui principiarono gli anni 1500, 1795, 1820.

Opero così	1500	1795	1820
bisestili decorsi . . .	374	448	454
giorni soppressi		— 11	— 12
	1874	2232	2262
residuo della divis. per 7	5	6	1
principio dell' anno .	Mercordì	Giovedì	Sabato

Conosciuto il primo giorno dell' anno, si troverà tosto la lettera domenicale dall' osservare quella lettera che sta in faccia alla prima Domenica dell' anno. Si troveranno *E.D* per il 1500, *D* pel 1795, *B.A* per il 1820.

III. Si domanda il giorno della settimana a cui corrisponde un dato giorno del mese di un anno proposto.

526. Se già conoscasi la lettera dominicale, ed abbiasi fra le mani il calendario perpetuo, niente di più facile che l'assegnare il giorno delle settimana domandato. In caso diverso si operi come nei due esempj seguenti, nei quali si domanda il giorno corrispondente al 6 Aprile 1327, e 20 Luglio 1820.

Anno proposto diminuito di uno . . .	1326	1819
bisestili revoluti	331	454
giorni soppressi dalla riforma	—	— 12
giorni decorsi dal principio degli anni risp.	96	202
somma =	1753	2463
residuo della divisione per 7 . . . . =	3	6
giorni ottenuti dalla tavola super. . . .	Lunedì	Giovedì

Si vedrà facilmente la ragione di questi precetti, se si cerca il numero intero delle settimane decorse dal principio dell'era fino al giorno domandato.

Dell'aureo numero, e delle epatte ecclesiastiche.

527. L'*aureo numero* è un periodo di 19 anni giuliani scoperto già da Metone, il quale riconduce le lunazioni sensibilmente al medesimo giorno dell'anno, e fu già molto in uso per il calcolo degli eclissi, poichè si osservò che dopo un tale intervallo di tempo questi fenomeni ritornano quasi alle stesse ore.

Per giudicare dell'esattezza di questo periodo convien riflettere che in 19 anni si fanno 235 rivoluzioni della Luna. Ora la rivoluzione sinodica essendo di $29^{s}\ 12^{h}\ 44'\ 3'',2$, avremo

235 lunazioni medie . .	=	$6939^{s}\ 16^{h}\ 32'\ 32''$
19 anni giuliani fanno .	=	6939 18 0 0
differenza .	=	1 27 28

Apparisce di qui che se la Luna in un determinato giorno dell'anno parte dal novilunio, dopo 19 anni giuliani ritorna nel medesimo giorno al novilunio anticipando soltanto di $1^{h}\ 28'$ circa. Facendo ora questa proporzione $1^{h}\ 27'\ 28'' : 19^{an} :: 24^{h} : x^{an}$ si trova $x = 312^{an},8$; cioè l'anticipazione di $1^{h}\ 27'\ 28''$ conduce all'anticipazione di un giorno in fine di 312,8 anni, e di 8 giorni, dopo 2500 con un minimo errore di cui non si tiene conto.

528. Per comprendere l'uso di questo periodo trascuriamo da principio il picciolo errore del medesimo, e supponiamo che ad ogni giorno di ciascun anno siensi notate le fasi lunari per il corso di un intero ciclo. Nei cieli seguenti agli stessi giorni dei rispettivi anni la Luna riprenderà le medesime fasi; così a cagion d'esempio se nel 1 Gennajo dell'anno 4 di un ciclo l'età della Luna era di 3 giorni, rivoluti 19 anni giuliani, nel ciclo seguente si ricade nell'anno *quarto*, e l'età della Luna il 1 Gennajo sarà del pari = 3 giorni. In generale in tutti quegli anni, nei quali correrà l'anno 4 del ciclo lunare, o, come volgarmente dicesi, l'aureo numero 4, l'età della Luna sarebbe nel primo Gennajo = 3, facendo astrazione dell'anzidetto errore. Ma scorsi 312,8 anni giuliani dopo la prima epoca, il novilunio anticipando di un giorno, l'età della Luna, correndo l'aureo numero 4, al primo Gennajo sarà = 4, e revoluti 2500 anni nelle stesse circostanze sarà = 11.

529. Queste cose generali ben comprese, passiamo ad esporre le intercalazioni proposte dal dott. Lilio medico napolitano, ed approvate

Digitized by Google

nella riforma gregoriana. Essendo la rivoluzione sinodica della Luna di 29ᵉ 12ʰ circa, si sono formati i mesi lunari alternativamente di 29 e 30 giorni. Così l'anno solare conterrà 12 lunazioni intere, le quali formano la somma di 354 giorni, e vi sarà negli anni comuni un residuo di 11 giorni, nei bisestili di 12.

Ora le 12 lunazioni di 29 e 30 giorni nel corso di 19 anni giuliani formerebbero 228 lunazioni. Rimangono adunque 7 lunazioni da intercalarsi in questo stesso intervallo. Queste residue lunazioni si appellano *embolismiche*, e per formare il numero dei giorni compresi in 19 anni giuliani, conviene formarne 6 di 30 giorni, e l'ultima di 29; in tal guisa (supponendo compresi 5 bisestili nei 19 anni) tanto colle 235 lunazioni, quanto con 19 anni formasi l'intervallo di 6940 giorni, come dall'annesso computo:

228 lunazioni alternat. di 29 e 30 giorni fanno	.	6726
6 lunazioni embolismiche di 30 giorni . . .		180
1 lunazione embolismica di giorni 29		29
numero dei giorni intercalati		5
somma	.	6940

Superando ogni anno di 11 giorni le 12 lunazioni, si comprende che ogni tre anni si dovrà intercalare una delle 6 lunazioni embolismiche di 30 giorni, e rimarranno ancora 3 giorni; l'ultima lunazione embolismica di 29 giorni si aggiungerà alla fine del ciclo. Se pertanto noi supponiamo che in un certo anno al principio del 1 di Gennajo l'età della Luna fosse = 0, di modo che si trovasse nel suo novilunio, e se assumiamo quell'anno per il primo del ciclo, avremo l'età della Luna al principio dei seguenti anni, ed il numero delle lunazioni decorse dal principio del ciclo, come segue nell'annessa tavoletta, ove si parte dal 1805, in cui l'aureo numero fu = 1, e l'età della Luna al zero di Gennajo = 0.

Era crist.	aur. num.	lunaz. dopo il 1805	età della ☽ o Gen.	Era crist.	aur. num.	lunaz. dopo il 1805	età della ☽ o Gen.
1805	1	0	0	1817	13	148	12
1806	2	12	11	1818	14	160	23
1807	3	24	22	1819	15	173	4
1808	4	37	3	1820	16	185	15
1809	5	49	14	1821	17	197	26
1810	6	61	25	1822	18	210	7
1811	7	74	6	1823	19	222	18
1812	8	86	17				
1813	9	98	28	1824	1	(a)235	(a)29
1814	10	111	9	1825	2	12	11
1815	11	123	20	ec.	ec.	ec.	ec.
1816	12	136	1				

Dall' esame di questa tavola apparisce che al principio dell' anno 19 dell' aureo numero corrispondente al 1823 sonosi numerate 222 lunazioni, e col finire di esso nel principiare il 1824 coll' aureo numero 1 del nuovo ciclo si saranno computate 235 lunazioni, l' ultima delle quali mostra l' età della Luna 29^{s} al 1 Gennajo 1824, e quindi si prenderà per l' ultima embolismica di 29 giorni, donde apparisce in luogo dei numeri in faccia ad (*a*) doversi scrivere il zero.

Riprincipierà adunque il secondo ciclo lunare col 1824 nelle stesse circostanze, nelle quali principiò il primo, e quindi agli stessi aurei numeri corrisponderà il primo Gennajo la stessa età della Luna. *I numeri della quarta colonna rappresentanti l' età della Luna si trovano* aggiungendo 11 giorni all' età dell' anno precedente, e togliendo 30 dalla somma, quando ciò è possibile, osservando solo di scrivere 0 in luogo di 29 nel passaggio dell' aureo numero 19 ad 1, ossia alla precedente età 18 in questo solo caso si aggiunga 12 per ottenere 30, da cui tolto 30 rimane l' età della Luna = 0.

530. L' età della Luna nel zero di Gennajo, ossia 31 Dicembre, chiamasi *epatta*, e suolsi scrivere nei calendarj e nelle effemeridi con numeri romani. Dalle cose precedenti si rende manifesto che le epatte ritornerebbero sempre le stesse senza l' errore del ciclo lunare. Ora in virtù di questo errore in capo a 312,8 anni giuliani crescono le epatte di 1^{s}, ed in 2500 anni aumentano di 8 giorni.

Si è tenuto conto di questa correzione nella riforma gregoriana, ed è stata chiamata *equazione lunare*. La intercalazione adottata fu di aggiungere un giorno dopo 300 anni alle epatte corrispondenti agli aurei numeri e dopo 7 intercalazioni successive di lasciare decorrere

Digitized by Google

400 anni per la nuova intercalazione, col quale artificio esse si aumentano precisamente di 8 giorni in 2500 anni.

Nella riforma del calendario si stabilì di partire dall'anno 550 dell'era nostra, e che l'equazione lunare si adoperasse negli anni 800, 1100, 1400, 1800. In tal guisa vengonsi ad aumentare di 4 giorni le epatte in 1250 anni, che corrisponde all'aumento di 8 giorni in 2500 anni. Pertanto gli anni nei quali cadde e caderà nei futuri secoli l'equazione lunare si rileveranno dalla seguente tavoletta che facilmente si potrà continuare a piacimento, dalla quale apparisce il numero dei giorni che si dovranno aggiungere agli aurei numeri del 550 per tener conto della equazione lunare. Così per esempio fra il 1800 inclus. ed il 2100 escl. si vede doversi aggiungere 4^s.

Anni	equ. lun.	Anni	equ. lun.	Anni	equ. lun.	Anni	equ. lun.
550	0	1800	4	3000	8	4300	12
800	1	2100	5	3300	9	4600	13
1100	2	2400	6	3600	10	4900	14
1400	3	2700	7	3900	11	ec.	ec.

Errerebbe però colui che credesse di ottenere ai nostri giorni la vera epatta aggiungendo 4^s alle epatte corrispondenti agli aurei numeri verso il 550. In fatti suppongono le epatte l'uso costante del calendario giuliano; convien dunque ridurre il computo nostro gregoriano al computo giuliano, il che si ottiene togliendo i dieci giorni soppressi nel 1582, ed il numero dei bisestili secolari in seguito tolti, in tutto 12 giorni nel corrente secolo.

531. Dietro tutte le cose precedenti è facile vedere che chiamando L l'aureo numero di un anno qualunque verso il 550, A l'epatta corrispondente all'aureo numero 1, avremo per l'immediata formazione della tavola del § 529 l'epatta verso il 550 corrispondente ad $L = R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + A$, volendo indicare col simbolo $R\,\frac{11\,(L-1)}{30}$ il residuo della divisione di $11\,(L-1)$ per 30; e per un'altra epoca qualunque si avrà . . . epatta corrisp. all'aureo numero L

$= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + A +$ equaz. lun. — gior. sop. da rifor. gregor.

L'anno 551 correndo l'aureo numero 1 fu stabilita l'epatta ecclesiastica $= 8$; quindi ponendo $A = 8$, ed opportunamente adoperando l'equazione lunare, e la correzione gregoriana, la formula superiore darà per un aureo numero L l'epatta fra

il 500 ed 800 escl. $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 8$

800 . . 1100 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 9$

1100 . . 1400 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 10$

1400 . . 1582 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 11$

1583 . . 1700 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 1$

1700 . . 1900 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} + 0$

1900 . . 2100 . . . $= R\,\frac{11\,(L-1)}{30} - 1$, ec.

532. Si vede pertanto che per trovare l'epatta ecclesiastica corrispondente ad un qualunque anno, basta assegnarne l'aureo numero L. Ora l'anno 551 contandosi l'aureo numero 1, nel 550 si compiva un ciclo; dividendo 550 per 19 si ottiene 28, ed un residuo 18. Dunque dal principio dell'era cristiana erano decorsi 28 cicli e 18 anni; e compiendosi per ipotesi il 29 ciclo, questo doveva avere avuto il suo principio un anno avanti l'era cristiana. Da ciò risulta la seguente regola per ottenere l'aureo numero corrente di un proposto anno. » Sommata l'unità col proposto anno, dividete la somma per 19, ed » il residuo indicherà l'aureo numero corrente ».

Esempio. Si domanda l'aureo numero e l'epatta del 1820. Diviso 1821 per 19 trovasi il residuo 16, che sarà anche l'aureo numero corrente. In seguito per questo secolo la epatta sarà data dalla formula $R\,\frac{11\,(16-1)}{30} = R\,\frac{165}{30} = 15$, prendendo il solo residuo della divisione. Sarà adunque l'epatta = XV.

533. L'uso delle epatte è di trovare con facilità il giorno del novilunio per ogni mese dell'anno. Facendo le lunazioni alternativamente di 30 e 29 giorni con un poco d'attenzione si troverà la verità della seguente regola per il calcolo del giorno del novilunio.

» Per li mesi di Gennajo e Marzo togliete l'epatta da 30, e per » Febbrajo da 28. Il residuo darà il giorno del mese in cui cade il » novilunio. Per gli altri mesi si aumenti l'epatta di tante unità quanti » sono i mesi al di sopra di Marzo, e tolta la somma dall'ultimo gior» no del proposto mese, si avrà il novilunio dentro un giorno o due ».

Se poi si ha fra le mani il calendario perpetuo romano, i giorni di ciascun mese scritti in faccia all'epatta dell'anno sono anche, dietro la sua costruzione, quelli del novilunio.

534. Le regole precedenti sono state immaginate per il calcolo del giorno, in cui devono i Cristiani celebrare la Pasqua di Risurrezione, la quale, secondo il decreto del Concilio Niceno, deve cadere nella Domenica seguente il primo plenilunio che accade dopo il 21 di Marzo. Così la Pasqua non può celebrarsi giammai avanti il 22 Marzo, nè potrà andare al di là del 25 di Aprile; in fatti succeda un plenilunio nel 20 di Marzo, il prossimo plenilunio sarà il 18 Aprile, e se questo giorno fosse per azzardo in Domenica, dovrà trasportarsi la Pasqua alla prossima Domenica che cade nel 25 di Aprile prescrivendosi dalla bolla di Gregorio XIII di celebrarla nella prima Domenica seguente il 14 della Luna; e nel tempo stesso apparisce che se nel 21 di Marzo cadesse la Domenica ed il plenilunio, si dovrà la Pasqua celebrare nella Domenica seguente.

Premesse queste cose, ecco la regola per il calcolo del giorno pasquale: „Si calcoli il giorno del novilunio di Marzo togliendo l'epatta da 30, come sopra si è prescritto; al giorno del novilunio si aggiungano 14 giorni, e si avrà il plenilunio, il quale sarà pasquale se cade nel 21 o dopo il 21 di detto mese. In seguito si calcoli il giorno della settimana corrispondente al plenilunio, e la Domenica susseguente sarà il giorno di Pasqua „.

Esempio. Domandasi in qual giorno si dovrà celebrare la Pasqua nell'anno bisestile 1820. Si calcolino, come sopra, l'aureo numero e l'epatta; sarà l'aureo numero 16 e l'epatta XV; quindi il novilunio avrà luogo il giorno 30–15 di Marzo, cioè il giorno 15, e il plenilunio caderà nel giorno 29. Ora dietro la regola del § 525 si troverà che il giorno 29 Marzo cade in Mercordì, e però la prossima Domenica, giorno di Pasqua, caderà nel 2 Aprile.

Trovato il giorno di Pasqua, tutte le altre feste mobili dell'anno si fanno da esso dipendere per intervalli fissi di tempo, e dietro precetti che si possono vedere nei libri ecclesiastici, e trovansi riferiti eziandio nell'Astronomia del signor La-Lande per comodo di quelli che calcolano le effemeridi.

Dell'indizione romana, e del periodo giuliano.

535. L'*indizione romana* è un periodo di 15 che s'impiegava negli atti pubblici ai tempi di Costantino e degli imperatori seguenti. Esso non ha alcun legame coll'Astronomia, nè per altro è necessario che per inserirlo nelle effemeridi, avvegnachè negli atti pubblici ed istromenti notarili viene tuttora inserito. Le indizioni furono introdotte

il 25 Settembre dell'anno 312; presso gl'imperatori greci e nella Chiesa greca si fanno principiare col primo di Settembre dell'anno 312, mentre dai Pontefici romani e dal senato di Venezia furono soltanto introdotte col principio dell'anno 313. Così coll'anno 312 dovevasi compire un ciclo esattamente, e quindi l'origine rimonterà 3 anni avanti l'era cristiana. Quindi formasi la seguente regola per trovare l'indizione romana: „Agli anni correnti dell'era volgare si aggiunga „3, e l'aggregato si divida per 15; il residuo darà l'indizione roma„na, la quale sarà 15 se nella divisione non vi è residuo „.

536. Il *periodo giuliano* è un intervallo di 7980 anni giuliani risultante dal prodotto dei periodi lunare, solare ed indizione, cioè da 28 per 19 per 15, il quale è stato introdotto dal celebre Giuseppe Scaligero per servire di misura comune, e di termine di confronto nei calcoli cronologici. I numeri 28, 19, 15 essendo primi fra loro, si vede che durante lo spazio di un periodo ad un solo anno determinato compete una data indizione, un dato aureo numero, ed un dato ciclo solare.

Ciò premesso, si ricerchi in quale anno del periodo giuliano ha avuto luogo un ciclo solare r, un aureo numero r', un'indizione r''. Chiamando x l'anno richiesto del periodo giuliano; q, q', q'' il numero dei cicli interi solare, lunare ed indizione decorsi dal suo principio, le condizioni della questione conducono tosto alle tre equazioni

$$x = 28\,q + r, \quad x = 19\,q' + r', \quad x = 15\,q'' + r''.$$

Se queste si trattano col metodo ordinario dei problemi indeterminati conducono alla seguente equazione (dove si assume per ω un numero arbitrario positivo)

$$x = 7980\,\omega + 4845\,r - 3780\,r' - 1064\,r'' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la quale porge infiniti valori che soddisfanno al quesito; tutti però in progressione aritmetica crescente, di cui la differenza sia $= 7980$. Onde vedesi che in un sol ciclo vi è sempre un solo anno che soddisfà alla domanda.

537. L'equazione (1) somministra il mezzo di riconoscere in quale anno dell'era volgare ha il suo principio il periodo giuliano, prendendo ad anno primo quello in cui $r = r' = r'' = 1$. Si parta in fatti da un anno determinato, per esempio dal 1816, in cui era $r = 5$, $r' = 12$, $r'' = 4$. Sostituiti questi numeri nell'equazione (1) si ottiene $x = 7980\,\omega - 25391$; il valore più picciolo di ω, che dà per x un numero positivo è $= 4$, dal quale si ha $x = 6529$. Pertanto l'anno 1816 correva l'anno 6529 del primo periodo giuliano; e quindi egli ha avuto la sua origine 4713 anni avanti l'era volgare.

Dalle cose dette è facile raccogliere 1.° che chiamando P l'anno corrente del periodo giuliano, N l'anno corrispondente dell'era volgare, si avrà per gli anni posteriori al principio dell'era cristiana

$P = 4713 + N$, e per gli anni anteriori $P = 4714 - N$, ove è da osservarsi che la differenza di un'unità deriva dal non esistere nel computo cronologico l'anno zero, ma tosto si passa dal -1 a $+1$ dell'era volgare; 2.° porge il periodo giuliano la seguente comodissima regola per trovare l'aureo numero, il ciclo solare e l'indizione romana di un qualunque anno. » All'anno proposto aggiungete 4713; » dividete la somma per 19, 28, 15 tenendo conto in ogni divisione » dei residui. Il residuo della prima divisione sarà l'aureo numero; » quello della seconda il ciclo solare, e della terza l'indizione romana. » Se il residuo fosse in qualche divisione = 0, il suo divisore costi- » tuisce il ciclo corrispondente ».

Del computo cronologico delle altre nazioni, ed in particolare dei Turchi e degli Ebrei.

538. Gli antichi popoli valutavano il tempo diversamente, e per lo più si servivano del moto della Luna. Formando l'anno di 12 mesi prendevano il mese ora di 29 ed ora di 30 giorni principiando ciascun mese dal novilunio. Un tale metodo si segue ora esattamente dai Turchi ed in parte anche dagli Ebrei. Egli però ha il gravissimo incomodo che il principio dell'anno corrisponde a stagioni sempre diverse, e solo dopo 30 anni si ripristina nello stesso ordine, il che apporta molta confusione nei precetti popolari per le operazioni campestri.

Gli antichi Egiziani, i Greci, e poi anche i Romani avendo riconosciuto che l'annua rivoluzione del Sole si compie in 365 giorni, stabilirono questo intervallo per la durata dell'anno per meglio regolare i lavori dell'agricoltura, e divisero l'anno in 12 mesi formandone ognuno di 30 giorni; in fine dell'anno poi aggiungevano i residui cinque giorni sotto il nome di *epagomeni*. Questo sistema è tuttavia in vigor presso alcune nazioni alle Indie orientali, come al Pegù od impero di Ava.

Non tutti i popoli principiarono l'anno verso il solstizio d'inverno col primo di Gennajo, come noi siamo ora soliti di fare. Gli antichi Romani lo principiavano in Marzo verso l'equinozio di primavera, i Greci in Settembre; che anzi presso i moderni in Europa non è molto tempo che generalmente si conta il principio dell'anno dal 1 di Gennajo. In Francia avanti il 1564 si contava dal giorno di Pasqua; ed in Inghilterra prima del 1752 cominciavasi dal 25 di Marzo; in molti altri luoghi facevasi principiare dal 21 Marzo; così a Venezia oltre il 1 Gennajo eravi il computo detto *more veneto*, il quale cadeva appunto nel 21 Marzo. Gli Ebrei in molti luoghi contano l'anno eccle-

siastico dal novilunio che precede l'equinozio di Marzo, e l'anno civile dal novilunio precedente l'equinozio di Settembre.

Tutte queste varietà apportano grandissima confusione nella storia, e fanno incontrare nei calcoli cronologici difficoltà presso che inestricabili, dalle quali non si sorte che per via di congetture. Ci limiteremo a fare alcuni cenni del computo dei Turchi e degli Ebrei, che si rendono interessanti per li nostri rapporti commerciali.

539. Il calendario dei Turchi è regolato semplicemente sull'anno lunare, ed è per modo disposto che il principio di ogni mese cada nel novilunio, onde apparisce che i giorni del mese indicheranno in questo sistema l'età media della Luna. La loro era appellasi *egira*, e ne fissano il principio dalla fuga di Maometto dalla Mecca, la quale ebbe luogo il 16 Luglio dell'anno 622 dell'era nostra.

A base del calendario stabiliscono i Turchi la rivoluzione *sinodica* della Luna = $29^{g}\ 12^{h}\ 44'$, ed in tal guisa 12 lunazioni formano $354^{g}\ 8^{h}\ 48'$. Facendo gli anni comuni di 354 giorni, rimangono in ogni anno $8^{h}\ 48'$, le quali ripetute 30 volte costituiscono 11 giorni, che essi intercalano nello stesso periodo formando 11 anni di 355 giorni. Si contano gli anni di questo ciclo per numeri progressivi da 1 fino a 30, e gli anni del ciclo 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29 sono gl'intercalari; il giorno aggiunto si pone in fine dell'ultimo mese dell'anno. Uno di questi periodi abbraccia 10361 giorni precisamente.

La seguente tabella contiene i nomi dei mesi dei Turchi col numero dei giorni, di cui ciascheduno è composto, e col numero dei giorni che decorrono dal principio dell'anno fino al principio di ciascun mese, o ultimo giorno del precedente. Io qui avverto che ho ritenuto i nomi che trovansi nella celebre opera intitolata: *Art de verifier les dates*, sebbene siavi qualche leggera differenza con quelli adottati dal chiarissimo signor Bode nelle sue Effemeridi di Berlino.

Mesi		gior. scorsi fino al princ. del mese
1) Moharram o Muharram . . . . . di	30ᵍ	0
2) Séfer, o Safar, o Suphar	29	30
3) Rabie I, o Rabiel-Aoual	30	59
4) Rabie II, o Rabi el-Aker	29	89
5) Giumadi I, o Gioumaasil-Euvel . .	30	118
6) Giumadi II, o Gioumaasil-Achir . .	29	148
7) Redgeb, o Regibab	30	177
8) Schaban, Sahaben, Sahaban	29	207
9) Ramadhan, o Ramazan	30	236
10) Schoual, Schewal, o Scherrail . . .	29	266
11) Dzoulchaada, Dulhajadat, o Zilkaade .	30	295
12) Dzouledge, Dulkagiadath, Dulheggiah .	29	325
alla fine di Dulheggiah		354

Negli anni intercalari l'ultimo mese si forma di 30 giorni, e l'anno è composto di 355 giorni.

540. Dietro le cose precedenti è facile trovare la corrispondenza fra il nostro computo e quello dell'egira, operando come nei due seguenti esempj sarà indicato.

1.° Domandasi il giorno a cui corrisponde nell'egira il 12 Aprile 1818 (nuovo stile). Riducasi primieramente la data epoca al vecchio stile giuliano, togliendo nel caso presente 12 giorni; si cade così nel 31 Marzo. Cadendo il primo giorno dell'egira ai 16 Luglio del 622, sarà il suo principio o stabilimento ai 15 Luglio dello stesso mese. Perciò si operi come segue

Tempo dato . . . 1818; 31 Marzo ossia .	1817ᵐ	+	90ᵍ
Principio dell'egira 622; 15 Luglio ossia .	621	+	196
differenza .	1195	+	259

Questa differenza si riduca in giorni, otterremo

Anni comuni 1195	=	436175ᵍ
Bisestili intercalati fra il 622 ed il 1818. . .	=	299
Giorni residui sopra trovati	=	259
somma	=	436733

Dividasi questa somma per 10631; il quoto intero 41 segnerà il numero dei periodi dell'egira revoluti; il residuo 862 diviso per 354 darà il numero degli anni revoluti, i quali saranno 2; il nuovo residuo 154 mostra che correrebbe il giorno 154 del 3 anno del 42 ci-

clo. Ma poichè il secondo anno del periodo è intercalare, così non correrà che il giorno 153. Ora 41 cicli formano 1230 anni dell'egira: pertanto il giorno dato corrisponderà al 153mo dell'anno 1233 dell'egira, il quale dietro la superiore tabella cade sul 5 giorno di Giumadi II, come appunto rilevasi dalle Effemeridi di Berlino dello stesso anno.

2.° Domandasi il giorno a cui corrisponde il 1 di Dzoulchaada dell'anno 1243 dell'egira. Siccome tal giorno costituisce dietro la superiore tabella il 296mo dell'anno, così dal principio dell'egira saranno revoluti $1242^{an} + 296^{g}$, ovvero cicli 41, an. 12, giorni 296. Siccome poi nel periodo di 30 anni quelli indicati dai numeri 2, 5, 7, 10 sono intercalari, così in questi 12 anni ve ne saranno 4 di 355 giorni. Pertanto il numero completo dei giorni decorsi dal principio dell'egira fino al dato giorno sarà
$= 10631.41 + 354.12 + 296 + 4 = 440419^{g}$. Ad oggetto di evitare ogni difficoltà sul numero dei bisestili è opportuno partire dal 0 Gennajo dell'anno 621, da cui principia una nuova serie di bisestili, piuttosto che dal 15 Luglio del 622, e perciò basterà aggiungere al precedente numero $196^{g} + 365^{g}$, ossia 561^{g}. Così il numero dei giorni trascorso dopo revoluto tutto l'anno 620 sarà
$= 440419 + 561 = 440980$. Questo numero dividasi per 1461 (numero dei giorni costituenti 4 anni giuliani); si otterrà per quoto intero 301 col residuo di 1219 giorni, i quali divisi per 365 danno 3 anni e giorni 124. Sarà pertanto il tempo nel calendario nostro corrispondente al dato giorno dell'egira così rappresentato

Epoca giuliana revoluta da cui si parte . . .	620^{an}	—
Periodi 301 di 4 anni fanno	1204	—
Anni comuni, e giorni residui.	3 +	124^{g}
Giorni soppressi per la riforma gregoriana		12
Epoca corrispondente revoluta	1827 +	136^{g}

cioè correrà il giorno 136^{g} dell'anno 1828, che per essere bisestile corrisponde al 15 Maggio, come appunto rilevasi dalle Effemeridi di Berlino.

Sarebbe ora facile tradurre a formule generali i superiori precetti aritmetici; ma sono essi di sì facile applicazione nella loro forma primitiva, che stimiamo inutile d'intrattenerci di più in questo argomento.

541. Il nuovo anno giudaico è fondato sopra una combinazione di moti lunari e solari. Essi si regolano sui moti lunari, e formano gli anni di 12 mesi alternativamente composti di 30 e 29 giorni; ma volendo che il principio dell'anno civile non si allontani dall'equinozio di autunno, e quindi quello dell'anno ecclesiastico sia sempre prossi-

mo all' equinozio di primavera, sono obbligati d'intercalare un intero mese ogni tre anni, e formare così un anno di 13 mesi che appellasi *embolismico*. In tal guisa i loro anni comuni sono composti di 354 giorni, e gli anni embolismici di 384. Di più per i loro precetti religiosi l'anno civile non dovendo giammai principiare nè in Domenica, nè in Mercordì, nè in Venerdì, sono obbligati di fare alcuni anni comuni di 353 giorni, ed altri di 355, e gl' intercalari poi di 383 e di 385 giorni. Gli anni di 353 e di 383 giorni chiamansi *deficienti*, e gli altri di 355 e di 385 giorni si dicono *abbondanti*.

Si contano gli anni dagli Ebrei partendo da un novilunio che fingono aver avuto luogo l'anno 953 del periodo giuliano il 7 Ottobre a $11^h \frac{204}{1080}$ del meridiano di Gerusalemme; donde apparisce che un qualunque anno giudaico A deve avere il suo principio verso l'autunno dell' anno $A - 3760$ dell' era nostra; ed indicando per B l'anno nostro, nel cui autunno principia l'anno giudaico A, valerà l'equazione $B = A - 3760$.

Uniremo qui i nomi dei mesi col numero dei giorni, di cui vengono essi composti nell' anno civile ebraico.

1) Tisri . . di 30^s	5) Shebat. di 30^s	9) Sivan . di 30^s
2) Marchesvan 29	6) Adar. . . . 29	10) Thamuz . . 29
3) Caslen. . . 30	7) Nisan . . . 30	11) Ab 30
4) Tebeth . . 29	8) Jiaar. . . . 29	12) Elul 29

Negli anni embolismici il mese 13 s'inserisce dopo il mese di Adar col nome di Ve-Adar o Adar II, e formasi sempre di 29 giorni, ed allora Adar componesi di 30 giorni. Negli anni deficienti Casleu si valuta di 29 giorni, e negli eccedenti Marchesvan di 30 giorni. La Pasqua viene da essi celebrata il giorno 15 del mese di Nisan, ed il principio del seguente anno ha sempre luogo 163 giorni dopo la Pasqua.

542. Tutte queste eccezioni rendono complicato il calcolo della corrispondenza fra il computo ebraico ed il nostro. Devesi al celebre Gauss una regola puramente aritmetica per fissare il giorno 15 di Nisan, di un qualunque anno, da cui poi dipende il principio dell' anno seguente. Fu questa senza dimostrazione pubblicata nel volume V della *Monatliche correspondenz* di Zach pag. 435, ed al signor cav. Cisa Gresy professore di meccanica nell' Università di Torino siamo debitori di una bella e dettagliata dimostrazione di queste regole, e di tutte le avvertenze che richiedono, la quale può vedersi nella Corrispondenza astronomica dello stesso Zach in francese pubblicata a Genova (vol. I pag. 556, *Genes* 1818). Noi qui riferiremo soltanto, a

comodo dei nostri lettori, la citata regola del signor Gauss, con l'esempio e le avvertenze dallo stesso prescritte.

Si debba pertanto determinare in qual giorno del computo gregoriano nell'anno B dell'era volgare cade il 15 Nisan dell'anno giudaico A, fra A e B regnando l'equazione $B = A - 3760$. Si operi nel seguente modo.

» Si divida $12A + 17$, od anche $12B + 12$ per 19, e chiamisi a il residuo; si divida A od anche B per 4, e sia b il residuo. In seguito si calcoli il valore di

» $32,0440932 + 1,5542418\,a + 0,25\,b - 0,003177794\,A$,

» ovvero di

» $20,0955877 + 1,5542418\,a + 0,25\,b - 0,003177794\,B$,

» e pongasi $= M + m$, M essendo il numero intero, ed m la frazione decimale nel risultamento di questo calcolo. Finalmente si divida $M + 3A + 5b + 5$, od anche $M + 3B + 5b + 1$ per 7, e pongasi il resto $= c$. Ora si devono distinguere i seguenti quattro casi.

» I. Se $c = 2$, o 4, o 6, la Pasqua (a motivo di *Adu*) cade nel giorno $M + 1$ di Marzo vecchio stile, e nel giorno $M - 30$ d'Aprile se $M > 30$.

» II. Se $c = 1$, e nel tempo stesso $a > 6$, $m = 0 > 0,63287037$, la Pasqua (per la circostanza da essi detta *Getred*) cade nel giorno $M + 2$ di Marzo vecchio stile.

» III. Se $c = 0$, $a > 11$, ed $m = 0 > 0,89772376$, la Pasqua per la circostanza detta *Batu-Thakpat* cade nel giorno $M + 1$ di Marzo vecchio stile.

» IV. In tutti gli altri casi la Pasqua cade nel giorno M di Marzo vecchio stile.

» *Scolio I.* Determinato il giorno di Pasqua, si troverà il 1 di Tisri dell'anno seguente $A + 1$ aggiungendovi 163 giorni.

» *Scolio II.* L'anno A sarà anno comune di 12 mesi se $a < 12$; per lo contrario sarà embolismico, ossia di 13 mesi, quando riesca $a > 11$.

» *Esempio.* Sia $A = 5562$, sarà $B = 1802$; $12A + 17 = 66761$, $12B + 12 = 21636$. Se ambedue si dividono per 19, sarà il residuo $a = 14$. Quindi 5562, od anche 1802 divisi per 4 danno $b = 2$. Il calcolo di $M + m$ dalle due superiori espressioni darà

32,0440932	20,0955877
+ 21,7593852	+ 21,7593852
+ 0,5	+ 0,5
− 17,6748903	− 5,7263848
$M + m = 36,6285881$	$= 36,6285881$

„Però . . . $M = 36$;

$$\begin{array}{rr} M = & 36 \\ 3\,A = & 16686 \\ 5\,b = & 10 \\ 5 = & 5 \\ \hline = & 16737 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} m = & 0{,}6285881 \\ M = & 36 \\ 3\,B = & 5406 \\ 5\,b = & 10 \\ 1 = & 1 \\ \hline = & 5453 \end{array}$$

„Dividendo l'una o l'altra per 7, il residuo dà $c = 0$. Essendo poi „qui $m < 0{,}89772376$, il III caso non può aver luogo; perciò se„condo il IV caso la Pasqua giudaica cade il 36 Marzo, ossia il 5 „Aprile vecchio stile, che corrisponde al giorno 17 Aprile del nuovo „stile „.

543. Troppo ci diffonderemmo se volessimo in particolare far parola del modo di valutare il tempo nelle altre epoche principali, delle quali hanno fatto uso i diversi popoli della terra, e sortiremmo dai limiti prescritti a questi Elementi. Quelli dei nostri lettori che vogliono progredire nelle intralciate dottrine della cronologia devono rivolgersi ad altre opere, e sopra tutto alla citata *Art de verifier les dates*. Noi intanto crediamo di far cosa grata ed insieme vantaggiosa col riferire qui una tavola cronologica del signor professore Tittel, mediante la quale si potrà sempre con somma facilità passare da un'epoca ad un'altra. Trovasi essa inserita nell'eccellente Giornale tedesco che pubblicavasi a Stuttgart dai signori Lindenau e Bohnenberger sotto il titolo: *Zeitschrift für Astronomie, und verwandte wissenschaften* (vol. II pag. 251, Stutt. 1816). In questa tavola le epoche principali sono riferite all'era costantinopolitana, come di tutte la più remota, e si compone di quattro colonne. La prima contiene i nomi delle ere, la seconda annunzia il principio di ogni era in anni e parti millesime di anno dell'era costantinopolitana; la terza contiene questo stesso principio espresso in giorni e centesimi di giorno valutati dal principio della stessa era costantinopolitana; ambedue queste colonne portano il nome di *radici;* la quarta ed ultima contiene il numero dei giorni e parti di giorno, di cui si compone la media lunghezza dell'anno in ciascheduna era.

544. Ciò premesso, vediamo l'uso di questa tavola nella soluzione del seguente quesito generale di cronologia.

Si domanda il giorno a cui corrisponde un dato giorno δ dell'anno corrente a di un'era qualunque E in un'altra era E'.

Nell'epoca E saranno revoluti anni $a - 1$, e giorni $\delta - 1$. Sia ora la radice dell'epoca $E = \alpha$, il numero dei giorni compresi nel suo anno $= l$; per l'epoca E' la radice sia $= \alpha'$, il numero dei giorni del suo anno $= l'$; N il numero degli anni e parti d'anno revoluti

dal principio dell'era E' fino al dato tempo. Supponiamo inoltre che nell'era costantinopolitana il dato tempo corrisponda ad un numero d'anni e parti di anno revolute espresso da D; sia per questa ultima era il numero dei giorni contenuti nell'anno $= \lambda$, di modo che sarà $\lambda = 365\frac{1}{4}$.

Avremo dall'epoca E . . . $\lambda D = \alpha\lambda + l(a-1) + \delta - 1$,
dall'epoca E' . . . $\lambda D = \alpha'\lambda + l'N$,

dalle quali deducesi $N = \dfrac{(\alpha - \alpha')\lambda + l(a-1) + \delta - 1}{l'}$ . . . (1)

L'equazione (1) vale per gli anni posteriori al principio dell'epoca E; per gli anni anteriori con pari ragionamento si otterrà

$$N = \frac{(\alpha - \alpha')\lambda - [(a-1)l + \delta - 1]}{l'} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Gli esempj seguenti dimostreranno l'utilità della tavola cronologica, e la speditezza del metodo.

Esempio I. Si domanda a qual anno e giorno dell'era costantinopolitana corrisponda il primo giorno dell'anno 6531 del periodo giuliano. In questo caso vale evidentemente l'equazione (1), nella quale si farà $l = l' = \lambda$, $\delta = 1$, ed in conseguenza diverrà $N = (\alpha - \alpha') + (a - 1)$. Ora si ha dalla tavola $\alpha = 795,334$; $\alpha' = 000,000$, $a - 1 = 6530$. Dunque $N = 7325^{an},334$. Moltiplicando la frazione 0,334 per il numero dei giorni contenuti in un anno dell'era costantinopolitana, essa si cangia in $121^{s},994$, cioè 122^{s}. Sono decorsi pertanto 7325 anni, più 122 giorni, e quindi il giorno dato corrisponde al 123mo dell'anno 7326 dell'era costantinopolitana.

Esempio II. Si domanda (come sopra) l'anno dell'egira corrispondente al 31 Marzo 1818 vecchio stile. Qui si avrà $a = 1818$, $\delta = 90$, $l = \lambda = 365\frac{1}{4}$, $l' = 354\frac{11}{30}$, $\alpha = 5508,334$, $\alpha' = 6129,872$, $\alpha - \alpha' = -621,538$. Si troverà $(\alpha - \alpha' + a - 1)\,l + \delta - 1 = 436732^{s},495$. Questa quantità divisa per l', ossia per $354\frac{11}{30}$, dà $N = 1232^{an} + 152^{s},68$; (trascurate le frazioni di giorno) $N = 1232^{an} + 153^{s}$. Questo è il tempo revoluto sul principio del 31 Marzo; quindi il 31 Marzo decorre col 154 dell'anno 1233 dell'egira, che differisce dal superiore risultamento di un giorno. Se si fossero però adoperate le radici delle epoche espresse in giorni saremmo pervenuti al giusto risultamento. Tuttavia è bene avvertire che per le arbitrarie disposizioni del calendario le corrispondenze nell'egira, e nell'anno repubblicano di Francia possono differire dal vero di un giorno, e nel Molad Thou la differenza può ascendere a 20 giorni.

Esempio III. Tolommeo riferisce un'ecclisse di Luna osservata in

Alessandria nel giorno 27 dell'anno 366 di Nabonassar; si domanda il corrispondente anno e giorno dell'era volgare. Si ha $a = 366$, $\delta = 27$, $l = 365$, $l' = \lambda = 365\frac{1}{4}$. Quindi la formula (1) diverrà $N = \alpha - \alpha' + \frac{(a-1)\,l + \delta - 1}{\lambda}$, di cui eccone il calcolo

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 4761{,}488 \\ \alpha' = & 5508{,}334 \\ \hline \alpha - \alpha' = & -746{,}846 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (a-1)\,l = & 133225 \\ \delta - 1 = & 26 \\ \hline = & 133251 \end{array}$$

In seguito si troverà $[(a-1)\,l + \delta - 1] : \lambda = +364^{an},821$

$$\begin{array}{rl} \alpha - \alpha' = & -746\ ,846 \\ \hline N = & -382\ ,025 = -(382^{an}\,9^{s}) \end{array}$$

Quindi la detta osservazione cade nell'anno 383 avanti Gesù Cristo il 23 di Dicembre.

Esempio IV. Si domanda a qual anno e giorno della nostra epoca corrisponda il primo giorno dell'anno III della Olimpiade 199. Conviene in primo luogo sapere che l'Olimpiade presso i Greci rappresentava un periodo di quattro anni, in fine del quale si rinnovavano i famosi giuochi olimpici. Quindi nel citato esempio saranno revolute 198 intere Olimpiadi a partire dal loro principio, che formano 792 anni. Avremo perciò $a = 795$ anni, $\delta = 1$, $l = l' = \lambda = 365\frac{1}{4}$; perciò $N = \alpha - \alpha' + a - 1$. Ora la tavola dà

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 4732{,}830 \\ \alpha' = & 5508{,}334 \\ \hline \alpha - \alpha' = & -775{,}504 \\ a - 1 = & +794{,}000 \\ \hline N = & +\ 18{,}496 = +\ 18^{an} + 181^{s} \end{array}$$

Quindi il giorno richiesto corrisponde al 182mo dell'anno 19 dell'era volgare, ossia cade nel 1 Luglio di quello stesso anno, come appunto riscontrasi nella tavola cronologica dell'arte di verificare le date più volte citata.

TAVOLA per la riduzione delle epoche cronologiche.

Nomi delle principali epoche	Radici espresse		lungh. media d. anno in gior.
	in anni e mill. d'ann.	in giorni e cent. di giorn.	
Era costantinopolitana (dalla creazione) . . .	0,000	0,00	365 $\frac{1}{4}$
Era alessandrina degli storici greci	15,000	5478,75	365 $\frac{1}{4}$
Periodo greco-romano	15,334	5600,75	365 $\frac{1}{4}$
Creazione secondo Eusebio	309,000	112862,25	365 $\frac{1}{4}$
Periodo giuliano	795,334	290495,75	365 $\frac{1}{4}$
Periodo di Jobel	1328,060	485074,00	365 $\frac{1}{4}$
Creazione secondo gli autori cristiani. . . .	1525,153	557061,25	365 $\frac{1}{4}$
Molad Thou, o N.° an. giud. dalla creazione .	1747,100	638127,75	365 $\frac{1}{4}$
Principio delle Olimpiadi	4732,830	1728668,25	365 $\frac{1}{4}$
Fondazione di Roma secondo i Fasti capitolini .	4754,334	1736520,50	365 $\frac{1}{4}$
secondo Varrone . . .	4755,334	1736885,75	365 $\frac{1}{4}$
Era di Nabonassar, o Era matematica. . . .	4761,488	1739133,50	365 $\frac{1}{4}$
Era di Filippo Arideo	5185,200	1893893,25	365 $\frac{1}{4}$
Era di Ales.°, detta dei Seleucidi o di Dhilkarnaim	5197,084	1898234,25	365 $\frac{1}{4}$
Liberaz. di Antiochia, o Era cesar. di Antiochia	5460,000	1994265,00	365 $\frac{1}{4}$
Epoca della correzione di Giulio Cesare. . .	5463,334	1995482,75	365 $\frac{1}{4}$
Era di Spagna.	5470,334	1998039,50	365 $\frac{1}{4}$
Era Azziaca	5478,003	2000840,50	365 $\frac{1}{4}$
Era cesarea d'Egitto.	5478,992	2001201,75	365 $\frac{1}{4}$
Era cesarea romana	5481,334	2002057,25	365 $\frac{1}{4}$
Nascita di Gesù Cristo, o Era volgare . . .	5508,334	2011919,00	365 $\frac{1}{4}$
Era di Diocleziano, od Era dei Martiri . . .	5791,994	2115525,75	365 $\frac{1}{4}$
Egira, o foga di Maometto dalla Mecca . . .	6129,872	2238936,00	354 $\frac{11}{30}$
Era persiana d'Isdegerde III (dal suo ev. al trono)	6139,793	2242559,75	365
Era gelaleana, o rif. di Malek-Schah-Dgelaleddin	6586,529	2405731,50	365 $\frac{8}{33}$
Repubblica francese	7300,031	2666336,25	365 $\frac{109}{430}$

NB. La vera lunghezza media dell' anno giudaico è = 365 $\frac{29311}{98496}$, in luogo della quale si è scritto 365 $\frac{1}{4}$ a quella prossima. Se nei confronti si aspiri a maggior esattezza, si dovrà adoperare il numero precedente.

APPENDICE

riguardante la teoria delle perturbazioni planetarie; Esposizione del metodo per calcolarne l'effetto colle meccaniche quadrature.

545. Abbiamo nel capitolo III di questo volume trattato con sufficiente estensione del moto dei pianeti intorno al Sole, in quanto che questo dipende dall'azione principale del Sole, ed abbiamo dimostrato che in virtù della medesima ciaschedun pianeta descriverebbe una delle tre sezioni coniche compresa in un piano fisso nello spazio, ed i cui parametri rimarrebbero costantemente inalterabili; abbiamo in pari tempo mostrato parte per le osservazioni dei pianeti aventi satelliti, parte per congettura che nel centro di ciaschedun pianeta deve riguardarsi come residente una forza di attrazione in vero molto più piccola di quella del Sole, però abbastanza forte per turbarne gli effetti, e rendere variabili tanto la grandezza dei parametri, quanto la posizione dei piani delle orbite. La teoria di queste perturbazioni ed i precetti che se ne deducono per determinare ad un istante qualunque la posizione di un corpo celeste costituiscono il principale oggetto della meccanica celeste, e formano un complesso di dottrine molto complicato; ma nel tempo stesso feconde di utili teoremi e di elegantissimi risultamenti, onorevole senza dubbio allo spirito umano, e dovuto ai sublimi genj di Newton, Eulero, La-Grange, Condorcet, ed in particolare modo al celebre La-Place, nella cui Meccanica celeste si trovano ampiamente, e con bell'ordine tutte queste difficili teorie sviluppate e ridotte a numeri. Troppo ci dilungheremmo dal piano stabilito a questi elementi se con qualche estensione prendessimo a trattare questi argomenti, per lo sviluppo dei quali ci è forza rimandare gli studiosi alla citata Meccanica celeste del signor La-Place, ed alle molte interessanti Memorie intorno a ciò disseminate per gli Atti delle Accademie; quindi solo ci ristringeremo ad assegnare le equazioni differenziali, dalle quali dipende la ricerca delle perturbazioni che per l'azione di un pianeta principale soffre il moto ellittico di un altro, ed indicare come per via delle meccaniche quadrature se ne possa stimare l'influenza sul moto dei nuovi pianeti, l'orbita dei quali è molto eccentrica, o di una cometa, di cui siasi già presso a poco determinato il periodo.

546. Prendiamo pertanto a considerare due pianeti nello spazio,

le masse dei quali siano rappresentate per m, m'; quella del Sole essendo $= 1$, e ricerchiamo le equazioni dalle quali dipende la posizione di m rapporto ad S. È palese in primo luogo che non ricercandosi qui che la posizione di m rapporto ad S, si potrà stabilire il centro del Sole come fisso, attribuendo ad m un moto rivolto in parte contraria a quello di S, ovvero trasportando sopra m le forze che per le azioni di m ed m' si esercitano sul centro del Sole, ma dirette in parte contraria.

Ciò premesso, si riferiscano le posizioni di m, m' ad un piano fisso condotto per il centro del Sole mediante coordinate rettangole, e siano alla fine del tempo t contato da un'epoca qualunque x, y, z le tre coordinate di m, r la sua distanza dal centro del Sole; le stesse quantità per m' siano indicate da x', y', z', r'. L'attrazione del Sole sopra S sarà $= \frac{1}{r^2}$; quella del pianeta m sul Sole sarà $= \frac{m}{r^2}$; *perciò*, supposto fisso il centro del Sole, per l'azione riunita di S e di m sarà questo spinto verso il centro di quello da una forza acceleratrice $= \frac{1+m}{r^2}$, che decomposta nella direzione delle tre coordinate darà le componenti $-\frac{(1+m)x}{r^3}$, $-\frac{(1+m)y}{r^3}$, $-\frac{(1+m)z}{r^3}$; alle quali si appone il segno negativo, perchè tendono ad avvicinare il pianeta m all'origine delle coordinate.

Consideriamo ora l'attrazione di m' tanto sopra il Sole, quanto sopra di m; è palese che m' eserciterà sul centro del Sole un'azione rappresentata da $\frac{m'}{r'^2}$, la quale decomposta nel senso dei tre assi ortogonali darà le componenti $\frac{m'x'}{r'^3}$, $\frac{m'y'}{r'^3}$, $\frac{m'z'}{r'^3}$; supponendo pertanto il centro del Sole fisso, in virtù dell'azione di m' si dovranno considerare in aggiunta alle precedenti le forze acceleratrici $-\frac{m'x'}{r'^3}$, $-\frac{m'y'}{r'^3}$, $-\frac{m'z'}{r'^3}$, alle quali si dà il segno $-$ perchè tendono ad avvicinare i centri di m e di S.

Per ultimo m' eserciterà sopra m una forza di attrazione rappresentata da $\frac{m'}{\varrho^2}$, indicando per ϱ la distanza di m da m', che è data dall'equazione $\varrho = \sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}$. Se questa si decomponga nel senso dei tre assi ortogonali, darà evidentemente le componenti $\frac{m'(x'-x)}{\varrho^3}$, $\frac{m'(y'-y)}{\varrho^3}$, $\frac{m'(z'-z)}{\varrho^3}$, che si dovran-

no prendere col segno positivo, perchè questa forza tende ad allontanare m da S.

Risulta da ciò che il pianeta m sarà animato al moto intorno al centro del Sole dalle forze (ponendo $1 + m = \mu$)

$$-\frac{\mu x}{r^3} - \frac{m' x'}{r'^3} + \frac{m'(x' - x)}{\varrho^3}; \quad -\frac{\mu y}{r^3} - \frac{m' y'}{r'^3} + \frac{m'(y' - y)}{\varrho^3};$$
$$-\frac{\mu z}{r^3} - \frac{m' z'}{r'^3} + \frac{m'(z' - z)}{\varrho^3}.$$

Allo stesso modo se un altro corpo m'' determinato dalle coordinate rettangole x'', y'', z'', distante dal centro del Sole di una quantità $= r''$, e dal pianeta m di una quantità $= \varrho' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]}$ esercita sopra di m e di S una forza di attrazione in ragione inversa dei quadrati delle distanze, si dovranno alle precedenti forze acceleratrici aggiungere per l'azione di m'' i seguenti termini

$$-\frac{m'' x''}{r''^3} + \frac{m''(x'' - x)}{\varrho'^3}; \quad -\frac{m'' y''}{r''^3} + \frac{m''(y'' - y)}{\varrho'^3};$$
$$-\frac{m'' z''}{r''^3} + \frac{m''(z'' - z)}{\varrho'^3};$$

e così per quanti altri corpi si potessero immaginare.

Uguagliando ora la somma di tutte le forze acceleratrici secondo i tre assi rispettivi a $\frac{d^2 x}{d t^2}$, $\frac{d^2 y}{d t^2}$, $\frac{d^2 z}{d t^2}$, e trasportando tutti i termini nel primo membro, si formeranno le seguenti tre equazioni differenziali per determinare la posizione di m intorno al Sole

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{m' x'}{r'^3} - \frac{m'(x' - x)}{\varrho^3} + \frac{m'' x''}{r''^3} - \frac{m''(x'' - x)}{\varrho'^3} \text{ ec.} = 0 \\
\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \frac{m' y'}{r'^3} - \frac{m'(y' - y)}{\varrho^3} + \frac{m'' y''}{r''^3} - \frac{m''(y'' - y)}{\varrho'^3} \text{ ec.} = 0 \\
\frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{m' z'}{r'^3} - \frac{m'(z' - z)}{\varrho^3} + \frac{m'' z''}{r''^3} - \frac{m''(z'' - z)}{\varrho'^3} \text{ ec.} = 0
\end{array}\right\} \text{(A)}$$

Si può dare a queste equazioni anche un aspetto più semplice ponendo

$$R = \frac{m'(x x' + y y' + z z')}{r'^3} - \frac{m'}{\varrho} + \frac{m''(x x'' + y y'' + z z'')}{r''^3} - \frac{m''}{\varrho'} + \ldots$$

ed è palese che le equazioni (A) prenderanno il seguente aspetto

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}+\left(\frac{dR}{dx}\right)=0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}+\left(\frac{dR}{dy}\right)=0\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}+\left(\frac{dR}{dz}\right)=0\end{aligned}\right\}\ (B)$$

547. Se si potessero assegnare gl'integrali di queste equazioni otterremmo i valori delle coordinate x, y, z in funzione del tempo t, e delle coordinate dei corpi m', m'' ec.; e se queste pure fossero date in funzione del tempo, ne potremmo dedurre i precetti per calcolare ad ogni istante la posizione del pianeta m. Tutti i tentativi però finora intrapresi per integrare esattamente le precedenti equazioni ritornarono vani, e perciò fu forza ricorrere ai metodi di *approssimazione*. Fortunatamente la piccolezza delle masse perturbatrici m', m'' ec. in faccia alla massa solare rende abbastanza comodi e spediti i metodi di approssimazione, non aggiungendosi per la loro influenza che delle correzioni piccolissime a quella posizione, che si otterrebbe per m nel caso in cui fosse $R = 0$, ossia nel caso superiormente contemplato, in cui non si ha riguardo che alle scambievoli azioni di S e di m. Ora in questa ipotesi, il pianeta m descrive intorno al Sole una sezione conica compresa in un piano fisso e determinato con parametri pure invariabili, e lo stesso ha luogo per gli altri pianeti m', m''... i quali costituirebbero così altrettanti separati sistemi indipendenti gli uni dagli altri.

I termini pertanto $\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $\left(\frac{dR}{dy}\right)$, $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ rappresentano le correzioni piccolissime delle equazioni differenziali del moto ellittico, e se si trascurano i termini di secondo ordine delle forze perturbatrici, è palese che si potrà in essi scrivere in luogo delle coordinate dei corpi m, m', m''... quelle che si otterrebbero ad ogni istante dalla semplice supposizione del moto ellittico; la qual circostanza facilita di gran lunga le approssimazioni, e conduce ad esatti risultamenti per la estrema piccolezza di m', m''... eccettuati alcuni casi, nei quali per circostanze particolari i termini del secondo ordine delle masse perturbatrici esercitano una sensibile influenza, dei quali non faremo qui alcuna parola. Noi pertanto ci faremo a ricercare dalle superiori equazioni le piccole variazioni del raggio vettore, della longitudine dell'orbita, e della latitudine dipendenti dalle perturbazioni dei pianeti m', m'' nell'ipotesi che siano trascurabili le seconde potestà delle forze perturbatrici.

548. Se si moltiplichino le equazioni (B) del § 546 rispettivamente

per dx, dy, dz, si sommino e poi s'integrino, si otterrà la seguente equazione

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2\int dR=0 \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

nella quale il differenziale dR è unicamente relativo alle coordinate del corpo m, mentre l'integrale si estende a tutte le quantità che variano da un istante all'altro; $\frac{\mu}{a}$ è la costante introdotta dall'integrazione, ed è tale che quando R è $=0$, sia a il semigrand'asse della sezione conica percorsa da m intorno al Sole, come tosto rilevasi dall'osservare che $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ è il quadrato della velocità (§ 324).

Se ora si somma l'equazione (C) alle equazioni (B) moltiplicate rispettivamente per x, y, z, e si osserva inoltre che $r^2=x^2+y^2+z^2$, si vedrà facilmente potersi una tal somma scrivere sotto la forma

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2\int dR+x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right)+z\left(\frac{dR}{dz}\right)=0 \quad (D)$$

la quale ci condurrà agevolmente alla correzione del raggio vettore.

S'indichi in fatti per δr la parte del raggio vettore dipendente dalle forze perturbatrici, di modo che sia questo $=r+\delta r$, indicandosi qui per r la parte ellittica del medesimo. Se in luogo di r scrivasi $r+\delta r$ nell'equazione precedente, e si osservi che i termini indipendenti da R devono ivi annullarsi per le condizioni del moto ellittico, è palese che trascurando i termini dell'ordine $(\delta r)^2$, avremo l'equazione

$$\frac{d^2r\delta r}{dt^2}+\frac{\mu r\delta r}{r^3}+2\int dR+rR'=0 \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

dove per brevità abbiamo posto $rR'=x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right)+z\left(\frac{dR}{dz}\right)$, e dove non conviene perdere di vista che nel termine $2\int dR$ le differenziazioni sono relative soltanto alle coordinate del corpo m.

Si può ora facilmente ottenere il valore di δr, od almeno farlo dipendere dalle ordinarie integrazioni per quadratura, combinando la precedente equazione (E) colle equazioni (B); in fatti eliminando $\frac{\mu}{r^3}$ successivamente dalla prima, e dalla seconda delle dette equazioni, e trascurando i termini $r\delta r\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $r\delta r\left(\frac{dR}{dy}\right)$ perchè di secondo ordine rapporto alle forze perturbatrici, si avranno le due seguenti equazioni, nelle quali ponesi per brevità $Q=2\int dR+rR'$,

$$\frac{r\delta r d^2 x - x d^2 r \delta r}{d t^2} - Q x = 0; \quad \frac{r \delta r d^2 y - y d^2 r \delta r}{d t^2} - Q y = 0.$$

S'integrino queste due equazioni, e trascurando la costante arbitraria, che può supporsi compresa nei simboli d'integrazione, si avranno le due seguenti

$$\frac{d x r \delta r - x d r \delta r}{d t} - \int Q x d t = 0; \quad \frac{d y r \delta r - y d r \delta r}{d t} - \int Q y d t = 0.$$

e fra queste finalmente eliminando il termine $d r \delta r$, si otterrà dietro ovvie riduzioni

$$r \delta r = (x \int Q y d t - y \int Q x d t) : \left(\frac{x d y - y d x}{d t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

nel secondo membro della quale le coordinate dei pianeti sono funzioni del tempo, e per esse si possono sostituire i loro valori relativi alla teoria del moto ellittico.

549. L'equazione precedente si può scrivere anco sotto un aspetto più comodo, se a piano delle x, y scelgasi il piano dell'orbita del pianeta m ad un'epoca determinata. In tale ipotesi la terza coordinata z sarà sempre piccolissima, e dell'ordine delle forze perturbatrici; l'espressione $x d y - y d x$ diviene l'area trascorsa dal raggio vettore intorno al centro del Sole, e perciò la teoria del moto ellittico darà $\frac{x d y - y d x}{d t} = \sqrt{[\mu a (1 - e^2)]}$. Se per asse delle x prendesi quella linea, da cui gli Astronomi contano le longitudini dell'orbita, e chiamisi l l'angolo con essa fatto dal raggio vettore r, ossia la *longitudine* nell'orbita, n il moto diurno siderale medio di m intorno al Sole, avremo primieramente $x = r \cos l$; $y = r \operatorname{sen} l$; $\sqrt{\mu} = n a^{3/2}$. Inoltre, per le fatte posizioni, sarà

$Q = 2 \int d R + x \left(\frac{d R}{d x}\right) + y \left(\frac{d R}{d y}\right) + z \left(\frac{d R}{d z}\right)$, ovvero (trascurando $z \left(\frac{d R}{d z}\right)$, perchè di second'ordine rapporto alle forze perturbatrici)

$Q = 2 \int d R + x \left(\frac{d R}{d x}\right) + y \left(\frac{d R}{d y}\right)$.

Osservo ora che essendo R frazione di x, y ed $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, si avrà $\left(\frac{d R}{d r}\right) = \left(\frac{d R}{d x}\right)\left(\frac{d x}{d r}\right) + \left(\frac{d R}{d y}\right)\left(\frac{d y}{d r}\right) = \cos l \left(\frac{d R}{d x}\right) + \operatorname{sen} l \left(\frac{d R}{d y}\right)$, che moltiplicata per r, darà $r \left(\frac{d R}{d r}\right) = x \left(\frac{d R}{d x}\right) + y \left(\frac{d R}{d y}\right) = r R'$, e perciò $Q = 2 \int d R + r R'$, R' essendo $= \left(\frac{d R}{d r}\right)$.

Sostituendo questi valori nella precedente equazione, essa darà

$$\delta r = \frac{\cos l \int (2 \int dR + rR') r \operatorname{sen} l\, dt - \operatorname{sen} l \int (2 \int dR + rR') r \cos l\, dt}{\sqrt{[\mu a (1 - e^2)]}},$$

e finalmente moltiplicando sotto e sopra per $\sqrt{\mu}$, e ponendo nel numeratore $\sqrt{\mu} = n a^{3/2}$, si otterrà

$$\delta r = \frac{a \cos l \int [r \operatorname{sen} l (2 \int dR + rR') n\, dt] - a \operatorname{sen} l \int [r \cos l (2 \int dR + rR') n\, dt]}{\mu \sqrt{(1 - e^2)}} \quad (G)$$

la quale equazione è molto comoda tanto per calcolare il valore di δr colle quadrature ordinarie, quanto per esprimerlo col mezzo di una serie, come si suole praticare nella teoria dei pianeti, le orbite dei quali siano pochissimo eccentriche, e poco fra loro inclinate.

550. Passiamo in secondo luogo a ricercare la correzione indotta alla longitudine ellittica di m per l'azione dei pianeti m', m'' ec.; prima di tutto osserveremo che alterandosi continuamente la posizione del piano dell'orbita per queste attrazioni, gli angoli da m trascorsi intorno al Sole non sono tutti in uno stesso piano; ma è facile di vedere che la loro somma in un tempo dato non differisce dalla sua projezione che in quantità di second'ordine rapporto alla inclinazione dell'orbita variabile al piano fisso delle x e delle y. In tal modo se questo ad un istante facciasi, come nel § precedente, corrispondere al piano dell'orbita, sarà questa differenza sempre dell'ordine del quadrato delle forze perturbatrici, e quindi trascurabile. Basterà perciò assegnare la correzione della somma degli angoli dal pianeta trascorsi nello spazio, e porla $= \delta l$.

Riprendiamo a tale oggetto la superiore equazione (C), ed osservando che $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ è l'elemento di curva descritto nel tempo dt, il quale è anco $= \sqrt{(dr^2 + r^2 dv^2)}$, se dv rappresenta l'angolo descritto nello stesso tempuscolo intorno al Sole compreso fra i raggi r, $r + dr$, essa diverrà

$$\frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2 \int dR = 0.$$

Confrontandola con l'equazione (D) per eliminare $\frac{\mu}{a}$, si otterrà

$$\frac{r^2 dv^2}{dt^2} = \frac{r\, d^2 r}{dt^2} + \frac{\mu}{r} + rR'.$$

Fingendo ora che δr, δv siano le correzioni piccolissime dipendenti dalle perturbazioni, è palese che scrivendo in luogo di r, $r + \delta r$; ed in luogo di v ponendo $v + \delta v$, i termini indipendenti da R, e non affetti dalla caratteristica δ si distruggeranno per le condizioni del moto ellittico, e resterà fra le correzioni δr, δv un'equazione che si

formerà dalla precedente, qualora si differenzii rapporto a questa caratteristica, e si distruggano i termini che ne risultano mediante l'espressione rR', la quale rimane inalterata per essere dell'ordine delle forze perturbatrici. Si troverà in tal guisa l'equazione

$$\frac{2r^2 dv d\delta v}{dt^2} + \frac{2r dv^2 \delta r}{dt^2} = \frac{r d^2 \delta r + \delta r d^2 r}{dt^2} - \frac{\mu \delta r}{r^2} + rR';$$

ed eliminando $\frac{r dv^2}{dt^2}$ fra questa e la precedente si avrà

$$\frac{2r^2 dv d\delta v}{dt^2} = \frac{r d^2 \delta r - \delta r d^2 r}{dt^2} - \frac{3\mu r \delta r}{r^3} + rR'.$$

In fine se si elimina col mezzo dell'equazione (E) il termine $\frac{3\mu r \delta r}{r^3}$, dopo facili riduzioni si troverà

$$d\delta v = \frac{d(dr\delta r + 2r d\delta r)}{r^2 dv} + \frac{dt^2(3\int dR + 2rR)}{r^2 dv}.$$

Per integrare ora questa equazione, potendosi nel secondo membro scrivere le quantità relative al moto ellittico si osservi che in questa ipotesi $r^2 dv = dt\sqrt{(\mu a(1-e^2)} = a^2 n dt\sqrt{(1-e^2)}$.

Sostituendo questo valore di dv, ed integrando, avendo riguardo all'equazione $\sqrt{(\mu a)} = na^2$, otterremo

$$\delta l = \frac{dr\delta r + 2r d\delta r}{a^2 n dt\sqrt{(1-e^2)}} + \frac{\frac{3a}{\mu}\int n dt \int dR + \frac{2a}{\mu}\int rR' n dt}{\sqrt{(1-e^2)}} \ldots (H)$$

ove si è scritto δl in luogo di δv per ciò che si è detto a *principio*.

Conosciuto pertanto δr o per serie, o per le quadrature si avrà in virtù di questa equazione la correzione della longitudine nell'orbita.

551. Si venga per ultimo a ricercare la variazione della *latitudine*. Senza le forze perturbatrici il pianeta m descriverebbe intorno al centro del Sole una sezione conica compresa in un piano fisso; se pertanto se ne allontana, le elevazioni o le depressioni saranno piccolissime, e dell'ordine delle forze perturbatrici. Preso quindi, come nei numeri precedenti, per piano delle x, y il piano dell'orbita ad un'epoca determinata, la terza coordinata z sarà piccolissima, e ne determineremo l'espressione nel modo seguente.

Si riprendano le equazioni (B) del 546, e fra la prima e la terza, come anche fra la seconda e la terza si elimini la quantità $\frac{\mu}{r^3}$, osservando di trascurare i termini $z\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $z\left(\frac{dR}{dy}\right)$ di secondo ordine

rapporto alle forze perturbatrici. Eseguita l'eliminazione, s'integrino le risultanti, trascurando le costanti arbitrarie, le quali si possono fingere comprese nei segni d'integrazione; otterremo così le due seguenti

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{dt} = \int x\left(\frac{dR}{dz}\right)dt; \quad \frac{z\,dy - y\,dz}{dt} = \int y\left(\frac{dR}{dz}\right)dt.$$

Fra queste due eliminando dz, ed osservando che per le leggi del moto ellittico si ha $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \sqrt{[\mu\,a\,(1-e^2)]}$, si troverà

$$z = \frac{x\int y\left(\frac{dR}{dz}\right)dt - y\int x\left(\frac{dR}{dz}\right)dt}{\sqrt{[\mu\,a\,(1-e^2)]}}.$$

Si può dare a questa equazione un aspetto più comodo agli usi astronomici; chiamando in fatti δs la piccola latitudine del pianeta sopra il piano delle x, y corrispondente all'elevazione z, sarà $z = r \operatorname{sen} \delta s = r\,\delta s$; ponendovi in seguito $x = r\cos l$, $y = r \operatorname{sen} l$, moltiplicando sotto e sopra per $\sqrt{\mu}$, indi facendo nel numeratore $\sqrt{\mu} = n\,a^{3/2}$, si otterrà

$$\delta s = \frac{a\cos l\int r \operatorname{sen} l\left(\frac{dR}{dz}\right)n\,dt - a \operatorname{sen} l\int r\cos l\left(\frac{dR}{dz}\right)n\,dt}{\mu\sqrt{(1-e^2)}} \quad \ldots (I)$$

Le equazioni (G), (H), (I) contengono la soluzione di tutti i più importanti quesiti intorno alla teoria delle perturbazioni, e porgono il modo di poterne valutare l'influenza tanto nella longitudine e nel raggio vettore, come anco nella latitudine eliocentrica di un determinato pianeta. Essendo le cercate correzioni date per formule definite, si potrà anche col loro mezzo assegnarne ad un istante qualunque il valore numerico mediante l'integrazione per quadratura, lo che riesce molto comodo nelle comete ed in quei pianeti, l'orbite dei quali hanno una grande eccentricità ed una grande inclinazione al piano fondamentale; ma nei pianeti di poca eccentricità e di piccola inclinazione riesce più comodo sviluppare queste correzioni della posizione ellittica in serie ordinate per le potenze ed i prodotti delle eccentricità e delle tangenti delle inclinazioni; giacchè in tal caso queste serie divengono molto convergenti, ed hanno il vantaggio di potersi ridurre a tavole semplici, che inserite in continuazione delle tavole del moto ellittico danno il modo di assegnarne con calcolo semplice e spedito la posizione ad un istante qualunque. La formazione però di queste serie è alquanto laboriosa e complicata, e la loro teoria eccede i confini di un'opera elementare, per lo che ci vediamo costretti di rimandare per il loro completo sviluppo alla Meccanica celeste di La-Place, ed

al terzo volume dell'*Astronomia teorica* del signor Schübert (Pietroburgo, ediz. seconda 1822) dove tutti i punti principali della teoria del mondo sono sviluppati con conveniente estensione e lodevole chiarezza, mentre noi qui per non lasciare i nostri lettori del tutto digiuni di queste importanti teorie ci limiteremo a riferire il modo di formare le serie indicate fino alle prime potestà delle eccentricità ed inclinazioni.

552. Prima di tutto conviene assegnare la forma della funzione R, e svilupparla in serie. A tale oggetto supporremo un solo pianeta m' che perturbi i movimenti di m; in tale ipotesi avremo pel § 546

$$R = \frac{m'(x x' + y y' + z z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3:2}} - \frac{m'}{\sqrt{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]}}.$$

Scelgasi per piano delle x, y il piano dell'orbita di m ad un'epoca stabilita, e per asse delle x la linea da cui si contano dagli Astronomi le longitudini nell'orbita; indicando come sopra il raggio vettore per r, la longitudine per l, avremo $x = r \cos l$, $y = r \operatorname{sen} l$. Similmente per il pianeta m' s'indichi la projezione del suo raggio vettore sul piano dell'orbita m con r', e la sua longitudine nell'orbita projettata nello stesso piano con l'; sarà $x' = r' \cos l'$, $y' = r' \operatorname{sen} l'$. Introdotti questi valori in R, si avrà

$$R = \frac{m'[r r' \cos(l'-l) + z z']}{\sqrt{(r'^2 + z'^2)^3}} - \frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2 r r' \cos(l'-l) + r'^2 + (z'-z)^2]}}.$$

Osservo che z è dell'ordine delle forze perturbatrici, z' dell'ordine dell'inclinazione dell'orbita m' sopra m; quindi sviluppando rapporto a z, z', e non tenendo conto che di quei termini, i quali nell'espressione $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ nell'equazione (I) possono ascendere al primo ordine, avremo

$$R = \frac{m' r \cos(l'-l)}{r'^2} + \frac{m' z z'}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2 r r' \cos(l'-l) + r'^2)]}}$$
$$+ \frac{m'(z'-z)^2}{2[r^2 - 2 r r' \cos(l'-l) + r'^2]^{3:2}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sia ora per il pianeta m, n il moto diurno medio, π la longitudine del suo perielio, ι l'epoca dei moti medii; avremo per la teoria del moto ellittico

$$l = n t + \iota + 2 e \operatorname{sen}(n t + \iota - \pi); \quad r = a[1 - e \cos(n t + \iota - \pi)].$$

Per il pianeta m' si osservi che trascurando i quadrati dell'inclinazione, sarà l' uguale alla sua longitudine nell'orbita, ed r' al suo raggio vettore. Ritenendo quindi rapporto ad m' le stesse denominazioni con un accento, sarà

$l' = n't + \iota' + 2e'\,\mathrm{sen}(n't + \iota' - \pi')$; $r' = a'[1 - e'\cos(n't + \iota' - \pi')]$;
e ponendo per brevità
$v_{,} = 2e\,\mathrm{sen}(nt + \iota - \pi)$; $v'_{,} = 2e'\,\mathrm{sen}(n't + \iota' - \pi')$;
$u_{,} = -e\cos(nt + \iota - \pi)$; $u'_{,} = -e'\cos(n't + \iota' - \pi')$; sarà
$l = nt + \iota + v_{,}$; $l' = n't + \iota' + v'_{,}$; $r = a(1 + u_{,})$; $r' = a'(1 + u'_{,})$.

553. Premesse queste cose consideriamo la funzione

$$\frac{a}{a'}\cos(n't - nt + \iota' - \iota) - \frac{1}{\sqrt{[a^2 - 2aa'\cos(n't - nt + \iota' - \iota) + a'^2]}};$$

e si sviluppi in una serie ordinata per i coseni dei multipli di $n't - nt + \iota' - \iota$, che fingeremo essere

$$= \tfrac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos(n't - nt + \iota' - \iota) + A^{(2)}\cos 2(n't - nt + \iota' - \iota) + \text{ec.}$$

Questa serie si può compendiosamente rappresentare per $\frac{1}{2}\Sigma A^{(i)}\cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$, prendendo per i tutti i numeri interi tanto positivi che negativi, e fingendo $A^{(-i)} = A^{(i)}$; Σ essendo la caratteristica solita ad adoperarsi nelle somme relative alle differenze finite; $A^{(i)}$ riguardandosi come funzione delle quantità a ed a' che insegneremo in fine a determinare numericamente per ogni valore di i. Tale forma di scrivere ha il vantaggio che tosto ci porge il prodotto della serie indicata per il seno od il coseno di un arco qualunque $ft + \pi$; imperciocchè è facile verificare, che estendendosi i tanto ai numeri positivi, che negativi, un tale prodotto sarà

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma A^{(i)}\,\begin{matrix}\mathrm{sen}\\ \cos\end{matrix}\left\{i(n't - nt + \iota' - \iota) + ft + \pi\right\}$$

valendo il simbolo sen per i prodotti della serie per $\mathrm{sen}(ft + \pi)$, ed il simbolo cos per i prodotti di $\cos(ft + \pi)$.

Si ponga del pari lo sviluppo della frazione
$(a^2 - 2aa'\cos(n't - nt + \iota' - \iota) + a'^2)^{-3/2} = \frac{1}{2}\Sigma B^{(i)}\cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$, estendendosi qui pure i a tutti i numeri interi positivi e negativi compreso $i = 0$.

È ora facile vedere che da queste funzioni si formeranno i termini analoghi di R, scrivendovi $a(1 + u_{,})$ in luogo di a, $a'(1 + u'_{,})$ in luogo di a', $1 + v_{,}$ in luogo di 1, ed $\iota' + v'_{,}$ in luogo di ι'; sviluppando in seguito in serie col mezzo del teorema di Taylor, trascurando i termini al di sopra della prima potenza di $v_{,}$, $u_{,}$, $v'_{,}$, $u'_{,}$ avremo evidentemente

$$R = \frac{m'}{2}\Sigma A^{(i)}\cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$$
$$+ \frac{m'}{2}u_{,}\Sigma a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$$
$$+ \frac{m'}{2}u'_{,}\Sigma a'\left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right)\cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$$

$$-\frac{m'}{2}(v'_{,}-v_{,})\,\Sigma\, i\,A^{(i)}\,\text{sen}\, i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)$$
$$+\frac{m'zz'}{a'^2}+\frac{m'(z'-z)^2}{4}\,\Sigma\, B^{(i)}\cos i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon).$$

Si sostituiscano in questa espressione i valori di $v_{,}$ $v'_{,}$ $u_{,}$ $u'_{,}$ dati di sopra, avendo sempre presenti i precetti

$$\Sigma\, M^{(i)}\cos i\,\theta\cos g=\Sigma\, M^{(i)}\cos(i\,\theta+g)$$
$$\Sigma\, M^{(i)}\cos i\,\theta\,\text{sen}\, g=\Sigma\, M^{(i)}\,\text{sen}\,(i\,\theta+g),$$

dall' ultimo dei quali (differenziando rapporto a θ, e dividendo per $d\theta$) tosto se ne deduce anco il seguente utile per questa sostituzione

$$\Sigma\, i\,M^{(i)}\,\text{sen}\, i\,\theta\,\text{sen}\, g=-\Sigma\, i\,M^{(i)}\cos(i\,\theta+g),$$

i intendendosi esteso a tutti i valori positivi e negativi interi.

Eseguendo le indicate sostituzioni, si presenteranno dei termini di questa forma

$$\Sigma\, N^{(i)}\cos[i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+n't+\epsilon'-\pi'],$$

i quali si potranno scrivere anche sotto l' aspetto

$$\Sigma\, N^{(i)}\cos[(i+1)(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+nt+\epsilon-\pi'],$$

ovvero (cangiando i in $i-1$) sotto la forma

$$\Sigma\, N^{(i-1)}\cos[i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+nt+\epsilon-\pi'].$$

Con queste avvertenze si troverà

$$(2)\ \ldots\ R=\frac{m'}{2}\,\Sigma\, A^{(i)}\cos i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)$$
$$-\frac{m'e}{2}\,\Sigma\left[a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+2\,i\,A^{(i)}\right]\cos[i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+nt+\epsilon-\pi]$$
$$-\frac{m'e'}{2}\,\Sigma\left[a'\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)-2(i-1)A^{(i-1)}\right]\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+nt+\epsilon-\pi']$$
$$+\frac{m'zz'}{a'^2}+\frac{m'(z'-z)^2}{4}\,\Sigma\, B^{(i)}\cos i\,(n't-nt+\epsilon'-\epsilon).$$

554. Per sostituire questo valore di R nelle equazioni (G), (H), (I) conviene innanzi tutto formare le funzioni $\int dR$, $r\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $2\int dR+r\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $\left(\frac{dR}{dz}\right)$. Osservo 1.° che non entrando $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ nelle prime due equazioni si potranno per esse trascurare in R i termini dipendenti da z, z' perchè di secondo ordine; 2.° che nel termine $\int dR$ la differenziazione si deve eseguire facendo variare soltanto le coordinate del corpo m, quindi sarà variabile soltanto nt, mentre l' integrazione vuolsi eseguita rapporto al tempo in tutta la generalità; 3.° che per la forma di $r=a(1+u_{,})$ si avrà $r\left(\frac{dR}{dr}\right)=a\left(\frac{dR}{da}\right)$.

Dietro queste osservazioni si formeranno facilmente le seguenti equazioni, nelle quali $m'g$ è una costante arbitraria aggiunta all'integrale $\int dR$, e dove si è fatto sortire fuori dal segno Σ il valore corrispondente ad $i=0$, giacchè i termini che ne dipendono meritano una particolare attenzione; quindi nelle cose seguenti il segno Σ si estende a tutti i valori interi positivi e negativi, escluso lo zero.

$$(3)\ \ldots \int dR = m'g - \frac{m'e}{2}\, a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\cos(nt+\iota-\pi)$$
$$-\frac{m'e'}{2}\left[a'\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+2A^{(1)}\right]\cos(nt+\iota-\pi')$$
$$+\frac{m'}{2}\Sigma\frac{n}{n-n'}A^{(i)}\cos i(n't-nt+\iota'-\iota)$$
$$-\frac{m'e}{2}\Sigma\frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left[a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+2iA^{(i)}\right]\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi]$$
$$-\frac{m'e'}{2}\Sigma\frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left[a'\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)-2(i-1)A^{(i-1)}\right]\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi];$$

$$(4)\ rR' = a\left(\frac{dR}{da}\right) = \frac{m'}{2}\, a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) - \frac{m'e}{2}\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)+a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right]\cos(nt+\iota-\pi)$$
$$-\frac{m'e'}{2}\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da\,da'}\right)+2a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right]\cos(nt+\iota-\pi')$$
$$+\frac{m'}{2}\Sigma\, a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\cos i(n't-nt+\iota'-\iota)$$
$$-\frac{m'e}{2}\Sigma\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right)+(2i+1)a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right]\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi]$$
$$-\frac{m'e'}{2}\Sigma\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da\,da'}\right)-2(i-1)a\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right]\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi'].$$

Dietro questi valori, ponendo per brevità di scrittura

$$(5)\ M = \frac{a^2}{2}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)+\frac{3a}{2}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$
$$N = \frac{aa'}{2}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da\,da'}\right)+a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+a'\left(\frac{dA^{(0)}}{da'}\right)+2A^{(0)}$$
$$P^{(i)} = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{n}{n-n'}A^{(i)}$$
$$Q^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right)+\frac{2i+1}{2}a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left[a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+2iA^{(i)}\right]$$

$$(5)\quad L^{(i)} = \tfrac{1}{2}\, a\, a' \left(\frac{d^2 A^{(i-1)}}{d a\, d a'}\right) - (i-1)\, a \left(\frac{d A^{(i-1)}}{d a}\right)$$
$$+ \frac{(i-1)\, n}{i(n-n')-n} \left[a' \left(\frac{d A^{(i-1)}}{d a'}\right) - 2(i-1)\, A^{(i-1)}\right],$$

si troverà

$$(6)\quad 2\int dR + rR' = 2\, m' g + \frac{m'}{2}\, a \left(\frac{d A^{(0)}}{d a}\right) + m' \Sigma P^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$- m' M e \cos(n t + \varepsilon - \pi) - m' N e' \cos(n t + \varepsilon - \pi')$$
$$- m' e \Sigma Q^{(i)} \cos[i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + n t + \varepsilon - \pi)$$
$$- m' e' \Sigma L^{(i)} \cos[i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + n t + \varepsilon - \pi'),$$

dove si dovrà estendere il segno Σ a tutti i valori interi di i *positivi* e negativi, eccettuato zero, osservando che qui non sarà più $Q^{(i)} = Q^{(-i)}$, $L^{(i)} = L^{(-i)}$, restando tuttavia $P^{(i)} = P^{(-i)}$.

I valori numerici di M, $P^{(i)}$, $Q^{(i)}$ facilmente si calcolano dietro la scorta delle equazioni (5); quanto ad N ed $L^{(i)}$ riesce più comodo eliminare le differenze parziali rapporto ad a'. A tale oggetto si osservi che per natura della funzione R, da cui dipendono le funzioni $A^{(i)}$, esse rapporto ad a, a' sono funzioni omogenee di -1 dimensione. Quindi per la proprietà notissima delle funzioni omogenee si avrà $a' \left(\frac{d A^{(i)}}{d a'}\right) = - A^{(i)} - a \left(\frac{d A^{(i)}}{d a}\right)$, donde deducesi ancora

$$a' \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a\, d a'}\right) = -2 \left(\frac{d A^{(i)}}{d a}\right) - a \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a^2}\right).$$

Dietro queste equazioni i valori di N, $L^{(i)}$ si ridurranno *ai seguenti*

$$(5)'\quad N = A^{(0)} - a \left(\frac{d A^{(0)}}{d a}\right) - \tfrac{1}{2}\, a^2 \left(\frac{d^2 A^{(0)}}{d a^2}\right)$$
$$L^{(i)} = -\tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{d^2 A^{(i-1)}}{d a^2}\right) - i a \left(\frac{d A^{(i-1)}}{d a}\right) - \frac{(i-1)\, n}{i(n-n')-n} \left[a \left(\frac{d A^{(i-1)}}{d a}\right) + (2i-1) A^{(i-1)}\right]$$

Si passi per ultimo a formare il valore di $\left(\frac{d R}{d z}\right)$, che entra nell'espressione di δs. Trascurando i prodotti delle eccentricità per le inclinazioni, ed i termini moltiplicati per $m' z$ perchè di secondo ordine rapporto alle forze perturbatrici sarà

$$\left(\frac{d R}{d z}\right) = \frac{m' z'}{a'^3} - \frac{m' z'}{2} \Sigma B^{(i)} \cos i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

comprendendo qui il segno Σ anco il valore di $i = 0$.

Se ora indichisi con γ la tangente dell'inclinazione dell'orbita di

Digitized by Google

m' sopra quella di m, e per Π la longitudine del nodo ascendente su questa medesima orbita, avremo evidentemente $z' = a'\gamma \operatorname{sen}(n't + \iota' - \Pi)$. Sostituito questo valore, e levando fuori del segno Σ il caso corrispondente ad $i = 0$, si avrà

$$(7)\quad \left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m'}{a'^2}\gamma \operatorname{sen}(n't + \iota' - \Pi) - \frac{m'}{2} a' B^{(1)} \gamma \operatorname{sen}(nt + \iota - \Pi)$$
$$- \frac{m'\gamma}{2} a' \Sigma B^{(i-1)} \operatorname{sen}[i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \Pi].$$

555. Apparecchiati così i valori delle funzioni dipendenti da R, si passi a calcolare il valore di δr dall'equazione G, e quello di δl dall'equazione (H), nelle quali trascurando i termini di secondo ordine si porrà $\mu = 1$, $\sqrt{(1 - e^2)} = 1$.

Primieramente essendo $l = nt + \iota + v_{,}$, $r = a(1 + u_{,})$, ritenendo per $v_{,}$, $u_{,}$ i valori superiori (§ 552); avremo

$$\operatorname{sen} l = \operatorname{sen}(nt + \iota) - e \operatorname{sen} \pi + e \operatorname{sen}(2nt + 2\iota - \pi)$$
$$\cos l = \cos(nt + \iota) - e \cos \pi + e \cos(2nt + 2\iota - \pi)$$
$$r \operatorname{sen} l = a \operatorname{sen}(nt + \iota) - \frac{3ae}{2} \operatorname{sen} \pi + \frac{ae}{2} \operatorname{sen}(2nt + 2\iota - \pi)$$
$$r \cos l = a \cos(nt + \iota) - \frac{3ae}{2} \cos \pi + \frac{ae}{2} \cos(2nt + 2\iota - \pi).$$

Si sostituiscano questi valori nell'equazione (G), e per determinare convenientemente le costanti arbitrarie introdotte dai due segni d'integrazione in essa contenuti, non si abbia a bel principio riguardo ai termini accompagnati dal segno Σ nella funzione $2\int dR + rR'$; si ponga inoltre per brevità $2g + \frac{1}{2} a \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) = f$. Indicando per k, k' due costanti arbitrarie introdotte dai due nominati segni d'integrazione, fatte tutte le riduzioni si troverà (non avendo riguardo che ai termini fuori del segno Σ) che il risultamento si può scrivere sotto il seguente aspetto

$$\frac{\delta r}{a} = -m' af - m' ke \cos(nt + \iota - \pi) - m' k' e' \cos(nt + \iota - \pi')$$
$$+ \tfrac{1}{2} m' Cnte \operatorname{sen}(nt + \iota - \pi) + \tfrac{1}{2} m' Dnte' \operatorname{sen}(nt + \iota - \pi'),$$

dove si è posto $C = 3af + aM$; $D = aN$; M, N avendo i valori attribuitigli dalle equazioni (5) § 554.

Si sostituiscano ora nell'equazione (H) i valori di $\int dR$, rR', $\frac{\delta r}{a}$, r; facendo tutte le riduzioni, trascurando i termini dell'ordine e^2, ed inoltre ponendo $= 0$ i termini assolutamente costanti introdotti dalle integrazioni $\int n\,dt \int dR$, $\int rR'\,n\,dt$, giacchè sono compresi nell'e-

poca dei moti medj, non avendo qui pure riguardo ai termini dipendenti dal segno Σ si otterrà il seguente risultamento

$$\delta l = m' a \left[3g + a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] nt$$

$$+ m' e \operatorname{sen}(nt+\iota-\pi)\left[-af + 2k + C - \tfrac{5}{2}a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) - a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right]$$

$$+ m' e' \operatorname{sen}(nt+\iota-\pi')\left[2k' + D - \tfrac{3}{2}aa'\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) - 3aA^{(1)} - a^2a'\left(\frac{d^2A^{(1)}}{dada'}\right) - 2a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right]$$

$$+ m' C\, nt\, e \cos(nt+\iota-\pi) + m' D\, nt\, e' \cos(nt+\iota-\pi').$$

Si determinerà la costante g in modo che il termine moltiplicato per nt sia $= 0$, affinchè il moto medio sia assolutamente costante; le costanti arbitrarie k, k' si determineranno in modo che nella precedente espressione di δl spariscano i termini moltiplicati per $\operatorname{sen}(nt+\iota-\pi)$, $\operatorname{sen}(nt+\iota-\pi')$ affinchè nell'espressione della longitudine vera non vi siano altri termini dipendenti dall'anomalia media oltre quelli prodotti dalle leggi del moto ellittico. Si avrà così

$$g = -\tfrac{1}{3}a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right); \quad f = 2g + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) = -\tfrac{1}{6}a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).$$

In seguito si troverà

$$2k = af - C + \tfrac{5}{2}a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right),$$

ovvero, sostituendo i valori di C e di f,

$$(8) \ldots k = \tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{4}a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right).$$

Del pari facendo $= 0$ il coefficiente di $\operatorname{sen}(nt+\iota-\pi')$, e sostituendovi i valori di $\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)$, $\left(\frac{d^2A^{(1)}}{dada'}\right)$ dati nel § precedente, si otterrà

$$(9) \ldots k' = \tfrac{1}{4}\left[aA^{(1)} - a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - a^3\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)\right].$$

Ecco pertanto i precetti per calcolare i valori di $\frac{\delta r}{a}$, δl indipendenti dal segno sommatorio Σ.

1.° Si calcolino C, D mediante le seguenti equazioni

$$(10) \begin{cases} C = a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) \\ D = aN = aA^{(1)} - a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2}a^3\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right). \end{cases}$$

2.° Si calcolino k, k' dietro le superiori equazioni (8), (9);

3.° Si avrà

$$(11)\quad \frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6} a^2 \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) - m'ke\cos(nt+\iota-\pi) - m'k'e'\cos(nt+\iota-\pi')$$
$$+ \tfrac{1}{2} m' C n t e \operatorname{sen}(nt+\iota-\pi) + \tfrac{1}{2} m' D n t e' \operatorname{sen}(nt+\iota-\pi');$$

$$(12)\quad \delta l = m C n t e \cos(nt+\iota-\pi) + m' D n t e' \cos(nt+\iota-\pi').$$

Meritano tutta l'attenzione i termini moltiplicati per nt, i quali quantunque piccolissimi dopo un gran numero di rivoluzioni terminerebbero per cangiare la figura delle orbite planetarie. Essi conducono alla teoria delle variazioni secolari degli elementi dell'orbita dovuta alle profonde meditazioni di La-Grange e di La-Place, della quale diremo in fine qualche cosa.

556. Si prenda ora a ricercare la porzione di $\frac{\delta r}{a}$, che dipende dal termine $m' \Sigma P^{(i)} \cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$ della funzione $2fdR + rR'$, ritenendo per $r \operatorname{sen} l$, $r\cos l$, $\operatorname{sen} l$, $\cos l$ i valori superiormente assegnati. Sopprimendo il segno Σ, che lo intenderemo applicato a tutti i termini contenenti i, instituiscasi a parte per maggiore chiarezza, e per più facile intelligenza dei risultamenti il calcolo per i valori di i positivo e di i negativo, escludendo il caso di $i = 0$ superiormente contemplato; dovremo in questa ipotesi porre
$m' \Sigma P^{(i)} \cos i(n't - nt + \iota' - \iota) = 2 m' P^{(i)} \cos i(n't - nt + \iota' - \iota)$, e valutare i come numero intero e positivo. Facendo i prodotti e le integrazioni indicate nell'equazione (G), riducendo sempre in seni e coseni degli archi multipli i prodotti dei seni e dei coseni, si trova dopo le convenienti riduzioni

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{a} = &+ \frac{m' a P^{(i)} n}{i(n-n')-n} \cos i(n't - nt + \iota' - \iota) \\
&- \frac{m' a P^{(i)} n}{i(n-n')+n} \cos i(n't - nt + \iota' - \iota) \\
&+ \tfrac{3}{2} \frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')} \cos[i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \pi] \\
&- \tfrac{3}{2} \frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')} \cos[i(n't - nt + \iota' - \iota) - nt - \iota + \pi] \\
&+ \tfrac{3}{4} \frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')-2n} \cos[i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \pi] \\
&- \tfrac{3}{4} \frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')+2n} \cos[i(n't - nt + \iota' - \iota) - nt - \iota + \pi] \\
&- \frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')-n} \cos[i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \pi]
\end{aligned}$$

$$+\frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')+n}\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\pi]$$
$$+\frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')-n}\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\pi]$$
$$-\frac{m' a e P^{(i)} n}{i(n-n')+n}\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi]$$

ovvero riunendo sotto uno stesso coefficiente i coseni degli angoli uguali

$$(13)\ \frac{\delta r}{a}=\frac{2 a P^{(i)} m' n^2}{[i(n-n')+n][i(n-n')-n]}\cos i(n't-nt+\iota'-\iota)$$
$$+m' a e H^{(i)}\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi]$$
$$+m' a e H^{(-i)}\cos[i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\pi]$$

ponendo per brevità

$$H^{(i)}=P^{(i)}\left[\frac{\frac{3}{2}n}{i(n-n')}+\frac{\frac{1}{2}n}{i(n-n')-2n}-\frac{n}{i(n-n')-n}-\frac{n}{i(n-n')+n}\right]$$
$$H^{(-i)}=P^{(i)}\left[\frac{-\frac{3}{2}n}{i(n-n')}-\frac{\frac{1}{2}n}{i(n-n')+2n}+\frac{n}{i(n-n')+n}+\frac{n}{i(n-n')-n}\right]$$

dove si dovranno dare ad i tutti i valori positivi, partendo da $i=1$ finchè i coefficienti dei coseni divengano insensibili, e sommare insieme i risultamenti.

557. Si considerino per ultimo le correzioni dipendenti dai due termini di $2\int dR+rR'$ rappresentati da

$$-m' e\,\Sigma Q^{(i)}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi\}$$
$$-m' e'\,\Sigma L^{(i)}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi'\}$$

dove i deve estendersi a tutti i valori positivi e negativi interi, eccettuato zero. Facendo qui pure per maggiore chiarezza separatamente il calcolo corrispondente ai valori di i positivo e di i negativo, chiamando $Q^{(-i)}$, $L^{(-i)}$ i valori delle funzioni indicate superiormente per $Q^{(i)}$, $L^{(i)}$ corrispondenti ad i negativo, con un facile calcolo si troverà dopo le convenienti riduzioni

$$(14)\ \frac{\delta r}{a}=-m'ae\,Q^{(i)}\frac{n^2}{i(n-n')\{i(n-n')-2n\}}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi\}$$
$$-m'ae\,Q^{(-i)}\frac{n^2}{i(n-n')\{i(n-n)+2n\}}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\pi\}$$
$$-m'ae'L^{(i)}\frac{n^2}{i(n-n')\{i(n-n')-2n\}}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\pi'\}$$
$$-m'ae'L^{(-i)}\frac{n^2}{i(n-n')\{i(n-n')+2n\}}\cos\{i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\pi'\}$$

dando qui pure ad i tutti i valori positivi ed interi maggiori di zero, finchè si trovino coefficienti insensibili, e sommando i risultamenti parziali che se ne ricavano.

Se ora si sommano tutti gli ottenuti valori parziali di $\frac{\delta r}{a}$ dati dalle equazioni (11), (13), (14), si avrà la cercata correzione completa dipendente dall' azione del pianeta m' sopra m esatta fino alle potenze del primo ordine delle eccentricità, delle inclinazioni e della forza perturbatrice, la quale si potrà scrivere sotto la seguente forma

$$(15)\quad \frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6} a^2 \left(\frac{d A^{(0)}}{da}\right) - m' k e \cos(nt + \varepsilon - \pi) - m' k' e' \cos(nt + \varepsilon - \pi')$$
$$+ \tfrac{1}{2} m' C n t e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \pi) + \tfrac{1}{2} m' D n t e' \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \pi')$$
$$+ \frac{2 a P^{(i)} m' n^2}{\{i(n-n') + n\}\{i(n-n') - n\}} \cos i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$+ m' a e C^{(i)} \cos\{i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + n t + \varepsilon - \pi\}$$
$$+ m' a e C^{(-i)} \cos\{i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) - n t - \varepsilon + \pi\}$$
$$+ m' a e' D^{(i)} \cos\{i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + n t + \varepsilon - \pi'\}$$
$$+ m' a e' D^{(-i)} \cos\{i(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) - n t - \varepsilon + \pi'\}$$

dove per brevità si è posto

$$(16)\quad C^{(i)} = H^{(i)} - \frac{n^2 Q^{(i)}}{i(n-n')\{i(n-n') - 2n\}}$$
$$C^{(-i)} = H^{(-i)} - \frac{n^2 Q^{(-i)}}{i(n-n')\{i(n-n') + 2n\}}$$
$$D^{(i)} = - \frac{n^2 L^{(i)}}{i(n-n')\{i(n-n') - 2n\}}$$
$$D^{(-i)} = - \frac{n^2 L^{(-i)}}{i(n-n')\{i(n-n') + 2n\}}$$

nel calcolo delle quali funzioni si dovrà sempre prendere i numero intero e positivo finchè i coefficienti dell' equazione (15) divengano trascurabili.

558. Si passi ora a determinare il valore di δl dipendente dai termini pei quali i è diverso da zero, giacchè di questi abbiamo di sopra dato l' espressione. L' equazione (H) del § 550 ponendovi $\mu = 1$, $\sqrt{(1-e^2)} = 1$ si riduce alla seguente

$$\delta l = \frac{dr}{a n dt} \frac{\delta r}{a} + \frac{2r}{a} \frac{d\delta r}{a n dt} + 3 a \int n dt \int dR + 2 a \int r R' n dt.$$

Ora si ha $\frac{r}{a} = 1 - e \cos(nt + \varepsilon - \pi)$; $\frac{dr}{a n dt} = e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \pi)$.

Sostituendo questi valori nell'equazione precedente, ed inoltre moltiplicando per $n\,d\,t$ le equazioni (3), (4) del § 554, integrandole, e facendo la sostituzione dei risultamenti nella stessa equazione precedente, qualora s'instituisca a parte il calcolo di i negativo e di i positivo, si otterrà per $\delta\,l$ un risultamento della forma seguente

$$(17)\quad \begin{aligned}\delta\,l = {} & m'\,R^{(i)}\ \text{sen}\ i(n'\,t - n\,t + \iota' - \iota)\\ & + m'\,e\ S^{(i)}\ \text{sen}\ \{i(n'\,t - n\,t + \iota' - \iota) + n\,t + \iota - \pi\}\\ & + m'\,e\ S^{(-i)}\ \text{sen}\ \{i(n'\,t - n\,t + \iota' - \iota) - n\,t - \iota + \pi\}\\ & + m'\,e'\,T^{(i)}\ \text{sen}\ \{i(n'\,t - n\,t + \iota' - \iota) + n\,t + \iota - \pi'\}\\ & + m'\,e'\,T^{(-i)}\ \text{sen}\ \{i(n'\,t - n\,t + \iota' - \iota) - n\,t - \iota + \pi'\}\end{aligned}$$

dove i valori di $R^{(i)}$, $S^{(i)}$, $T^{(i)}$ ec. si dovranno calcolare dalle seguenti equazioni, nelle quali riguardasi i sempre come un intero positivo, e > 0.

$$R^{(i)} = \frac{4\,a\,i\,P^{(i)}\,n(n-n')}{i^2(n-n')^2 - n^2} - \frac{3\,n^2}{i(n-n')^2}\,a\,A^{(i)} - \frac{2\,n}{i(n-n')}\,a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right)$$

$$= \frac{n^2}{i(n-n')^2}\,a\,A^{(i)} + \frac{4\,a\,P^{(i)}\,in(n-n')}{i^2(n-n')^2 - n^2} - \frac{2\,n}{i(n-n')}\left[a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) + \frac{2\,n}{n-n'}\,a\,A^{(i)}\right]$$

la quale, osservando che $a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) + \frac{2\,n}{n-n'}\,a\,A^{(i)} = 2\,a\,P^{(i)}$, riducesi alla seguente

$$(18)\quad R^{(i)} = \frac{n^2}{i(n-n')^2}\,a\,A^{(i)} + \frac{4\,n^3\,a\,P^{(i)}}{i(n-n')\{i^2(n-n')^2 - n^2\}}.$$

Del pari si otterrà

$$(19)\quad \begin{aligned}S^{(i)} = {} & \frac{a\,P^{(i)}\{n^2 - 2\,i\,n\,(n-n')\}}{i^2(n-n')^2 - n^2} + 2\,a\,C^{(i)}\,\frac{i(n-n') - n}{n}\\ & + \frac{3\,(i-1)\,n^2}{2\,\{i\,(n-n') - n\}^2}\left[a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) + 2\,i\,a\,A^{(i)}\right]\\ & + \frac{n}{i\,(n-n') - n}\left[a^3\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right) + (2\,i+1)\,a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right)\right];\end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned}S^{(-i)} = {} & -\frac{a\,P^{(i)}\{n^2 + 2\,i\,n\,(n-n')\}}{i^2(n-n')^2 - n^2} + 2\,a\,C^{(-i)}\,\frac{i\,(n-n') + n}{n}\\ & + \frac{3\,(i+1)\,n^2}{2\,\{i\,(n-n') + n\}^2}\left[a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) - 2\,i\,a\,A^{(i)}\right]\\ & + \frac{n}{i\,(n-n') + n}\left[a^3\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right) - (2\,i-1)\,a^2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right)\right];\end{aligned}$$

$$(21)\quad T^{(i)}=2aD^{(i)}\frac{i(n-n')-n}{n}+\frac{3(i-1)n^2}{2\{i(n-n')-n\}^2}\left[aa'\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)-2(i-1)aA^{(i-1)}\right]$$
$$+\frac{n}{i(n-n')-n}\left[a^2a'\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da\,da'}\right)-2(i-1)a^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right];$$

$$(22)\quad T^{(-i)}=2aD^{(-i)}\frac{i(n-n')+n}{n}+\frac{3(i+1)n^2}{2\{i(n-n')+n\}^2}\left[aa'\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da'}\right)+2(i+1)aA^{(i+1)}\right]$$
$$+\frac{n}{i(n-n')+n}\left[a^2a'\left(\frac{d^2A^{(i+1)}}{da\,da'}\right)+2(i+1)a^2\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da}\right)\right];$$

Dalle ultime due equazioni si possono eziandio eliminare i differenziali parziali rapporto ad a' mediante le relazioni riferite al § 554, lo che sarà più comodo per il calcolo numerico. Esse in tal guisa si cangeranno nelle seguenti

$$T^{(i)}=2aD^{(i)}\frac{i(n-n')-n}{n}-\frac{3(i-1)n^2}{2\{i(n-n')-n\}^2}\left[(2i-1)aA^{(i-1)}+a^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right]$$
$$-\frac{n}{i(n-n')-n}\left[2ia^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)+a^3\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right)\right];$$

$$T^{(-i)}=2aD^{(-i)}\frac{i(n-n')+n}{n}-\frac{3(i+1)n^2}{2\{i(n-n')+n\}^2}\left[a^2\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da^2}\right)-(2i+1)aA^{(i+1)}\right]$$
$$-\frac{n}{i(n-n')+n}\left[a^3\left(\frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2}\right)-2ia^2\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da}\right)\right].$$

559. Si passi per ultimo a considerare la correzione in latitudine data dall'equazione (I) del § 551; in questa trascurando i prodotti delle eccentricità per le inclinazioni si potrà scrivere $\mu=1$, $\sqrt{(1-e^2)}=1$; $r\cos l=a\cos(nt+\iota)$; $r\,\mathrm{sen}\,l=a\,\mathrm{sen}\,(nt+\iota)$; $\mathrm{sen}\,l=\mathrm{sen}\,(nt+\iota)$; $\cos l=\cos(nt+\iota)$, e perciò si cangerà nella seguente

$$\delta s=a^2\cos(nt+\iota)\int\mathrm{sen}\,(nt+\iota)\left(\frac{dR}{dz}\right)n\,dt$$
$$-a^2\,\mathrm{sen}\,(nt+\iota)\int\cos(nt+\iota)\left(\frac{dR}{dz}\right)n\,dt,$$

dove in luogo di $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ si dovrà scrivere il suo valore dato dall'equazione (7) del § 554.

Non consideriamo a bel principio che i due termini di $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ indipendenti dal segno sommatorio Σ; se questi si sostituiscano nella equazione precedente, e si sviluppino i prodotti dei seni e dei coseni

in seni e coseni degli archi multipli, indi si faceiano le convenienti riduzioni, si giungerà facilmente al seguente risultamento in cui C, C' indicano due costanti arbitrarie introdotte dai segni d'integrazione

$$\delta s = a^2 C \cos(nt+\iota) - a^2 C' \operatorname{sen}(nt+\iota) - \frac{{}^1 m' a^2 \gamma}{a'^2} \frac{n^2}{n^2 - n'^2} \operatorname{sen}(n't+\iota'-\Pi)$$
$$- \frac{m' a^2 a' \gamma B^{(1)}}{4} nt \cos(nt+\iota-\Pi) + \frac{m' a^2 a' \gamma B'^{(1)}}{8} \operatorname{sen}(nt+\iota-\Pi).$$

Si determinino le costanti arbitrarie C, C' in modo che sparisca il termine $\frac{m' a^2 a' \gamma B^{(1)}}{8} \operatorname{sen}(nt+\iota-\Pi)$, affine di non introdurre nell'espressione della latitudine altri termini dipendenti dall'argomento di latitudine $nt+\iota-\Pi$, che quelli dati dall'ipotesi che si muova in un piano inclinato al piano fisso di un angolo la cui *tangente sia* $=\gamma$; sarà in tal guisa la correzione cercata dipendente dai primi due termini data dall'equazione

$$(23)\quad \delta s = -\frac{m' a^2 \gamma}{a'^2} \frac{n^2}{n^2 - n'^2} \operatorname{sen}(n't+\iota'-\Pi) - \frac{m' a^2 a' \gamma B^{(1)}}{4} nt \cos(nt+\iota-\Pi)$$

dove il termine moltiplicato per nt conduce alle variazioni secolari dell'inclinazione e del nodo, e deve omettersi qualora nel calcolo del luogo ellittico si abbia a queste variazioni effettivamente riguardo, come si suole praticare nelle tavole.

Nulla più resta che ad assegnare i termini dipendenti in $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ da

$$-\frac{m' \gamma a'}{2} \Sigma B^{(i-1)} \operatorname{sen}\{i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \Pi\},$$

dove il segno Σ si estende tanto ai valori positivi di i che ai negativi.

Per non considerare che valori positivi di i, osservando che $B^{(-i-1)} = B^{(i+1)}$, rappresenteremo quella nostra funzione coll'aggregato dei due seguenti

$$-\frac{m' \gamma a'}{2} B^{(i-1)} \operatorname{sen}\{i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \Pi\}$$
$$+\frac{m' \gamma a'}{2} B^{(i+1)} \operatorname{sen}\{i(n't - nt + \iota' - \iota) - nt - \iota + \Pi\}$$

i quali sostituiti per $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ nel valore superiore di δs, dopo le convenienti riduzioni daranno

$$\delta s = \frac{m' \gamma a^2 a'}{4} \frac{n}{i(n-n')} B^{(i-1)} \operatorname{sen}\{i(n't - nt + \iota' - \iota) + nt + \iota - \Pi\}$$

$$-\frac{m'\gamma a^2 a'}{4}\frac{n}{i(n-n')-2n}B^{(i-1)}\operatorname{sen}\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\Pi\}$$

$$-\frac{m'\gamma a^2 a'}{4}\frac{n}{i(n-n')+2n}B^{(i+1)}\operatorname{sen}\{i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\Pi\}$$

$$+\frac{m'\gamma a^2 a'}{4}\frac{n}{i(n-n')}B^{(i+1)}\operatorname{sen}\{i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\Pi\}.$$

Sommando ora sotto uno stesso coefficiente i seni degli archi simili, e riunendo questa correzione alla precedente (23), avremo la latitudine del pianeta sopra il piano dell' orbita fissa così rappresentata

$$(24)\quad \delta s=-\frac{m'a^2\gamma}{a'^2}\frac{n^2}{n^2-n'^2}\operatorname{sen}(n't+\iota'-\Pi)-\frac{m'a^2a'\gamma B^{(1)}}{4}nt\cos(nt+\iota-\Pi)$$

$$+\frac{m'\gamma a^2 a'}{2}B^{(i-1)}\frac{n^2}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}\operatorname{sen}\{i(n't-nt+\iota'-\iota)+nt+\iota-\Pi\}$$

$$-\frac{m'\gamma a^2 a'}{2}B^{(i+1)}\frac{n^2}{n^2-\{n+i(n-n')\}^2}\operatorname{sen}\{i(n't-nt+\iota'-\iota)-nt-\iota+\Pi\},$$

nella quale dovremo dare ad i tutti i valori interi positivi maggiori di zero, finchè i coefficienti divengono insensibili.

560. La quantità δs assegnata al § precedente rappresenta la piccola latitudine che acquista il pianeta m in virtù del pianeta m' al di sopra del piano della sua orbita primitiva supposto fisso. D' ordinario si riferiscono le posizioni dei pianeti al piano dell' ecelittica, il quale per tutti i vecchi pianeti del sistema planetario è alle orbite loro pochissimo inclinato; se pertanto si trascurano le seconde potestà di δs ed i suoi prodotti per le inclinazioni, facilmente vedrassi che la vera latitudine del pianeta sarà uguale alla latitudine eliocentrica calcolata rapporto all' ecelittica nell' ipotesi dell' orbita ellittica aumentata del numero δs. Quindi se indicheremo con (l), (r), (λ) la longitudine nell' orbita, il raggio vettore, la latitudine eliocentrica calcolata dietro le formule del moto ellittico, le stesse quantità corrette dall' effetto delle perturbazioni di m' saranno rappresentate rispettivamente da

$$(l)+\delta l,\quad (r)+\delta r,\quad (\lambda)+\delta s.$$

Abbiamo fin qui supposto un solo pianeta m' che colla sua attrazione alteri il movimento ellittico di m; gli altri pianeti producono alterazioni simili e piccolissime, ed è palese che finchè si possono trascurare i prodotti e le seconde potestà di queste alterazioni basterà per avervi riguardo calcolarle separatamente dietro la teoria precedente, ed aggiungerne la somma presa col proprio segno alle posizioni ellittiche. In vero soverchiamente lungo e molesto riuscirebbe il calcolo di ogni luogo di un pianeta, senza il soccorso delle tavole, e senza il soccorso dei coefficienti numerici dei seni e coseni degli an-

goli che costituiscono gli argomenti di queste inegnaglianze. Lo sviluppo completo però delle formule alle quali si appoggia la costruzione delle tavole eccede i limiti che ci siamo prefissi in questa Appendice, e per esso rimandiamo al volume III della più volte citata Meccanica celeste di La-Place, non che al volume III dell'Astronomia fisica del signor Schübert, dove la teoria delle perturbazioni planetarie è amplamente sviluppata fino alle terze potestà delle eccentricità e delle inclinazioni, e dove si troveranno ridotti a calcolo numerico i coefficienti di tutte quelle disuguaglianze nella teoria dei vecchi pianeti che ascendono ad un secondo di arco. Qui noi altro non faremo che a maggiore intelligenza delle cose esposte ridurre a calcolo i coefficienti dipendenti dall'azione di Giove sopra Marte; ma prima sarà opportuno indicare come si calcolino le quantità γ, Π, $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ ec. che entrano nei coefficienti stessi.

561. Cominceremo dal determinare γ, Π, dei quali il primo rappresenta la tangente dell'inclinazione dell'orbita di m' sopra quella di m; il secondo la longitudine del nodo ascendente di m' sull'orbita di m contata nel piano di questa. A tale oggetto sia (*Tav. II. fig.* 50 *a*) ΥQ l'ecclittica, Υ l'equinozio di primavera da cui si contano le longitudini; BCM l'orbita del pianeta m; ACM' quella del pianeta m'; preso $B\Upsilon' = B\Upsilon = \omega$; $A\Upsilon'' = A\Upsilon = \omega'$ saranno Υ', Υ'' i punti dai quali si contano le longitudini nell'orbita, ed ω, ω' rappresenteranno le longitudini dei nodi ascendenti delle orbite di m e di m' date dalle tavole o dal quadro del sistema planetario; gli angoli in B ed in A saranno le inclinazioni pur date delle orbite stesse all'ecclittica, che porremo $= i$, i'; ed è palese che sarà $C\Upsilon' = \Pi$; tang $C = \gamma$. Ora nel triangolo sferico CAB si hanno i seguenti elementi; $B = i$, $BAC = 180° - i'$; $AB = \omega' - \omega$. Risolvendolo quindi coi precetti del quarto caso si calcolerà il lato $BC = \Pi - \omega$, e l'angolo C, donde tosto si avranno i numeri cercati Π, γ.

Nel caso di orbite pochissimo inclinate fra loro, ed al piano dell'ecclittica, si potranno le stesse quantità ottenere eziandio con un processo più semplice nel modo seguente. Da un punto qualunque M' preso nell'orbita di m' si abbassi l'arco $M'P$ perpendicolare sull'ecclittica. Per la piccola inclinazione delle orbite esso sarà sensibilmente perpendicolare sopra BM, ed inoltre (trascurando i quadrati delle riduzioni all'ecolittica) sarà $P\Upsilon = G\Upsilon'$, e posto $P\Upsilon = l$ sarà $GC = l - \Pi$. Ora nei triangoli rettangoli $M'AP$, GBP, $M'CG$ si ha tang $M'P$ = tang i' sen $(l - \omega')$; tang GP = tang i sen $(l - \omega)$; tang $M'G = \gamma$ sen $(l - \Pi)$. Trascurando le quantità di terzo ordine delle quantità $M'P$, $M'G$, GP, sarà

tang $M'G$ = tang $M'P$ — tang GP; quindi si formerà l'equazione

$$\gamma \text{ sen } (l - \Pi) = \text{tang } i' \text{ sen } (l - \omega') - \text{tang } i \text{ sen } (l - \omega),$$

la quale dovendosi verificare qualunque sia l, darà per determinare γ, Π le due seguenti

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \operatorname{sen} \Pi = \operatorname{tang} i' \operatorname{sen} \omega' - \operatorname{tang} i \operatorname{sen} \omega \\ \gamma \cos \Pi = \operatorname{tang} i' \cos \omega' - \operatorname{tang} i \cos \omega\end{array}\right\} \ldots (a)$$

562. Più laborioso e molesto riesce il calcolo delle quantità $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ e loro differenze relativamente alle distanze medie a, a'; noi esporremo i precetti dati da La-Place, perchè in pratica riescono semplicissimi, rimandando ad altre opere per lo sviluppo delle belle proprietà di cui godono queste espressioni.

Riprendendo le posizioni fatte nel § 553, si ponga per brevità $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon = \theta$, e si avrà

$$\frac{a}{a'^2}\cos\theta - (a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos\theta + A^{(2)}\cos 2\theta + \ldots A^{(i)}\cos i\theta.$$

Si consideri ora la funzione $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$, la quale sviluppata in serie si rappresenti per

$$\tfrac{1}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\cos\theta + b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\cos 2\theta \ldots + b_{\frac{3}{2}}^{(i)}\cos i\theta;$$

essendo $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$ una funzione di α da determinarsi. È palese che se nella funzione superiore si pone $\frac{a}{a'} = \alpha$, si cangerà in

$\frac{\alpha}{a'}\cos\theta - a'^{-1}(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$; e quindi sarà

$A^{(i)} = -\frac{1}{a'}b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$, eccettuato però il caso di $i = 1$, per il quale avremo evidentemente $A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, donde apparisce che determinato il coefficiente $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$ tosto si avrà il cercato coefficiente $A^{(i)}$.

Per determinare $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$ prendasi a considerare più generalmente la funzione $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, e sviluppata in serie abbiasi

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta \ldots + b_s^{(i)}\cos i\theta,$$

riguardando $b_s^{(i)}$ come una funzione di i, s, α. Differenziando logaritmicamente rapporto a θ, formeremo l'eguaglianza

$$\frac{2\alpha s \operatorname{sen}\theta}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} = \frac{b_s^{(1)}\operatorname{sen}\theta + 2b_s^{(2)}\operatorname{sen} 2\theta \ldots + ib_s^{(i)}\operatorname{sen} i\theta}{\tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta \ldots + b_s^{(i)}\cos i\theta}.$$

Togliendo le frazioni, e confrontando insieme i coefficienti di $\operatorname{sen}(i-1)\theta$ si troverà

$$b^{(i)} = \frac{(i-1)(1+\alpha^2)b_s^{(i-1)} - (i+s-2)\alpha\, b_s^{(i-2)}}{(i-s)\alpha} \quad \ldots (b)$$

dalla quale si formeranno i valori numerici successivi $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$ ec. dopo che si conosceranno $b_s^{(0)}$, $b^{(1)}$.

Pongasi inoltre

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s-1}=\tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)}\cos\theta+b_{s+1}^{(2)}\cos 2\theta\ldots+b_{s+1}^{(i)}\cos i\theta+\text{ec.}$$

e moltiplicando da ambe le parti per $1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2$, si otterrà (sostituendo per $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}$ la serie superiore)

$$\tfrac{1}{2}b_s^{(0)}+b_s^{(1)}\cos\theta+b_s^{(2)}\cos 2\theta+\ldots.$$
$$=(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)(\tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)}\cos\theta\ldots.+b_{s+1}^{(i)}\cos i\theta\text{ ec.})$$

Eseguendo le moltipliche, e confrontando i coefficienti di $\cos i\theta$, si avrà la relazione

$$b_s^{(i)}=(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)}-\alpha\,b_{s+1}^{(i-1)}-\alpha\,b_{s+1}^{(i+1)}.$$

Ora dalla equazione (b) si avrà

$$b_{s+1}^{(i+1)}=\frac{i(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)}-(i+s)\,\alpha\,b_{s+1}^{(i-1)}}{(i-s)\,\alpha}.$$

Sostituito questo valore nell'espressione precedente di $b_s^{(i)}$, si avrà

$$b_s^{(i)}=\frac{2\,s\,\alpha\,b_{s+1}^{(i-1)}-s(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)}}{i-s}.$$

Questa equazione, col porre $i+1$ in luogo di i, darà

$$b_s^{(i+1)}=\frac{2\,s\,\alpha\,b_{s+1}^{(i)}-s(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i+1)}}{i-s+1}.$$

dalla quale, per la sostituzione del valore superiore di $b_{s+1}^{(i+1)}$, si ottiene

$$b_s^{(i+1)}=\frac{s(i+s)\,\alpha(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i-1)}+s[2(i-s)\,\alpha^2-i(1+\alpha^2)^2]\,b_{s+1}^{(i)}}{(i-s)(i-s+1)\,\alpha}.$$

Se ora da questa equazione, e dal precedente valore di $b_s^{(i)}$ si elimina $b_{s+1}^{(i-1)}$ si troverà

$$b_{s+1}^{(i)}=\frac{(i+s)(1+\alpha^2)\,b_s^{(i)}-2(i-s+1)\,\alpha\,b_s^{(i+1)}}{s(1-\alpha^2)^2}\ldots(c)$$

e sostituendo per $b_s^{(i+1)}$ il suo valore ricavato dall'equazione (b), si avrà

$$b_{s+1}^{(i)}=\frac{(s-i)(1+\alpha^2)\,b_s^{(i)}+2(i+s-1)\,\alpha\,b_s^{(i-1)}}{s(1-\alpha^2)^2}\ldots.(d)$$

espressione che direttamente può dedursi dalla precedente cangiando i in $-i$, ed osservando che $b^{(-i)}=b^{(i)}$. Col mezzo di questa formula si potranno avere i valori di $b_{s+1}^{(0)}$, $b_{s+1}^{(1)}$ ec. quando siano stati calcolati i valori di $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$ ec.

563. Venghiamo ora a determinare il valore di $\frac{d\,b_s^{(i)}}{d\alpha}$, ed a tale ufficio ponendo per brevità $1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2=\lambda$, si riprenda l'e-

quazione . . . $\lambda^{-s} = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\theta + b_s^{(2)} \cos 2\theta + \text{ec.}$
e si differenzii rapporto ad α; si avrà così

$$-2s(\alpha - \cos\theta)\lambda^{-s-1} = \frac{1}{2}\frac{d b_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{d b_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\theta + \frac{d b_s^{(2)}}{d\alpha}\cos^2\theta + \text{ec.}$$

Ma si ha $-\alpha + \cos\theta = \frac{1-\alpha^2-\lambda}{2\alpha}$; quindi sostituendo si avrà

$$\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}\lambda^{-s-1} - \frac{s\lambda^{-s}}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d b_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{d b_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\theta + \text{ec.}$$

Scrivendo ora nel primo membro in luogo di λ^{-s-1}, λ^{-s} i loro valori in serie, e confrontando i coefficienti dei simili coseni, si formerà tosto l'equazione

$$\frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha} b_{s+1}^{(i)} - \frac{s}{\alpha} b_s^{(i)}.$$

Sostituendo il valore di $b_{s+1}^{(i)}$ dato dall'equazione (c), si avrà

$$\frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{i + (i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)} b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2} b_s^{(i+1)} \quad . . . (e)$$

Se questa equazione si differenzia rapporto ad α, si otterrà la seguente

$$\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha} + \left[\frac{2(i+s)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{i}{\alpha^2}\right] b_s^{(i)}$$
$$- \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\frac{d b^{(i+1)}}{d\alpha} - \frac{4(i-s+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(i+1)}.$$

Se in questa equazione sostituisconsi per $\frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha}$, $\frac{d b_s^{(i+1)}}{d\alpha}$ i loro valori ricavati dall'equazione (e), verrà essa data per $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i+1)}$, $b_s^{(i+2)}$; ed in luogo di $b_s^{(i+2)}$ scrivendo il suo valore ricavato dall'equazione (b), si avrà $\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2}$ dato per $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i+1)}$. Eseguendo le indicate operazioni si giunge alla seguente equazione

$$\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{i(i-1)-(2i^2-4si-4s^2+2s)\alpha^2+(i^2+4si+i+2s+4s^2)\alpha^4}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} b_s^{(i)}$$
$$+ \frac{2(i-s+1)[1-(4s+1)\alpha^2]}{\alpha(1-\alpha^2)^2} b_s^{(i+1)} \quad . . . (f)$$

Le due equazioni (e), (f) servono a calcolare con molta semplicità i coefficienti $\frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha}$, $\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2}$. Nell'esempio numerico, che riferiremo in fine, avremo bisogno di queste quantità quando $s = \frac{1}{2}$. Posto

pertanto $s = \frac{1}{2}$, cangiando i in $-i$, ed osservando che $b_{\frac{1}{2}}^{(-i)} = b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, avremo per questo caso

$$\frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha} = \frac{(2i-1)}{1-\alpha^2}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i-1)} - \frac{i+(i-1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i)} \quad . \; . \; . \quad (e)'$$

$$\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{i(i+1) - 2i(i+1)\alpha^2 + (i-1)(i-2)\alpha^4}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$$
$$- \frac{(2i-1)(1-3\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)^2}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i-1)} \quad . \; . \; . \quad (f)'$$

Differenziando ancora rapporto ad α, si formerebbe $\frac{d^3\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$, e così di seguito; queste espressioni danno i coefficienti differenziali di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, tosto che questo sia stato calcolato per tutti i numeri interi e positivi di i.

564. Da queste espressioni si formeranno tosto i valori di $\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right)$, $\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right)$ ec.; riprendendo in fatti l'equazione dimostrata a principio $A^{(i)} = -\frac{1}{a'}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, si avrà $\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) = -\frac{1}{a'}\,\frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{d\,a}\right)$; $\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right) = -\frac{1}{a'}\,\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\,a}\right)^2$ ec.; ora si ha $\left(\frac{d\alpha}{d\,a}\right) = \frac{1}{a'}$; dunque in generale

$$\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) = -\frac{1}{a'^2}\,\frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}\,; \qquad \left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right) = -\frac{1}{a'^3}\,\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\,.$$

Si deve per altro eccettuare il caso di $i = 1$, giacchè avendosi $A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}\, b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, si avrà $\left(\frac{d\,A^{(1)}}{d\,a}\right) = \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a'^2}\,\frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}$, rimanendo anche in questo caso $\left(\frac{d^2\,A^{(1)}}{d\,a^2}\right) = -\frac{1}{a'^3}\,\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}$.

Per avere le differenze rapporto ad a' si osserverà che $A^{(i)}$ essendo una funzione omogenea di -1 dimensione rapporto ad a ed a', si avrà l'equazione

$$a\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) + a'\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a'}\right) = -A^{(i)}\,;$$

dalla quale si trarranno le seguenti relazioni

$$a'\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a'}\right) = -A^{(i)} - a\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right)$$

$$a'\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a\,d\,a'}\right) = -2\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) - a\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right)$$

$$a'^2\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a'^2}\right) = 2\,A^{(i)} + 4\,a\left(\frac{d\,A^{(i)}}{d\,a}\right) + a^2\left(\frac{d^2\,A^{(i)}}{d\,a^2}\right)$$

ec.

delle quali abbiamo fatto uso nelle riduzioni delle funzioni $L^{(i)}$, $T^{(i)}$ ec. dei §§ precedenti.

565. Le stesse formule danno ancora il valore di $B^{(i)}$; in fatti si pose (§ 553)

$$(a^2 - 2\,a\,a'\cos\theta + a'^2)^{-3/2} = \tfrac{1}{2}\,B^{(0)} + B^{(1)}\cos\theta + \ldots + B^{(i)}\cos i\,\theta\,;$$

ponendo, come sopra, $\frac{a}{a'} = \alpha$ si avrà

$$a'^{-3}(1 - 2\,\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-3/2} = a'^{-3}(\tfrac{1}{2}\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}} + b^{(1)}_{\frac{3}{2}}\cos\theta \ldots + b^{(i)}_{\frac{3}{2}}\cos i\,\theta)\,;$$

sarà pertanto . . . $B^{(i)} = \frac{1}{a'^3}\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}}$ . . . (g)

donde si dedurrà $\left(\frac{d\,B^{(i)}}{d\,a}\right) = \frac{1}{a'^4}\,\frac{d\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\,\alpha}$; $\left(\frac{d^2\,B^{(i)}}{d\,a^2}\right) = \frac{1}{a'^5}\,\frac{d^2\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\,\alpha^2}$ ec.

Inoltre essendo $B^{(i)}$ funzione omogenea di -3 dimensioni rapporto ad a e a', si avrà l'equazione

$$a\left(\frac{d\,B^{(i)}}{d\,a}\right) + a'\left(\frac{d\,B^{(i)}}{d\,a'}\right) = -3\,B^{(i)} \quad . \; . \; . \quad (k)$$

la quale servirà a calcolare i differenziali parziali rapporto ad a'.

566. Non altro resta che determinare i valori di $b^{(0)}_i$, $b^{(1)}_i$ per potere in generale calcolare $b^{(i)}_i$, $b^{(i)}_{i+1}$, e i loro coefficienti differenziali. Perciò si osservi che λ^{-i} si può scrivere sotto la forma

$$\lambda^{-i} = (1 - \alpha\,e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-i}\,(1 - \alpha\,e^{\theta\sqrt{-1}})^{-i}\,,$$

e essendo la base dei logaritmi iperbolici.

Sviluppando il secondo membro di questa equazione, si vede che i termini $e^{-i\theta\sqrt{-1}}$, $e^{i\theta\sqrt{-1}}$ avranno lo stesso coefficiente, che indicheremo con k, ed è visibile che in questo sviluppo la somma dei due termini $k\,e^{i\theta\sqrt{-1}} + k\,e^{-i\theta\sqrt{-1}}$ sarà $= 2\,k\cos i\,\theta$; perciò sarà $b^{(i)}_i = 2\,k$.

Ora sarà λ^{-i} uguale al prodotto delle due seguenti serie

$$1+s\alpha e^{\theta\sqrt{-1}}+\frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 e^{+2\theta\sqrt{-1}}+\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\alpha^3 e^{3\theta\sqrt{-1}}\ldots$$

$$1+s\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}}+\frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 e^{-2\theta\sqrt{-1}}+\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\alpha^3 e^{-3\theta\sqrt{-1}}\ldots$$

Moltiplicando insieme queste due serie, e prendendo il doppio del coefficiente indipendente da θ, ed il doppio di quello moltiplicato per $e^{\theta\sqrt{-1}}$, avremo tosto

$$b_i^{(0)}=2\left(1+s^2\alpha^2+\frac{s^2(s+1)^2}{1.2^2}\alpha^4+\frac{s^2(s+1)^2(s+2)^2}{1.2^2.3^2}\alpha^6+\ldots\right)$$

$$b_i^{(1)}=2\alpha\left(s+s\frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2+\frac{s(s+1)}{1.2}\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\alpha^4+\ldots\right)$$

delle quali è manifesta la legge.

Perchè queste serie sieno convergenti è necessario che sia $\alpha<1$, e perciò avendo posto $\alpha=\frac{a}{a'}$, si prenderà $a'>a$, lo che è sempre praticabile. Nella riferita teoria delle perturbasioni si devono calcolare i valori di $b_i^{(0)}$, $b_i^{(1)}$ nella supposizione di $s=\frac{1}{2}$, e di $s=\frac{3}{2}$, nei quali casi le due riferite serie sono poco convergenti se non è α una piccola frazione. Sono esse più convergenti facendo $s=-\frac{1}{2}$, per il qual caso si avrà

$$\left.\begin{aligned}b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}&=2\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\alpha^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\alpha^4+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\alpha^6+\left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2\alpha^8+\ldots\right]\\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}&=-\alpha\left[1-\frac{1.1}{2.4}\alpha^2-\frac{1}{4}\frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^4-\frac{1.3}{4.6}\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\alpha^6-\ldots\right]\end{aligned}\right\}(l)$$

delle quali la legge è manifesta, e basterà nella teoria dei pianeti e dei satelliti prendere la somma dei primi 11 o 12 termini; gli altri saranno trascurabili, od al più si potranno sommare come una progressione geometrica il cui rapporto sia $=1-\alpha^2$.

Determinati i valori di $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, l'equazione (c) facendo $i=0$, $s=-\frac{1}{2}$ darà

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)}=\frac{(1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}+6\,\alpha\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}\quad\ldots\ldots\quad(m)$$

e l'equazione (d) facendo $i=1$, $s=-\frac{1}{2}$ darà del pari

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)}=\frac{2\,\alpha\,b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}+3\,(1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}\quad\ldots\quad(n)$$

dai quali mediante l'equazione (b) si otterranno uno dopo l'altro tutti i valori di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$.

Digitized by Google

In seguito l'equazione (d), fatto $s = \frac{1}{2}$, dietro i valori conosciuti di $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ darà (fattovi $i = 0$, poi $i = 1$)

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}; \qquad b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = -\frac{3\, b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

dai quali dietro la equazione (b) si formeranno tutti gli altri.

567. A maggiore dilucidazione delle esposte teorie riferiremo un esempio numerico, intraprendendo a calcolare le perturbazioni che soffre il pianeta Marte per l'azione di Giove. Avremo dietro il quadro del sistema planetario riferito in fine del primo volume, per Marte $a = 1,5236935$, $e = 0,09313400$; e per Giove $a' = 5,2027911$, $e' = 0,04817840$.

Porremo la massa di Giove $m' = \frac{1}{1066,09}$ (§ 322); l'equazione (12) del § 323 applicata prima a Marte, indi a Giove darà il loro movimento siderale diurno da noi rappresentato superiormente per n, n'. Si troverà così

$$\log n = 3,2756600; \qquad n = 1886'',514,$$
$$\log n' = 2,4758555; \qquad n' = 299,127.$$

Inoltre avremo $\log m' = 6,9722062$; $\log R'' m' = 2,2866313$;
$\log \alpha = \log a - \log a' = 9,4666613$; $\alpha = 0,2928608$.

Avvertiamo di avere posto qui fra gli elementi del calcolo il logaritmo della massa di Giove ridotta a secondi di grado, perchè di questa fassi uso nel calcolo di δl, δs affinchè le correzioni della longitudine e della latitudine vengano date in secondi.

Con questi dati, riducendo a numeri i primi cinque termini delle due serie (l), trovo $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,0431187$; $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,2896865$. Quindi il calcolo delle equazioni (m), (n), (p) darà

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2,045086; \; b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0,302806; \; b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = 2,444445; \; b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = 1,039765.$$

Per ottenere $b^{(i)}_{\frac{1}{2}}$, pongasi $s = \frac{1}{2}$ nell'equazione (b); si otterrà

$b^{(i)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2(i-1)}{2i-1}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\, b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}} - \frac{(2i-3)}{2i-1}\, b^{(i-2)}_{\frac{1}{2}}$; facendo ora $i = 2$, $= 3$, $= 4$ ec. si ottengono i seguenti risultamenti

$$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0,066731; \quad b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0,016238; \quad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0,003936;$$

In seguito il calcolo numerico delle equazioni (e)', (f)' ponendovi successivamente $i = 1, 2, 3, 4$, darà

$$\frac{d\, b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 0,323818; \quad \frac{d\, b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 1,105985; \quad \frac{d\, b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 0,473793;$$

$$\frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\,\alpha} = 0,172610\,; \quad \frac{d\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\,\alpha} = 0,061749\,;$$

$$\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\,\alpha^2} = 1,338472\,; \quad \frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\,\alpha^2} = 0,793843\,; \quad \frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\,\alpha^2} = 1,870905\,;$$

$$\frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\,\alpha^2} = 1,242926\,; \quad \frac{d^2\,b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\,\alpha^2} = 0,567965\,.$$

Mediante i trovati valori, dietro i precetti del § 564 si passi a calcolare il valore numerico delle funzioni dipendenti da $A^{(i)}$, delle quali uniremo i logaritmi per i diversi valori di i nella seguente tavoletta

	$\log a A^{(i)}$	$\mathrm{l}.a^2\left(\frac{d A^{(i)}}{d a}\right)$	$\mathrm{l}.a^2\left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a^2}\right)$	$a A^{(i)}$	$a^2\left(\frac{d A^{(i)}}{d a}\right)$	$a^2\left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a^2}\right)$
$i=0$	9,7773729–	8,4436236–	8,5265930 –	– 0,598926	– 0,027773	– 0,033620
1	7,4642720–	7,9585687–	8,2997185 –	– 0,002913	– 0,009090	– 0,019940
2	8,2909889–	8,6089113–	8,6720367 –	– 0,019543	– 0,040636	– 0,046993
3	7,6771938–	8,1703886–	8,4944292 –	– 0,004755	– 0,014815	– 0,031219
4	7,0617164–	7,7239525–	8,1543054 –	– 0,001153	– 0,005296	– 0,014266

Apparecchiati questi valori si passerà al calcolo dei valori di δr e di δl, omettendo i termini nei quali il tempo t trovasi fuori dei segni di seno e di coseno, perchè spariscono avendo riguardo alle variazioni secolari degli elementi ellittici; dalle equazioni (8), (9) del § 555 troveremo $k = -0,026921$, $k' = +0,006529$. In seguito le equazioni (5) del § 554 daranno

$$\log 2\,a\,P^{(1)} = 8,20439-; \quad \log a\,Q^{(1)} = 8,37300-; \quad \log a\,Q^{(-1)} = 7,95279-$$
$$\log 2\,a\,P^{(2)} = 8,93997-; \quad \log a\,Q^{(2)} = 9,47576-; \quad \log a\,Q^{(-2)} = 8,89937+$$
$$\log 2\,a\,P^{(3)} = 8,39199-; \quad \log a\,Q^{(3)} = 9,12818-; \quad \log a\,Q^{(-3)} = 8,55461+$$

$$\log a\,L^{(1)} = 8,64917+; \quad \log a\,L^{(-1)} = 8,56444-$$
$$\log a\,L^{(2)} = 8,73446+; \quad \log a\,L^{(-2)} = 8,38093-$$
$$\log a\,L^{(3)} = 9,51445+$$
$$\log a\,L^{(4)} = 9,13209+$$

In seguito si troverà

$$\log a\,H^{(1)} = 8,75552-; \quad a\,H^{(1)} = -0,05695$$
$$\log a\,H^{(2)} = 9,04078+; \quad a\,H^{(2)} = +0,10985$$
$$\log a\,H^{(3)} = 8,28452-; \quad a\,H^{(3)} = -0,01925$$
$$\log a\,H^{(-1)} = 8,79111+; \quad a\,H^{(-1)} = +0,061817$$
$$\log a\,H^{(-2)} = 8,54634-; \quad a\,H^{(-2)} = -0,035184$$
$$\log a\,H^{(-3)} = 7,18616-; \quad a\,H^{(-3)} = -0,001535\,.$$

Dietro questi numeri il calcolo delle equazioni (16) darà

$$\log a\, C^{(1)} = 8,90934 - ; \qquad \log a\, C^{(-1)} = 8,81670 +$$
$$\log a\, C^{(2)} = 9,65377 - ; \qquad \log a\, C^{(-2)} = 8,68107 -$$
$$\log a\, C^{(3)} = 8,91508 + ; \qquad \log a\, C^{(-3)} = 7,66978 -$$

$$\log a\, D^{(1)} = 8,66026 + ; \qquad \log a\, D^{(-1)} = 8,18590 +$$
$$\log a\, D^{(2)} = 9,00722 + ; \qquad \log a\, D^{(-2)} = 8,28869 +$$
$$\log a\, D^{(3)} = 9,39269 - ;$$

Sostituiti questi numeri nell'equazione (15), qualora si moltiplichi tutta per a, e pongasi per brevità la longitudine media di Giove $= n' t + \varepsilon' = \varphi$, e la longitudine media di Marte $= \sigma = n t + \iota$, si troverà per δr la seguente espressione

$$\delta r = -0,00000662 + 0,00000358 \cos(\sigma - \pi) - 0,00000045 \cos(\sigma - \pi')$$
$$+ 0,00007837 \cos(\varphi - \sigma) \qquad - 0,00001080 \cos(\varphi - \pi)$$
$$- 0,00006794 \cos 2(\varphi - \sigma) \qquad - 0,00005998 \cos(2\varphi - \sigma - \pi)$$
$$- 0,00000656 \cos 3(\varphi - \sigma) \qquad + 0,00001095 \cos(3\varphi - 2\sigma - \pi)$$
$$+ 0,00000873 \cos(\varphi - 2\sigma + \pi) \qquad + 0,00000315 \cos(\varphi - \pi')$$
$$- 0,00000639 \cos(2\varphi - 3\sigma + \pi) \qquad + 0,00000700 \cos(2\varphi - \sigma - \pi')$$
$$- 0,00000062 \cos(3\varphi - 4\sigma + \pi) \qquad - 0,00000170 \cos(3\varphi - 2\sigma - \pi')$$
$$+ 0,00000107 \cos(\varphi - 2\sigma + \pi')$$
$$+ 0,00000134 \cos(2\varphi - 3\sigma + \pi')$$

I numeri superiormente apparecchiati serviranno anco a calcolare i valori di $R^{(i)}$, $S^{(i)}$, $S^{(-i)}$, $T^{(i)}$, $T^{(-i)}$ dietro le equazioni (18), (19), (20), (21), (22), i quali poi sostituiti nell'equazione (17) daranno la correzione della longitudine di Marte. Solo nel fare questa ultima sostituzione si deve adoperare la massa di Giove ridotta in secondi, di cui abbiamo superiormente dato il logaritmo. Si troverà in tal guisa

$$\delta l = +24'',42 \operatorname{sen}(\varphi - \sigma) - 13'',60 \operatorname{sen}(2\varphi - 2\sigma) - 1'',13 \operatorname{sen}(3\varphi - 3\sigma)$$
$$+ 5'',49 \operatorname{sen}(\varphi - \pi) - 23'',56 \operatorname{sen}(2\varphi - \sigma - \pi) + 2'',08 \operatorname{sen}(3\varphi - 2\sigma - \pi)$$
$$+ 2'',40 \operatorname{sen}(\varphi - 2\sigma + \pi)$$
$$- 5'',38 \operatorname{sen}(\varphi - \pi') + 2'',60 \operatorname{sen}(2\varphi - \sigma - \pi') - 3'',58 \operatorname{sen}(3\varphi - 2\sigma - \pi')$$
$$+ 0'',22 \operatorname{sen}(\varphi - 2\sigma + \pi') + \text{ec.}$$

omettendo le altre diseguaglianze dell'ordine delle eccentricità minori di un secondo come molto piccole.

Resta ora ad intraprendere il calcolo delle perturbazioni in latitudine. Avendo già sopra riferiti i valori di $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ coll'ajuto dell'equazione (b) si calcoleranno i valori di $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(3)}_{\frac{1}{2}}$ ec., dai quali si formeranno i valori di $B^{(i)}$ mediante l'equazione (g) del § 565. Calco-

lati poi γ, Π coi precetti del § 561, o semplicemente colle equazioni (a) dello stesso §, si procederà al calcolo di δs colla scorta dell'equazione (24) senza alcuna difficoltà. Risultando questa piccolissima, noi non ce ne occuperemo, tanto più che non fu qui nostro disegno di dare la completa teoria dei movimenti di Marte, ma solo di riferire un esempio per utile esercizio numerico in questa sorta di calcoli. Chi desiderasse vedere la completa teoria dei movimenti planetari dovrà ricorrere alle opere più volte citate di La-Place e di Schubert.

Delle variazioni secolari degli elementi del moto ellittico.

568. Abbiamo veduto che l'attrazione del pianeta m' sopra m introdnce nelle espressioni di δl, δr, δs dei termini proporzionali al tempo misti ad altri termini periodici; quelli in vero sono piccolissimi, ma molto importanti, perchè crescono indefinitamente col progresso del tempo, e supponendo che ad un'epoca stabilita la posizione del pianeta m venisse bene rappresentata in una data ellisse, in virtù dei secondi, non se ne allontanerebbe giammai sensibilmente; ma in virtù dei primi se ne scosterebbe oltre ogni limite, annunziando così un totale cangiamento negli elementi dell'orbita. Vogliamo dimostrare in questo articolo, che i termini sopra menzionati conducono ad una variazione lentissima nell'eccentricità, nel perielio, nel nodo e nell'inclinazione, e come da queste tante variazioni possano essere rappresentati nella formazione delle tavole. A queste variazioni per la loro lentezza si è dato il nome di *variazioni secolari*, non essendo sensibili che dopo lunghi intervalli di tempo. Consideriamo a bel principio le variazioni secolari dell'eccentricità, e della longitudine del perielio, e riprendiamo le equazioni del moto ellittico, supponendo trascurabili le potenze dell'eccentricità superiori alla prima. Avremo in questa ipotesi

$$l = n t + \iota + 2 e \operatorname{sen}(n t + \iota - \pi) ; \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos(n t + \iota - \pi) ;$$

se l'eccentricità e la longitudine del perielio sono costanti, la longitudine vera ed il raggio vettore non differiranno dalla longitudine media e dal semiasse maggiore che di quantità periodiche dell'ordine dell'eccentricità stessa; la cosa però va diversamente se queste quantità siano funzioni del tempo, e variino con esso. In fatti suppongasi che alla fine del tempo t contato da un'epoca data, l'eccentricità e siasi cangiata in $e + \left(\frac{d e}{d t}\right) t$, ed il perigeo π in $\pi + \left(\frac{d \pi}{d t}\right) t$, ove non si assumono potenze superiori alla prima potenza di t, perchè supporremo trascurabile la loro influenza in una prima approssimazione, e perchè

nelle trovate espressioni di δl, δr, δs non esistono che termini moltiplicati per $n t$. Chiamando δl l'incremento introdotto nel valore di l dagli incrementi attribuiti ad e, π, avremo evidentemente

$$\delta l = 2\left(\frac{de}{dt}\right) t \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \pi) - 2e\left(\frac{d\pi}{dt}\right) t \cos(nt + \varepsilon - \pi);$$

la quale potrà porsi eziandio sotto il seguente aspetto

$$\delta l = \left[2\left(\frac{de}{dt}\right)\cos\pi - 2e\left(\frac{d\pi}{dt}\right)\operatorname{sen}\pi\right] t \operatorname{sen}(nt + \varepsilon)$$
$$- \left[2\left(\frac{de}{dt}\right)\operatorname{sen}\pi + 2e\left(\frac{d\pi}{dt}\right)\cos\pi\right] t \cos(nt + \varepsilon) \ldots (a)$$

Riprendasi ora l'equazione (12) § 555, e scrivasi sotto l'aspetto

$$\delta l = (m' n C e \operatorname{sen}\pi + m' n D e' \operatorname{sen}\pi') t \operatorname{sen}(nt + \varepsilon)$$
$$+ (m' n C e \cos\pi + m' n D e' \cos\pi') t \cos(nt + \varepsilon) \ldots (b)$$

uguagliando questo valore δl al precedente, il confronto dei coefficienti di $t \operatorname{sen}(nt + \varepsilon)$, $t \cos(nt + \varepsilon)$ darà per determinare $\left(\frac{de}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$ le due seguenti equazioni

$$2\left(\frac{de}{dt}\right)\cos\pi - 2e\left(\frac{d\pi}{dt}\right)\operatorname{sen}\pi = m' n C e \operatorname{sen}\pi + m' n D e' \operatorname{sen}\pi'$$
$$2\left(\frac{de}{dt}\right)\operatorname{sen}\pi + 2e\left(\frac{d\pi}{dt}\right)\cos\pi = -m' n C e \cos\pi - m' n D e' \cos\pi'.$$

Queste risolute daranno

$$\left(\frac{de}{dt}\right) = \frac{m' n D e'}{2}\operatorname{sen}(\pi' - \pi); \quad \left(\frac{d\pi}{dt}\right) = -\frac{m' n C}{2} - \frac{m' n D e'}{2e}\cos(\pi' - \pi) \quad (c)$$

La prima delle quali darà la variazione annua dell'eccentricità; la seconda quella della longitudine del perielio rapporto alle stelle fisse, se pure n rappresenta il moto annuo siderale del pianeta m intorno al Sole.

Abbiamo considerato l'equazione $l = nt + \varepsilon + 2e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \pi)$, riguardando in essa e, π come variabili col tempo; se allo stesso modo si trattasse l'equazione $\frac{r}{a} = 1 - e\cos(nt + \varepsilon - \pi)$; si troverebbero per determinare $\left(\frac{de}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$ le stesse equazioni (c); lo che giustifica l'ipotesi, da cui siamo partiti, di far dipendere i termini proporzionali al tempo introdotti nella longitudine eliocentrica e nel raggio vettore del pianeta m per l'azione di m' da una variazione lentissima dell'eccentricità e del perielio; e dimostra al tempo stesso che

il moto medio n non riceve per la stessa azione alcuna variazione, giacchè non vi sono altri termini proporzionali al tempo che dovessero con questa essere annullati. Siccome poi il semiasse maggiore a dipende dal moto medio, *così per l'azione di m' sopra m rimarrà a costante*, facendo astrazione dal quadrato delle forze perturbatrici. Questo importantissimo risultamento dovuto a La-Grange ha luogo eziandio, se abbiasi riguardo al quadrato delle forze perturbatrici, a qualunque ordine dell'eccentricità si spingano d'altronde le approssimazioni, come primo di tutti ha dimostrato il signor Poisson nelle Memorie dell'Instituto nazionale di Francia per l'anno 1808.

569. Abbiamo considerato l'azione del pianeta m' sul pianeta m; è palese che l'azione degli altri pianeti m'', m''' del sistema solare produrrà negli elementi del pianeta m delle variazioni secolari simili alle precedenti, la somma delle quali darà i valori completi di $\left(\frac{de}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$. Pongasi a maggiore semplicità $\frac{m'nD}{2}=[0,1]$; $\frac{m'nC}{2}=(0,1)$; e si supponga che considerando l'azione dei pianeti m'', m''' ec. sopra m, questi simboli si cangino rispettivamente in $[0,2]$, $(0,2)$; in $[0,3]$, $(0,3)$ ec.; del pari quando vogliansi calcolare le variazioni degli elementi del pianeta m' per l'azione degli altri m, m'' ec. i valori dei sopra menzionati coefficienti sieno espressi dai simboli $[1,0]$, $(1,0)$; $[1,2]$, $(1,2)$ ec.; per il calcolo delle variazioni di m'' dipendenti da m, m' ec. divengano $[2,0]$, $(2,0)$; $[2,1]$, $(2,1)$, e così degli altri. Dietro queste denominazioni i valori delle variazioni delle eccentricità e delle longitudini dei perielii dei pianeti per la loro reciproca attrazione saranno rappresentati dalle seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{de}{dt}&=[0,1]\,e'\operatorname{sen}(\pi'-\pi)+[0,2]\,e''\operatorname{sen}(\pi''-\pi)+\text{ec.}\\ \frac{de'}{dt}&=[1,0]\,e\operatorname{sen}(\pi-\pi')+[1,2]\,e''\operatorname{sen}(\pi''-\pi')+\text{ec.}\\ \frac{de''}{dt}&=[2,0]\,e\operatorname{sen}(\pi-\pi'')+[2,1]\,e'\operatorname{sen}(\pi'-\pi'')+\text{ec.}\\ &\text{ec.}\end{aligned}\right\}(d)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\pi}{dt}&=-(0,1)-(0,2)-\text{ec.}-[0,1]\frac{e'}{e}\cos(\pi'-\pi)-[0,2]\frac{e''}{e}\cos(\pi''-\pi)\text{ ec.}\\ \frac{d\pi'}{dt}&=-(1,0)-(1,2)-\text{ec.}-[1,0]\frac{e}{e'}\cos(\pi-\pi')-[1,2]\frac{e''}{e'}\cos(\pi''-\pi')\text{ ec.}\end{aligned}\right\}(f)$$

Tanto le equazioni (d) come le (f) costituiscono un sistema di equazioni lineari integrabile in virtù dei rapporti che legano insieme i simboli in esse contenuti. Si ottengono così i valori delle eccentri-

cità e delle longitudini dei perielli espressi in funzione del tempo, e sommamente rimarchevoli sono i risultamenti che si ottengono da queste equazioni, fra i quali è degno di somma attenzione il seguente: *Le eccentricità dei pianeti in quanto che variano per la loro reciproca azione si manterranno sempre molto piccole oscillando entro certi limiti se ad un' epoca data siano piccolissime*. Questo teorema è tanto più maraviglioso in quanto che cesserebbe di essere vero se le direzioni dei movimenti periodici intorno al Sole non fossero tutte da ponente verso levante; la qual condizione avendo realmente luogo annunzia la somma sapienza della suprema Mente ordinatrice che ha voluto con ciò provedere alla stabilità del sistema solare.

Per gli usi ordinarj dell' Astronomia essendo queste variazioni lentissime, si possono riguardare come proporzionali al tempo; in questa ipotesi si ridurranno a numeri per un' epoca determinata i secondi membri delle equazioni (d), $(\int)$ adoprando per n, n', n'' i movimenti siderali annuali dei pianeti; aggiungendo ai valori iniziali di e, e', e''; π, π', π'' le loro rispettive variazioni moltiplicate per il numero degli anni trascorsi fino ad un' altra data epoca, si avranno per quest' ultima le corrispondenti eccentricità, ed i corrispondenti perielii; calcolando con essi, dietro le leggi del moto ellittico, la longitudine eliocentrica ed il raggio vettore, non si dovrà in seguito avere alcun riguardo ai termini che nelle superiori espressioni di δl, δr contengono il tempo t fuori dei segni di seno o coseno.

570. Resta che assegniamo i precetti per il calcolo dei simboli $(0,1)$, $[0,1]$ ec. che entrano nelle superiori equazioni. Si riprendano a tale oggetto le equazioni (10) § 555, ed in esse si sostituiscano per $A^{(0)}$, $\frac{dA^{(0)}}{da}$ ec. i loro valori dati al § 564; si otterrà

$$C = -\alpha^2 \frac{d\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha^3 \frac{d^2\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\,;\quad D = -\alpha\left(b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \alpha \frac{d\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\right).$$

Sostituendo in queste equazioni i valori di $\frac{d\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha}$, $\frac{d^2\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}$ ec. dati dalle equazioni $(e)'$, $(\int)'$ § 563, e per $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ ponendo i loro valori dati dalle (m), (n) § 566, si troverà dietro le convenienti riduzioni

$$C = \frac{3\,\alpha^2\, b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{2\,(1-\alpha^2)^2}\,;\quad D = -\frac{3\,\alpha\,\{(1+\alpha^2)\, b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + \tfrac{1}{2}\alpha\, b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}\}}{(1-\alpha^2)^2}\,;$$

donde si avrà

$$(0,1) = \frac{3\, m'\, n\, \alpha^2\, b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{4\,(1-\alpha^2)^2}\,;\quad [0,1] = -\frac{3\, m'\, n\, \alpha\,\{(1+\alpha^2)\, b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} + \tfrac{1}{2}\alpha\, b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}\}}{2\,(1-\alpha^2)^2}.$$

Per dedurre da queste equazioni i valori dei simboli (1,0), [1,0] pongasi $(a^2 - 2aa\cos\theta + a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a, a') + (a, a')' \cos\theta + \text{ec.}$. Confrontando questo sviluppo con l'altro assunto al § 562
$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} \cos\theta + \text{ec.}$, se ne dedurrà
$(a, a') = \frac{1}{2} a' b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$; $(a, a')' = a' b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$. Se questi valori introducansi nel simbolo (0, 1), rammentando che $\alpha = \frac{a}{a'}$, si avrà

$(0, 1) = \frac{3\, m' n a' a^2 (a, a')^2}{4(a'^2 - a^2)^2}$. Dietro ciò avremo evidentemente, a motivo della identità dei simboli $(a, a')^2$, $(a', a)^2$
$(1, 0) = \frac{3\, m n' a a'^2 (a, a')^2}{4(a'^2 - a^2)^2}$.

Confrontando ora i secondi membri delle due trovate equazioni si otterrà la relazione $(0, 1)\, m n' a' = (1, 0)\, m' n a$. Se ora trascurasi la massa dei pianeti in confronto di quella del Sole assunta per unità, si avrà (equaz. 12 § 323) $n a \sqrt{a} = n' a' \sqrt{a'} = n'' a'' \sqrt{a''}$; quindi la ottenuta relazione si cangerà in

$$\left.\begin{array}{l} (0, 1)\, m \sqrt{a} = (1, 0)\, m' \sqrt{a'} \\ [0, 1]\, m \sqrt{a} = [1, 0]\, m' \sqrt{a'} \\ (0, 2)\, m \sqrt{a} = (2, 0)\, m' \sqrt{a'} \\ \quad \text{ec.} \end{array}\right\} (e)$$

Del pari si troverà

le quali serviranno a calcolare i simboli (1,0), (2,0) ec., quando siansi già calcolati (0, 1), (0, 2) ec.

Le equazioni (*e*) mettono in piena evidenza il teorema enunziato al § precedente; in fatti si moltiplichino le equazioni (*d*) rispettivamente per $m e \sqrt{a}$, $m' e' \sqrt{a'}$, $m'' e'' \sqrt{a''}$ ec., e si sommino; il secondo membro si annullerà, ed il primo integrato darà

$$e^2 m \sqrt{a} + e'^2 m' \sqrt{a'} + e''^2 m'' \sqrt{a''} + \text{ec.} = \text{costante}.$$

Se i pianeti circolano intorno al Sole tutti in un senso, avranno n, n', n'', e quindi $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$ lo stesso segno, e perciò essendo piccolissimo ad un'epoca data il primo membro, si dovrà sempre mantenere tale, e le quantità e, e', e'' oscilleranno sempre fra limiti ristretti.

571. Consideriamo in secondo luogo il termine
$-\frac{m' n a^2 a'}{4} B^{(1)} t \gamma \cos(n t + \iota - \Pi)$ dalle integrazioni introdotto nel valore di δs, e vediamo se questo possa rappresentarsi mediante una lentissima variazione della inclinazione e della longitudine del nodo. A tale oggetto fingasi l'orbita del corpo m riferita ad un piano, per il quale assumeremo quello dell'ecclittica ad un'epoca determi-

Digitized by Google

nata; sia i l'inclinazione, ω la longitudine del nodo ascendente per la stabilita epoca. Supponendo qneste qnantità costanti, e trascurando le seconde dimensioni delle inclinazioni ed i loro prodotti per le eccentricità, chiamando s la tangente della latitudine, sarà

$$s = \text{tang}\, i \,\text{sen}\,(nt + \iota - \omega) = \text{tang}\, i \cos\omega \,\text{sen}\,(nt + \iota) - \text{tang}\, i \,\text{sen}\,\omega \cos(nt + \iota).$$

Pongasi $p = \text{tang}\, i \,\text{sen}\,\omega$, $q = \text{tang}\, i \cos\omega$, e sarà

$$\text{tang}\, i = \sqrt{(p^2 + q^2)}, \quad \text{tang}\,\omega = \frac{p}{q}, \quad s = q\,\text{sen}\,(nt + \iota) - p\cos(nt + \iota).$$

Se ora i ed ω variano col tempo, varieranno anco p, q; ed assnmendo lentissime queste variazioni, in modo che anche per un lungo tratto avanti e dopo la stabilita epoca sia sufficiente tener conto delle prime potestà del tempo, supponiamo che alla fine del tempo t, p, q siansi cangiati in $p + \frac{dp}{dt}t$, $q + \frac{dq}{dt}t$, ed s in $s + \delta s$; così avremo

$$\delta s = \left(\frac{dq}{dt}\,\text{sen}\,(nt + \iota) - \frac{dp}{dt}\cos(nt + \iota)\right) t \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Questo valore di δs si uguagli al termine

$-\frac{m' n a^2 a'}{4} B^{(1)} t \gamma \cos(nt + \iota - \Pi)$ dipendente dall'azione di m' sopra m, dopo di averlo trasformato, come ora indicheremo.

Primieramente sarà (§ 565) $B^{(1)} = \frac{1}{a'^3} b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = -\frac{3\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{a'^3 (1 - \alpha^2)^3}$; quindi sarà $\frac{m' n a^2 a'}{4} B^{(1)} = -\frac{3\, m' n \alpha^2 b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4(1 - \alpha^2)^3} = -(0, 1)$ (§ 570); in seguito chiamando i', ω' l'inclinazione e la longitudine del nodo del pianeta m' sull'eccelittica fissa, e ponendo $p' = \text{tang}\, i' \,\text{sen}\,\omega'$, $q' = \text{tang}\, i' \cos\omega'$, le cqnazioni ($a$) del § 561 daranno per determinare γ, Π le due seguenti . . . $\gamma\,\text{sen}\,\Pi = p' - p$; $\gamma \cos\Pi = q' - q$ . . . (g)

Dietro qneste relazioni l'indicato termine diverrà

$$= (0, 1)(q' - q)\, t \cos(nt + \iota) + (0, 1)(p' - p)\, t\,\text{sen}\,(nt + \iota);$$

ed il confronto dei termini simili nelle due espressioni di δs darà

$$\frac{dp}{dt} = -(0, 1)(q' - q); \qquad \frac{dq}{dt} = (0, 1)(p' - p).$$

Se allo stesso modo si passa a considerare l'azione dei pianeti m'', m''' ec. sul pianeta m, si otterranno per $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ espressioni simili alle precedenti, che da esse deduconsi cangiando soltanto $(0, 1)$, p', q' in $(0, 2)$, p'', q''; ovvero in $(0, 3)$, p''', q''' ec.; ed è evidente dietro lo spirito del calcolo differenziale che la somma di tutti questi

risultamenti parziali costituirà gl'interi valori di $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ dipendenti dall'azione riunita dei pianeti del sistema solare. Si troverà in tal guisa

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \{(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots\}q-(0,1)q'-(0,2)q''-(0,3)q'''-\ldots\\ \frac{dq}{dt} &= -\{(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots\}p+(0,1)p'+(0,2)p''+(0,3)p'''+\ldots\end{aligned}\right\}(h)$$

Simili equazioni daranno le variazioni delle quantità p', q', p'', q'' ec. dalle quali dipende alla fine del tempo t la posizione delle orbite dei pianeti m', m''... rapporto al piano fisso dell'ecclittica.

Ritenendo, come nel § 569, che la funzione (0,1) cangisi in (1,0), (1,2), (1,3) ec. quando trattasi delle azioni di m, m'', m'''... sopra m', avremo evidentemente le seguenti

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp'}{dt} &= \{(1,0)+(1,2)+(1,3)+\ldots\}q'-(1,0)q-(1,2)q''-(1,3)q'''-\ldots\\ \frac{dq'}{dt} &= -\{(1,0)+(1,2)+(1,3)+\ldots\}p'+(1,0)p+(1,2)p''+(1,3)p'''+\ldots\end{aligned}\right\}(h)'$$

e così per gli altri pianeti.

Queste equazioni sono lineari, ed integrate danno i valori di p, q, p', q' in funzioni periodiche del tempo. Questi integrali conducono a molte belle ed importanti conseguenze pella teoria del sistema planetario, fra le quali la più rimarchevole è che le orbite planetarie supposte ad un'epoca determinata pochissimo fra loro inclinate si manterranno sempre pochissimo inclinate, oscillando dentro ristretti limiti in virtù di lentissime variazioni, le quali per molti secoli avanti e dopo la stabilita epoca si possono avere per proporzionali al tempo.

572. Le equazioni superiori ci serviranno intanto a dare le espressioni delle variazioni secolari del nodo e dell'inclinazione dell'orbita di m senza bisogno di alcuna integrazione con un'esattezza sufficiente agli usi dell'Astronomia. Si riprendano perciò le equazioni $p = \text{tang}\, i \,\text{sen}\, \omega$; $q = \text{tang}\, i \cos \omega$; si differenzino, e vi si ponga $\cos^2 i = 1$. Otterremo così

$$dp = di\,\text{sen}\,\omega + \text{tang}\, i \cos\omega\, d\omega; \quad dq = di \cos\omega - \text{tang}\, i\,\text{sen}\,\omega\, d\omega;$$

dalle quali si ricaverà

$$di = dp\,\text{sen}\,\omega + dq\cos\omega; \quad d\omega = \frac{dp\cos\omega - dq\,\text{sen}\,\omega}{\text{tang}\, i}.$$

Se ora nei secondi membri di queste equazioni sostituiscansi per dp, dq i loro valori dati dalle equazioni (h), dietro le convenienti riduzioni avremo

$$\left.\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -(0,1)\,\text{tang}\,i'\,\text{sen}\,(\omega-\omega') - (0,2)\,\text{tang}\,i''\,\text{sen}\,(\omega-\omega'')\ \text{ec.}\\ \frac{d\omega}{dt} &= \{(0,1)+(0,2)+(0,3)\ldots\} - (0,1)\frac{\text{tang}\,i'}{\text{tang}\,i}\cos(\omega-\omega')\\ &\quad -(0,2)\frac{\text{tang}\,i''}{\text{tang}\,i}\cos(\omega-\omega'') - (0,3)\frac{\text{tang}\,i'''}{\text{tang}\,i}\cos(\omega-\omega''')-\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ (l)$$

Queste equazioni danno la variazione annua dell'inclinazione e della longitudine del nodo dell'orbita di m rapporto al piano dell'ecclittica supposto fisso, se pure nel calcolo dei simboli (0, 1), (0, 2) ec. siasi per n preso il moto siderale annuo del pianeta. Sarebbe ora facile dietro le superiori dottrine assegnare le annue variazioni del piano dell'ecclittica per l'azione dei pianeti sulla terra, e riferire la posizione dei piani delle orbite planetarie al piano mobile dell'ecclittica; ma contenti di avere esposto i fondamenti di queste importanti teorie, rimanderemo per la loro completa evoluzione alla Meccanica celeste di La-Place, ed a due interessantissime Memorie di La-Grange negli Atti dell'Accademia di Berlino per gli anni 1781–1783.

Delle perturbazioni delle comete, e dei pianeti di orbite molto eccentriche.

573. I metodi precedentemente esposti danno una sufficiente esattezza nella teoria dei vecchi pianeti, nei quali le eccentricità ed inclinazioni sono molto piccole, e si possono trascurare i quadrati ed i prodotti di queste grandezze. Vero è che anche per questi vi sono negli ordini superiori alcuni termini, i quali per le successive integrazioni acquistano denominatori piccolissimi, e quindi divengono sensibilissimi; ciò soprattutto accade nella teoria di Giove e di Saturno dove i termini del terzo ordine acquistano un denominatore assai piccolo, e producono le grandi ineguaglianze alle quali sono sottoposti i loro movimenti, come La-Place per il primo ha riconosciuto nella sua Meccanica celeste. Ma anche fatta astrazione da questi casi singolari, i quali richiedono un particolare sviluppo che eccede i confini di un'opera elementare, i metodi esposti sono presso che di niun uso per le orbite dei due nuovi pianeti Giunone e Pallade, e per le orbite delle comete, pelle quali grandissima essendo la eccentricità, le serie o non sono convergenti, o lenta a segno ne è la convergenza, che converrebbe tenere a calcolo un numero spaventevole di termini, se ottenere si volesse una mediocre approssimazione. In tali circostanze adoprasi con successo il metodo delle quadrature meccaniche, fingendo che per un istante il pianeta muovasi in una ellisse, i cui parametri variano nell'istante prossimo. Se si calcoli di quanto le attrazioni straniere

fanno variare gli elementi del moto ellittico da un istante all'altro, aggiungendo queste variazioni ai loro valori numerici rappresentanti la sua posizione nel primo istante, si avrà un nuovo sistema di elementi ellittici, che la rappresenta ancora nel secondo istante, e così da questo secondo si potranno trasportare ad un terzo istante, finchè si giunga ad un'epoca qualunque determinata, per la quale sia proposto di rappresentare il moto del pianeta e della cometa. A tutto rigore questi istanti dovrebbero assumersi infinitamente piccoli, lo che renderebbe il metodo di pressochè niun uso; ma la lentezza con cui variano le posizioni e le azioni scambievoli dei corpi celesti, permette di dare ad essi una considerabile estensione, e facilita di molto i calcoli numerici, i quali tuttavia risultano sempre lunghi e prolissi. Noi ci proponiamo di esporre brevemente i fondamenti di questa importantissima teoria con quell'ordine che più ci sembra adattato alla comune intelligenza.

574. Si riprendano a tale oggetto le equazioni (B) del § 546

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \left(\frac{d R}{d x}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \left(\frac{d R}{d y}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{d R}{d z}\right) = 0$$

nelle quali si ha

$$R = \frac{m'(x x' + y y' + z z')}{r'^3} - \frac{m'}{\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Da queste si formeranno facilmente le tre seguenti

$$\frac{x\, d^2 y - y\, d^2 x}{d t^2} = y\left(\frac{d R}{d x}\right) - x\left(\frac{d R}{d y}\right)$$

$$\frac{x\, d^2 z - z\, d^2 x}{d t^2} = z\left(\frac{d R}{d x}\right) - x\left(\frac{d R}{d z}\right)$$

$$\frac{y\, d^2 z - z\, d^2 y}{d t^2} = z\left(\frac{d R}{d y}\right) - y\left(\frac{d R}{d z}\right).$$

I secondi membri di queste equazioni sono dell'ordine delle forze perturbatrici, ed uguali a zero, se queste manchino; trascurando i quadrati delle forze perturbatrici si può scrivere in essi in luogo di x, y, z, x', y', z' i loro valori dati dalla teoria del moto ellittico, con che verranno ad essere funzioni determinate del tempo t. Ponendo pertanto

$$\left.\begin{aligned} y\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right) &= \frac{dc}{dt} \\ z\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dz}\right) &= \frac{dc'}{dt} \\ z\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dz}\right) &= \frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right\} (a)$$

ed integrando avremo

$$\left.\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c\,;\quad \frac{x\,dz - z\,dx}{dt} = c'\,;\quad \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = c''\right\} (C)$$

i secondi membri delle quali saranno costanti, trascurando l'azione piccolissima dei corpi stranieri, e varieranno col tempo dietro la legge indicata dalle equazioni (a), quando a queste si abbia riguardo.

Se ora si moltiplica la prima di queste equazioni per z, la seconda per $-y$, la terza per x, e si sommano i prodotti, si avrà l'equazione . . . $c''x - c'y + cz = 0$ . . . (D)

Moltiplicando del pari la prima per dz, la seconda per $-dy$, la terza per dx, si formerà l'altra equazione

$$c''\,dx - c'\,dy + c\,dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D)'$$

la quale altro non è che il differenziale della precedente preso nell'ipotesi di c, c', c'' costanti. Queste due equazioni conducono alle seguenti importantissime conseguenze.

1.° L'equazione (D) mostra che senza le forze perturbatrici il pianeta descrive intorno al centro del Sole una trajettoria situata in un piano, di cui le costanti c, c', c'' determinano la posizione.

2.° In virtù delle azioni reciproche dei pianeti variano da un istante all'altro i valori di c, c', c''; ma per l'istante dt l'equazione (D)' mostra che si devono riguardare come costanti, nè manifestansi gli effetti della loro variazione che nel passaggio da un istante all'altro. Il moto del pianeta per un istante fassi dunque in un piano.

575. Determiniamo ora la forma di c, c', c''. Movendosi il pianeta in un piano, sia ad un tempo qualunque i l'inclinazione del detto piano al piano delle x, y; ω la longitudine del suo nodo ascendente. Col ragionamento stesso del § 228 sarà l'equazione del piano rappresentata dall'equazione

$$z - y \operatorname{tang} i \cos\omega + x \operatorname{tang} i \operatorname{sen}\omega = 0\,;$$

e questa confrontata con l'equazione (D) darà

$$c' = c \operatorname{tang} i \cos\omega\,; \qquad c'' = c \operatorname{tang} i \operatorname{sen}\omega\,;$$

dalle quali si otterrà

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{(c'^2 + c''^2)}}{c}\,; \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{c''}{c'}\,.$$

Per determinare c osservo che senza le azioni straniere il pianeta descrive intorno al centro del Sole una sezione conica, in cui le aree sono proporzionali ai tempi; e se a ed e rappresentano il semiasse maggiore e l'eccentricità della trajettoria, sarà (§ 319) $\sqrt{[\mu a(1-e^2)]}$ il rapporto fra il doppio dell'area ed il tempo. Ora $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ è il doppio della projezione dell'area divisa pel tempo dt nel piano delle x, y, cioè in un piano inclinato a quello dell'orbita di un angolo i; risulta da ciò che $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \frac{r^2\,dv}{dt}\cos i$; pertanto sarà

$$\text{e quindi} \ldots \left.\begin{aligned} c &= \sqrt{[a\mu(1-e^2)]}\cos i \\ c' &= \sqrt{[a\mu(1-e^2)]}\,\text{sen}\, i \cos \omega \\ c'' &= \sqrt{[\mu a(1-e^2)]}\,\text{sen}\, i\, \text{sen}\, \omega \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

576. Per trovare facilmente altri tre integrali primi delle equazioni (B), dai quali si possa passare all'equazione finita della trajettoria, si ponga il raggio vettore del pianeta $m = r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, e si differenzii la funzione $\frac{x}{r}$. Con facili riduzioni si troverà identicamente $d\frac{x}{r} = \frac{y}{r^3}(y\,dx - x\,dy) + \frac{z}{r^3}(z\,dx - x\,dz)$.

Eliminando $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$ col mezzo delle equazioni (B), ed avendo riguardo alle equazioni (C), si avrà

$$\mu\, d\frac{x}{r} = \frac{c\,d^2y + c'\,d^2z}{dt} + \left[c\left(\frac{dR}{dy}\right) + c'\left(\frac{dR}{dz}\right)\right]dt.$$

Con simile artificio si formeranno le due seguenti

$$\mu\, d\frac{y}{r} = \frac{c''\,d^2z - c\,d^2x}{dt} + \left[c''\left(\frac{dR}{dz}\right) - c\left(\frac{dR}{dx}\right)\right]dt$$

$$\mu\, d\frac{z}{r} = -\frac{c'\,d^2x + c''\,d^2y}{dt} - \left[c'\left(\frac{dR}{dx}\right) + c''\left(\frac{dR}{dy}\right)\right]dt.$$

Se ora per brevità si pone

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= c\left(\frac{dR}{dy}\right) + c'\left(\frac{dR}{dz}\right) - \frac{dc\,dy + dc'\,dz}{dt^2} \\ \frac{df'}{dt} &= c''\left(\frac{dR}{dz}\right) - c\left(\frac{dR}{dx}\right) + \frac{dc\,dx - dc''\,dz}{dt^2} \\ \frac{df''}{dt} &= -c''\left(\frac{dR}{dy}\right) - c'\left(\frac{dR}{dx}\right) + \frac{dc'\,dx + dc''\,dy}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

avremo evidentemente mediante l'integrazione delle tre trovate equazioni

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\frac{x}{r} &= \frac{c\,dy + c'\,dz}{dt} + f \\ \mu\,\frac{y}{r} &= \frac{c''\,dz - c\,dx}{dt} + f' \\ \mu\,\frac{z}{r} &= -\frac{c'\,dx + c''\,dy}{dt} + f'' \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Quanto alle quantità f, f', f'' introdotte in queste equazioni, apparisce che sono funzioni delle forze perturbatrici, le quali variano col tempo dipendentemente dalle equazioni (c); si riducono a costanti quando le stesse forze sono $= 0$, e rappresentano le costanti arbitrarie delle integrazioni.

Si moltiplichino le equazioni (E) rispettivamente per x, y, z, ed osservando che $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, si troverà avendo riguardo alle equazioni (C)

$$\mu\, r = f\,x + f'\,y + f''\,z + c^2 + c'^2 + c''^2 \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

Se le stesse equazioni si moltiplicano per dx, dy, dz, e si osservi che $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$, si troverà

$$\mu\, dr = f\,dx + f'\,dy + f''\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (F)'$$

la quale è evidentemente il differenziale della precedente preso nell'ipotesi di f, f', f'', c, c', c'' costanti.

Dimostrano ora queste equazioni 1.° che fatta astrazione dalle forze perturbatrici il pianeta in virtù dell'azione principale del Sole percorre una trajettoria del secondo ordine, e quindi una sezione conica, i di cui parametri sono costanti, e dipendono dalle arbitrarie f, f', f''; 2.° che anche avendo riguardo alle forze perturbatrici si può supporre il pianeta mosso in una sezione conica avente i suoi parametri costanti per un istante dt, non manifestandosi l'effetto delle attrazioni che nell'istante seguente.

Da ciò, e da quanto abbiamo detto nel § 574 risulta che se si abbia un'equazione finita fra x, y, z, ed i parametri c, c', c'', f, f', f'' si possono questi in una prima differenziazione riguardare come costanti, non facendo variare che le coordinate x, y, z; ma se si dovesse passare ad una seconda differenziazione, i parametri devono variare per modo che le loro variazioni uguaglino l'effetto delle forze perturbatrici.

Per ultimo si sommino insieme le equazioni (B) moltiplicate rispettivamente per $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, e si ponga per brevità

$$2\left(\frac{dR}{dx}\right)dx + 2\left(\frac{dR}{dy}\right)dy + 2\left(\frac{dR}{dz}\right)dz = d\,\frac{\mu}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Integrando sarà

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta il quadrato della velocità del pianeta m, e chiamando ds l'arco della trajettoria descritta nell'istante dt, sarà esso $=\frac{ds^2}{dt^2}$.

La quantità a che abbiamo introdotta è costante se mancano le forze perturbatrici, e da quanto si è esposto nel § 324, rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita. Varia questo da un istante all'altro dietro la legge indicata dall'equazione (d), la quale può essere eziandio presentata sotto la forma

$$d\frac{\mu}{a}=2\,dR \quad . \quad . \quad . \quad (d)'$$

purchè nel differenziare la funzione R s'intendano variabili le sole coordinate del pianeta m, ritenendo per costanti quelle dei pianeti perturbatori, come si praticò anche di sopra.

577. Resta ad assegnare i valori di f, f', f'' per i parametri della trajettoria. A tale oggetto si riprenda la prima delle equazioni (E), scrivendo in essa in luogo di c, c' i loro valori dati dalle equazioni (C). Si otterrà così

$$\mu\frac{x}{r}=\frac{dy}{dt}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}+\frac{dz}{dt}\,\frac{x\,dz-z\,dx}{dt}+f,$$

dalla quale si avrà

$$f=\mu\frac{x}{r}-\frac{(x\,dy^2-y\,dx\,dy+x\,dz^2-z\,dx\,dz)}{dt^2}.$$

Siano X, Y, Z le coordinate relative al perielio; g la distanza perielia; sarà $g^2=X^2+Y^2+Z^2$; ed essendo per la condizione del minimo $dg=0$, avremo $X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ=0$. Questa equazione darà $Y\,dX\,dY+Z\,dX\,dZ=-X\,dX^2$; fingendo ora nel valore di f sostituite le coordinate relative al perielio, in virtù della ottenuta riduzione avremo $f=\mu\frac{X}{g}-\frac{X(dX^2+dY^2+dZ^2)}{dt^2}$,

ossia riducendo in virtù dell'equazione (G) $f=\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)X$.

Se chiamiamo e l'eccentricità, sarà $g=a(1-e)$; con ciò la precedente diviene $f=-\frac{\mu e}{a(1-e)}X$.

Con un simile ragionamento la seconda e la terza delle equazioni (E) daranno

$$f' = \frac{-\mu e}{a(1-e)} Y; \qquad f'' = \frac{-\mu e}{a(1-e)} Z.$$

Indichisi per ψ l'angolo che la projezione dell'asse maggiore sul piano delle x, y fa coll'asse delle x; β la sua inclinazione allo stesso piano; ψ sarà ciò che in Astronomia chiamasi *longitudine ridotta* del perigeo, essendo β la sua *latitudine*. Avremo
$X = a(1-e)\cos\beta\cos\psi$; $Y = a(1-e)\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\psi$; $Z = a(1-e)\,\mathrm{sen}\,\beta$.
Introdotti questi valori nelle equazioni precedenti, si avranno le seguenti molto semplici per determinare f, f', f''

$$\left.\begin{aligned} f &= -\mu e \cos\beta\cos\psi \\ f' &= -\mu e \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\psi \\ f'' &= -\mu e\,\mathrm{sen}\,\beta \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

dalle quali si dedurranno le seguenti

$$\mathrm{tang}\,\psi = \frac{f'}{f}; \quad \mathrm{tang}\,\beta = \frac{f''}{\sqrt{(f^2+f'^2)}}; \quad \mu e = \sqrt{(f^2+f'^2+f''^2)},$$

mediante le quali si avranno le variazioni della posizione del perielio e dell'eccentricità date per df, df', df''.

Osserveremo per ultimo che fra le costanti f, f', f'', c, c', c'' esiste una relazione, che si ottiene dalle equazioni (E) moltiplicandole rispettivamente per c'', $-c'$, c, e sommando i prodotti. Si troverà così in virtù dell'equazione (D) la relazione

$$f c'' - f' c' + f'' c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

la quale, sostituendo i valori di f, f', f'', c, c', c'' dati dalle equazioni (b), (e) riducesi alla seguente $\mathrm{tang}\,\beta = \mathrm{tang}\,i\,\mathrm{sen}\,(\psi - \omega)$, che tosto si poteva ottenere mediante la considerazione del triangolo rettangolo formato nella sfera celeste dal piano dell'orbita, e dal piano delle x, y intorno al nodo, al perielio ed alla sua projezione.

578. Le equazioni trovate nei §§ precedenti servono a dare le variazioni degli elementi dell'orbita per dc, df, dc', df', dc'', df'', qualunque sia il piano delle x, y, e qualunque sia in esso la posizione dell'asse delle x. Per giungere a formule più semplici pel calcolo numerico, vogliamo ora scegliere a piano delle x, y il piano dell'orbita ad un'epoca determinata; per asse delle x lo stesso asse maggiore, prendendo le x positive verso il perielio, e vogliamo trascurare i quadrati delle forze perturbatrici. In questa supposizione sarà $z = 0$ al principio, indi si manterrà sempre dell'ordine delle forze perturbatrici, come lo è la funzione R; la quantità designata per l sarà l'anomalia vera di m, che porremo $= v$; sarà $\psi = \pi = 0$, $\beta = 0$, o dell'ordine di m. Dietro ciò, dalle equazioni (b), (e) ricaveremo per il principio, qualora pongasi $\mu = 1$; $c = \sqrt{[a(1-e^2)]}$; $f = -e$; c', c'', f', f'' si manterranno sempre piccolissimi, e dell'ordine delle forze perturbatrici.

579. Vediamo ora come si dovranno calcolare i valori delle coordinate che entrano nella funzione R. Primieramente osserveremo, che essendo questa funzione dell'ordine delle forze perturbatrici, otterremo le coordinate tanto pel corpo m, quanto pel corpo m' dietro gli elementi del moto ellittico conosciuti ad un'epoca data, pella quale prenderemo quella che corrisponde al principio del tempo. Quindi per il corpo m, chiamando Z l'anomalia media alla fine di un tempo qualunque t; u l'anomalia eccentrica; v l'anomalia vera, avremo le equazioni (§ 86)

$$\left.\begin{array}{l} Z = u - e \operatorname{sen} u; \quad r = a(1 - e \cos u) \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$x = r \cos v; \qquad y = r \operatorname{sen} v;$$

ovvero più semplicemente (eliminando da queste ultime r, v coll'ajuto della seconda e della terza equazione)

$$x = a \cos u - a e; \quad y = a \sqrt{(1 - e^2)} \operatorname{sen} u \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Inoltre chiamando n il moto diurno siderale, avremo

$$n\, d\, t = d\, Z = d\, u\, (1 - e \cos u) = \frac{r\, d\, u}{a};$$

donde si otterrà . . . $\dfrac{d\, u}{d\, t} = \dfrac{a\, n}{r}$ . . . (3)

Per trovare con facilità le coordinate x', y', z' del pianeta m', rappresenti (*fig.* 60 *a*) ΥE l'ecclittica; $\Upsilon P Q$ il circolo massimo della sfera celeste in cui giace l'orbita di m; $\Upsilon'' M M'$ quello dell'orbita di m'; N, N' i loro nodi ascendenti; rappresenteremo per ω, ω' le longitudini $N\Upsilon = N\Upsilon'$, $N'\Upsilon = N'\Upsilon''$; e per i, i' le inclinazioni all'ecclittica. Risoluto colla Trigonometria il triangolo NMN', in cui $N = i$, $NN'M = 180° - i'$, $NN' = \omega' - \omega$, si avrà l'angolo in M, che porremo $= \lambda$, ed i lati MN, MN', i quali aggiunti ad ω, ω' daranno le longitudini $M\Upsilon' = \Pi$, $M\Upsilon'' = \Pi'$. Sia in P il perigeo dell'orbita di m; in P' quello di m', di modo che sia $P\Upsilon' = \pi$, $P'\Upsilon'' = \pi'$. Sarà $MP = \Pi - \pi = \gamma$.

Alla fine del tempo t il pianeta m' sia riferito ad M'; sarà $M'P'$ la sua anomalia vera, che porremo $= v'$; $M'M = v' + \pi' - \Pi'$ che per brevità porremo $= \varphi'$. Si conduca l'arco $M'Q$ perpendicolare ad $\Upsilon' N Q$, e pongasi $PQ = l$, $M'Q = \beta$.

Essendo l'asse delle x una retta che dal centro della sfera dirigesi al punto P, è palese che avremo

$$x' = r' \cos \beta \cos l; \quad y' = r' \cos \beta \operatorname{sen} l; \quad z' = r' \operatorname{sen} \beta.$$

Per calcolare β ed l, il triangolo rettangolo $MM'Q$, in cui si ha $MQ = l - \gamma$, $M'Q = \beta$, $MM' = \varphi'$, l'angolo in $M = \lambda$, darà

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi' \\ \cos\beta \cos(l-\gamma) = \cos\varphi' \\ \cos\beta \operatorname{sen}(l-\gamma) = \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi' \end{array}\right\} \quad (3)$$

dalle quali si otterranno facilmente le cercate quantità.

Le ultime due daranno con facili operazioni trigonometriche

$$\cos\beta \cos l = \cos\gamma \cos\varphi' - \operatorname{sen}\gamma \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi'$$
$$\cos\beta \operatorname{sen} l = \operatorname{sen}\gamma \cos\varphi' + \cos\gamma \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi'.$$

Quindi si potranno calcolare x', y', z' eziandio mediante le seguenti equazioni

$$\left.\begin{array}{l} x' = r' \cos\gamma \cos\varphi' - r' \operatorname{sen}\gamma \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi' \\ y' = r' \operatorname{sen}\gamma \cos\varphi' + r' \cos\gamma \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi' \\ z' = r' \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi' \end{array}\right\} \quad (4)$$

Se ora si riprenda la funzione R del § 546, rammentando essere $\varrho = \sqrt{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]}$, si avrà mediante la differenziazione, omettendo sempre i termini di secondo ordine

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{m'x'}{r'^3} - \frac{m'(x'-x)}{\varrho^3}; \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{m'y'}{r'^3} - \frac{m'(y'-y)}{\varrho^3};$$
$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m'z'}{r'^3} - \frac{m'z'}{\varrho^3}.$$

580. Apparecchiati questi valori, vediamo come se ne deducano le variazioni degli elementi dell'orbita; per il che principieremo da quelli relativi alla sua posizione. A tale oggetto pongasi $p = \frac{c''}{c}$, $q = \frac{c'}{c}$; le equazioni (b) daranno $\operatorname{tang} i = \sqrt{(p^2+q^2)}$, $\operatorname{tang}\omega = \frac{p}{q}$. Assegnando pertanto alla fine del tempo t i valori di p e di q tosto ne dedurremo la posizione dell'orbita rapporto al piano fisso delle x, y.

Ora si ha $dp = \frac{dc''}{c} - \frac{c''dc}{c^2}$; essendo c'', dc dell'ordine delle forze perturbatrici, potremo trascurare il termine $\frac{c''dc}{c^2}$, ed avremo semplicemente $dp = \frac{dc''}{c} = \frac{dc''}{\sqrt{[a(1-e^2)]}}$. Allo stesso modo si otterrà $dq = \frac{dc'}{\sqrt{[a(1-e)]}}$.

Le equazioni (a), se si trascurino i termini di secondo ordine $z\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $z\left(\frac{dR}{dy}\right)$, daranno $\frac{dc''}{dt} = -y\left(\frac{dR}{dz}\right)$, $\frac{dc'}{dt} = -x\left(\frac{dR}{dz}\right)$.

Sostituendo per $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ il suo valore, tosto formeremo le due seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} dp &= -\frac{m' z' y}{\sqrt{[a(1-e^2)]}}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\varrho^3}\right)dt \\ dq &= -\frac{m' z' x}{\sqrt{[a(1-e^2)]}}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\varrho^3}\right)dt \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

le quali col mezzo delle quadrature daranno alla fine del tempo t i valori di p, q; e quindi tosto ricaveremo i ed ω.

581. Venendo alle variazioni dell' eccentricità e del perielio, si riprendano le equazioni (e); ponendovi $\mu = 1$, $\psi = \pi = 0$, $\beta = 0$, la prima darà $f = -e$; quindi $de = -df$; differenziando la seconda, e ponendovi dopo la differenziazione $\beta = 0$, $\psi = \pi = 0$, avremo $e\,d\pi = -df$.

Le equazioni (c), trascurando i termini di secondo ordine delle forze perturbatrici, daranno

$$\frac{df}{dt} = c\left(\frac{dR}{dy}\right) - \frac{dc}{dt}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{df}{dt} = -c\left(\frac{dR}{dx}\right) + \frac{dc}{dt}\frac{dx}{dt}.$$

La prima delle equazioni (a), sostituiti i valori superiori di $\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $\left(\frac{dR}{dy}\right)$ darà $\frac{dc}{dt} = m'(x'y - y'x)\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right)$.

In seguito le equazioni (2) (§ 579) differenziate danno

$$\frac{dy}{dt} = a\sqrt{(1-e^2)}\cos u\,\frac{du}{dt} = \frac{n a^2 \sqrt{(1-e^2)}\cos u}{r};$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} u\,\frac{du}{dt} = -\frac{n a^2 \operatorname{sen} u}{r}.$$

ma si ha $n = \frac{\mu}{a^{3/2}} = \frac{1}{a^{3/2}}$; sostituito questo valore si troverà

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{[a(1-e^2)]}}{r}\cos u; \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{a}\operatorname{sen} u}{r}.$$

Dietro ciò avremo per calcolare de, $e\,d\pi$ colle quadrature le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} de = &-m'\sqrt{[a(1-e^2)]}\left(\frac{y'}{r'^3}-\frac{y'-y}{\varrho^3}\right)dt \\ &+\frac{m'\sqrt{[a(1-e^2)]}\cos u}{r}(x'y-y'x)\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\varrho^3}\right)dt \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} e\,d\pi &= m'\sqrt{[a(1-e^2)]}\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\varrho^3}\right)dt \\ &+\frac{m'\sqrt{a}\,\text{sen}\,u}{r}(x'y-y'x)\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\varrho^3}\right)dt \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

L'equazione $(d)'$ del § 576 darà

$$da = -2a^2\,dR = -2a^2\left(\frac{dR}{dx}\right)dx - 2a^2\left(\frac{dR}{dy}\right)dy,$$

essendo di secondo ordine il termine $-2a^2\left(\frac{dR}{dz}\right)dz$.

Sostituendo per dx, dy, $\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $\left(\frac{dR}{dy}\right)$ i loro valori si avrà

$$\left.\begin{aligned} da &= 2m'a^{5/2}\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\varrho^3}\right)\frac{\text{sen}\,u}{r}\,dt \\ &-2m'a^{5/2}\left(\frac{y'}{r'^3}-\frac{y'-y}{\varrho^3}\right)\frac{\sqrt{(1-e^2)}\cos u}{r}\,dt \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Rappresentando per n il moto medio diurno, sarà $n = a^{-3/2}$; perciò $dn = -\frac{3}{2}a^{-5/2}\,da = 3\,a\,n\,dR$; ovvero direttamente

$$\left.\begin{aligned} dn &= -3m'\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\varrho^3}\right)\frac{\text{sen}\,u}{r}\,dt \\ &+3m'\left(\frac{y'}{r'^3}-\frac{y'-y}{\varrho^3}\right)\frac{\sqrt{(1-e^2)}\cos u}{r}\,dt \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Potremo dispensarci dal ricavare il valore di a dall'equazione (8) perchè ottenuto n mediante l'integrazione di quest'ultima tosto si avrà a dall'equazione $n = a^{-3/2}$.

Chiamando ζ l'incremento della longitudine media dipendente dalla variazione del moto medio dal principio del tempo fino alla fine, avremo $d\zeta = n\,dt = dt\int dn$; integrando si avrà

$$\zeta = Nt + \int dt\int dn = Nt + t\int dn - \int t\,dn \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dove N rappresenta il moto diurno medio siderale nell'ellisse, che aveva luogo all'origine del tempo t.

582. Essendo nel caso dell'ellisse invariabile l'anomalia media rappresentata da $nt + \iota - \pi$, abbiamo l'equazione $nt + \iota - \pi = u - e\,\text{sen}\,u$, che differenziata dà $ndt = du(1 - e\cos u)$. Questa equazione essendo del primo ordine deve aver luogo anche nel caso dell'ellisse variabile (§ 576); quindi avremo

$$d\iota - d\pi = du(1 - e\cos u) - de\,\text{sen}\,u,$$

purchè qui non si faccia variare u che a ragione delle variazioni di di e e di π. Ora fra l'anomalia vera e l'anomalia eccentrica si ha la relazione

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(v-\pi)=\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,.$$

Differenziando nell'ipotesi di u e π variabili, avremo

$$-\frac{d\pi}{\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)}=\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}+\frac{2\,d\,e\,\text{tang}\,\frac{1}{2}u}{(1-e)\sqrt{(1-e^2)}};$$

ovvero, sostituendo il valore di $\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)$,

$$d\,u=-\frac{d\,\pi\,(1-e\cos u)}{\sqrt{(1-e^2)}}-\frac{d\,e\,\text{sen}\,u}{1-e^2}\,.$$

Introdotto questo valore in $d\,\varepsilon-d\,\pi$, si avrà

$$d\,\varepsilon-d\,\pi=-\frac{d\,\pi\,(1-e\cos u)^2}{\sqrt{(1-e^2)}}-\frac{d\,e\,\text{sen}\,u\,(2-e^2-e\cos u)}{1-e^2},$$

la quale equazione darà la variazione dell'epoca ε se per $d\,e$, $d\,\pi$ introducansi i loro valori.

L'equazione precedente, ponendo per brevità $d\,\varepsilon-d\,\pi=d\,g$, può anco scriversi sotto la forma seguente più comoda al calcolo

$$d\,g=-\frac{r^2\,d\,\pi}{a^2\sqrt{(1-e^2)}}-\frac{r+a\,(1-e^2)}{a\,(1-e^2)}\,d\,e\,\text{sen}\,u\;\;.\;.\;.\;(11)$$

Se ora chiamiamo Z l'anomalia media al principio del tempo, z quella che corrisponde al fine, sarà questa evidentemente rappresentata dall'equazione

$$z=Z+N\,t+\int d\,t\int d\,n+\int d\,g\;\;.\;.\;.\;(12)$$

Determinata l'anomalia media, se ad essa aggiungasi la ottenuta longitudine del perielio, si avrà l'epoca dei moti medii per la fine del tempo t; ottenuti così in virtù delle precedenti equazioni gli elementi tutti del moto ellittico, si otterrà la posizione geocentrica del pianeta mediante i precetti consueti.

583. Nella teoria delle comete accade che riconosciuta l'identità di una cometa con una già osservata nei trascorsi tempi, se ne voglia in precedenza assegnare il ritorno, ed indicare l'epoca del suo prossimo passaggio al perielio. Si stabilisce per origine del tempo l'ultimo passaggio osservato pel perielio, nel qual caso si ha $Z=0$; si determina per tutta l'estensione dell'orbita mediante le quadrature il valore di $\int d\,t\int d\,n+\int d\,g$ mediante i precetti superiori; quindi dovendosi avere per il ritorno al perielio $z=360^\circ$, la equazione superiore darà $t=\dfrac{360^\circ-\int d\,t\int d\,n-\int d\,g}{N}$, dove N rappresenta il moto diurno siderale medio nell'ellisse dedotto dalle osservazioni all'epoca dell'ultimo passaggio. Questo valore di t sommato col tempo dell'ultimo perielio osservato porge quello del prossimo ritorno.

Quanto al valore di N, spesso non sarà direttamente conosciuto, e converrà ricavarlo per la discussione delle osservazioni del periodo precedente, lo che obbligherà al calcolo delle perturbazioni provate in quell'intervallo. Intorno a ciò si ha un bell'esempio nella Memoria del signor Damoiseau premiata nel 1812 dall'Accademia reale di Torino inserita nel volume XXIV dei suoi Atti, nella quale intraprende a calcolare il tempo del prossimo passaggio al perielio della cometa di Halley, cercando primieramente di determinare il moto medio pel 1759 dall'intervallo di tempo trascorso dal 1682 fino al 1759; indi partendo dall'ellisse ottenuta per questo istante calcola le successive alterazioni che essa riceve per l'azione dei due più potenti pianeti del sistema solare, Giove e Saturno, di 30 in 30 gradi di anomalia eccentrica finchè giungasi al prossimo passaggio al perielio, che egli trova dovere accadere ai 16^{g},6 di Novembre del 1835.

Noi per non lasciare del tutto all'oscuro i nostri lettori intorno al modo di calcolare dietro le formule superiori le correzioni degli elementi riferiremo un esempio numerico relativo al pianeta Pallade, la cui grande eccentricità ed inclinazione rendono vani i metodi ordinarj di approssimazione, e fanno temere che non si possano stabilire delle tavole perpetue per i suoi movimenti simili a quelle già costruite per gli altri pianeti. Avanti però di passare all'esempio vogliamo brevemente indicare come si debba procedere ad integrare per quadratura una qualunque delle formule superiori.

584. Sia $\beta\, d\, t$ una delle precedenti formule qualunque da integrarsi colle quadrature dall'origine del tempo t fino ad un determinato valore di $t = \tau$. Dividasi l'estensione del tempo τ in un numero k di parti uguali, tanto maggiore quanto maggiore sarà l'esattezza a cui si aspira, ed assumasi ad unità d'intervallo una di queste parti. Sia r il numero dei giorni contenuti in una di esse; n il moto diurno siderale del pianeta in secondi. Essendosi per le cose superiori posto $n\, a^{3/2} = 1$, si dovrà considerare come $= 1$ il prodotto $r\, n\, a^{3/2}$, e quindi per ridurre a secondi di grado il coefficiente β si dovrà moltiplicare per $r\, n\, a^{3/2}$, con che la formula proposta diverrà $= r\, n\, \beta\, a^{3/2}\, d\, t$. Si calcolerà il valore del coefficiente $r\, n\, \beta\, a^{3/2}$ per ogni intervallo dal primo $= 0$ fino all'ultimo $= k$, e pongansi per ordine i risultamenti espressi dalla serie $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)} \ldots y^{(k)}$. Sarà il valore del proposto integrale (La-Place, *Mec. cel.* v. IV. p. 207)

$$\begin{aligned}\int \beta\, d\, t = {} & \tfrac{1}{2} y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} \ldots + y^{(k-1)} + \tfrac{1}{2} y^{(k)} \\ & - \tfrac{1}{12} \left(\Delta\, y^{(k-1)} - \Delta\, y^{(0)}\right) \\ & - \tfrac{1}{24} \left(\Delta^2 y^{(k-2)} + \Delta^2 y^{(0)}\right) \\ & - \tfrac{19}{720} \left(\Delta^3 y^{(k-3)} - \Delta^3 y^{(0)}\right) \\ & - \tfrac{3}{160} \left(\Delta^4 y^{(k-4)} + \Delta^4 y^{(0)}\right) \\ & - \text{ec.}\end{aligned}$$

dove Δy, $\Delta' y$ ec. indicano le differenze finite prime, seconde ec. dei termini già calcolati superiormente.

Se l'intervallo dividasi in un numero di parti sufficientemente grande sicchè ciascheduna non oltrepassi i 15 o 20 giorni sarà raro di dovere impiegare oltre le differenze prime; ed in quei casi nei quali per un soverchio avvicinamento dei pianeti m, m' queste divenissero troppo forti si dovrà per maggiore sicurezza diminuire il proposto intervallo.

Premesso questo, passiamo all'esposizione dell'esempio numerico.

585. Il signor Enke nel vol. VI delle Notizie astronomiche pag. 420 riferisce i seguenti elementi ellittici rappresentanti le posizioni geocentriche di Pallade intorno alla sua opposizione col Sole nel 1828.

1828; 20 Novembre 0^h $0'$ tempo medio in Gottinga.

longitudine media di Pallade . . .	$82° 16' 28'',7$
longitudine del perielio $= \pi$ . . .	$120\ 58\ 48,7$
longitudine del nodo $= \omega$	$172\ 39\ 6,1$
inclinazione all'ecclittica $= i$ . . .	$34\ 35\ 30,5$
eccentricità . . . $e = \text{sen}\,\varphi =$	$\text{sen}\ 14\ 3\ 59,1$
moto diurno siderale	$= n = 768'',98540$
log semiasse maggiore . .	$= \log a = 0,4427257$

Proponiamoci di trasportare questi elementi al 24 Aprile 1830 (0^h dello stesso meridiano) epoca prossima della sua nuova opposizione col Sole, avendo riguardo alle attrazioni di Giove e di Saturno.

Qui l'intervallo fra i due tempi è di 520 giorni; non avendo in vista che di riferire un esempio numerico, lo divideremo soltanto in 10 parti di 52 giorni per ciascheduna; intervallo in generale troppo grande per giungere a lodevole precisione, a meno che (come qui fortunatamente accade) i pianeti perturbatori non rimangano sempre molto lontani dal corpo attratto. Dovremo primieramente calcolare le coordinate di Pallade nella superiore orbita ellittica rapporto al perielio, determinando di 52 in 52 giorni l'anomalia media, l'anomalia eccentrica u, il raggio vettore r, l'anomalia media v, dopo di che sarà $x = r \cos v$, $y = r \,\text{sen}\, v$. Otterremo così la seguente tavoletta:

Anni	Gior. Mesi	Valori di t	Anom. media	Anom. eccentr. $= u$	Anom. vera $= v$	log r	log x	log y
1828	20 Nov.	0	321° 17′,7	310° 44′,6	299° 8′,1	0,36771	0,05512 +	0,30896—
1829	11 Genn.	1	332 24,1	324 16,2	315 6,9	0,34728	0,19765 +	0,19589—
	4 Marzo	2	343 30,6	338 22,7	332 30,0	0,33150	0,27942 +	9,99591—
	25 Aprile	3	354 37,0	352 53,7	350 54,1	0,32286	0,31737 +	9,52186—
	16 Giugno	4	5 43,5	7 33,4	9 40,4	0,32300	0,31678 +	9,54841+
	7 Agosto	5	16 49,9	22 3,8	28 3,2	0,33189	0,27761 +	0,00426+
	28 Sett.	6	27 56,4	36 9,3	45 24,0	0,34785	0,19429 +	0,20034+
	19 Nov.	7	39 2,8	49 59,7	61 20,0	0,36839	0,04957 +	0,31160+
1830	10 Genn.	8	50 9,3	62 30,5	75 44,8	0,39104	9,78233 +	0,37746+
	3 Marzo	9	61 15,8	74 41,7	88 43,1	0,41393	8,76336 +	0,41382+
	24 Aprile	10	72 22,2	86 16,0	100 24,9	0,43580	9,69296 —	0,42858+

Si dovrà in seguito passare al calcolo delle coordinate di Giove e di Saturno rapporto alla linea degli absidi di Pallade, ed a tale effetto ritenuta la figura (60 a) e le denominazioni tutte del § 579 si risolverà il triangolo MNN', dal quale per le formule di Gauss otterremo (se per brevità si ponga $MN = \Pi - \omega = \psi$; $MN' = \Pi' - \omega' = \psi'$) (Trig. XII)

$$(1)\ \cos\tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi) = -\cos\tfrac{1}{2}(i + i')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)$$
$$(2)\ \cos\tfrac{1}{2}\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi) = \cos\tfrac{1}{2}(i - i')\cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)$$
$$(3)\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\psi + \psi') = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(i + i')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)$$
$$(4)\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\psi + \psi') = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(i - i')\cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega).$$

Per ridurre a numeri queste equazioni prenderemo gli elementi di Giove e di Saturno dalle tavole del signor Bouvard pubblicate in Parigi nel 1821, e riducendo le divisioni centesimali alle comuni si ha

per Giove	per Saturno	
$i' = 1°\,18'\,44'',4$	$i' = 2°\,29'\,31''$	per il 20 Nov. 1828.
$\omega' = 98\ 42\ 17,3$	$\omega' = 112\ 10\ 55$	
$\pi' = 11\ 35\ 0,$	$\pi' = 89\ 41\ 46$	

Ritenendo (come sopra) per Pallade

$$i = 34°\,35'\,30'',5;\quad \omega = 172°\,39'\,6'',1;\quad \pi = 120°\,58'\,49',$$

si troverà dalle superiori equazioni per Giove

$$\psi = 182°\,14'\,29'';\quad \psi' = 255°\,47'\,45'';\quad \lambda = 34°\,17'\,57'';$$
$$\Pi = \psi + \omega = 354°\,53'\,35'';\quad \Pi' = \omega' + \psi' = 354°\,30'\,2'';$$
$$\gamma = \Pi - \pi = 233°\,54'\,46''.$$

Dietro questi valori le equazioni (4) del § 579 prenderanno la forma

$$x' = A'r'\cos\varphi' + B'r'\operatorname{sen}\varphi';\quad y' = A''r'\cos\varphi' + B''r'\operatorname{sen}\varphi';$$
$$z' = A'''r'\operatorname{sen}\varphi';\ \text{essendo } A', B' \text{ ec. costanti};$$
$$\varphi' = v' + \pi' - \Pi' = v' + 17°\,4'\,58''.$$

Sarà poi

$\log A' = 9,77013 -$; $\log A'' = 9,90748 -$; $\log A''' = 9,75035 +$;
$\log B' = 9,82477 +$; $\log B'' = 9,68742 +$.

Del pari si otterrà per Saturno

$$\Psi = 183^\circ\ 56'\ 17''; \quad \Psi' = 243^\circ\ 44'\ 4''; \quad \lambda = 33^\circ\ 25'\ 31'';$$
$$\Pi = 356\ 35\ 23; \quad \Pi' = 355\ 54\ 59; \quad \gamma = 235\ 36\ 34;$$
$$\varphi' = v' + 93^\circ\ 46'\ 47'';$$

$\log A' = 9,75192 -$; $\log A'' = 9,91656 -$; $\log A''' = 9,74103 +$;
$\log B' = 9,83803 +$; $\log B'' = 9,67340 -$.

Apparecchiati così questi costanti, il calcolo delle coordinate di Giove e Saturno non ha più alcuna difficoltà. Nella seguente tavoletta ne riunisco i logaritmi delle medesime ottenuti prendendo dalle citate tavole l'anomalia vera corretta dalla grande ineguaglianza, e trascurando le piccole equazioni periodiche che hanno nel presente argomento poca influenza, ed anco i logaritmi delle distanze r', ϱ dei pianeti dal Sole e da Pallade.

	per Giove					per Saturno				
T.	log x'	log y'	log z'	log r'	log ϱ	log x'	log y'	log z'	log r'	log ϱ
0	0,20202−	0,64392+	0,42202−	0,73060	0,87377	0,90444+	9,66736+	0,62298+	0,95753	0,92668
1	0,27930−	0,62382+	0,43669−	0,72952	0,86185	0,90625+	9,87726+	0,61363+	0,95792	0,90409
2	0,34299−	0,60035+	0,44869−	0,72855	0,84731	0,90760+	0,01785+	0,60360+	0,95834	0,88336
3	0,39646−	0,57311+	0,45812−	0,72710	0,83005	0,90846+	0,12349+	0,59285+	0,95876	0,86767
4	0,44204−	0,54164+	0,46514−	0,72581	0,81024	0,90887+	0,20803+	0,58134+	0,95922	0,86022
5	0,48117−	0,50516+	0,46974−	0,72443	0,78836	0,90881+	0,27839+	0,56905+	0,95969	0,86259
6	0,51491−	0,46279+	0,47199−	0,72300	0,76523	0,90831+	0,33848+	0,55595+	0,96019	0,87396
7	0,54401−	0,41318+	0,47187−	0,72153	0,74152	0,90733+	0,39085+	0,54196+	0,96070	0,89165
8	0,56906−	0,35620+	0,46937−	0,72002	0,71808	0,90590+	0,43721+	0,52701+	0,96123	0,91269
9	0,59047−	0,28377+	0,46444−	0,71849	0,69514	0,90402+	0,47870+	0,51108+	0,96178	0,93478
10	0,60852−	0,19626+	0,45697−	0,71692	0,67278	0,90165+	0,51613+	0,49405+	0,96234	0,95651

Il valore di ϱ, di cui abbiamo qui riferito il logaritmo per ogni valore del tempo si può ottenere dalla sua espressione analitica $\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+z'^2]}$; ma più comodamente si otterrà dalle seguenti equazioni

$$\varrho \cos f \cos g = x' - x; \quad \varrho \cos f \operatorname{sen} g = y' - y; \quad \varrho \operatorname{sen} f = z';$$

le quali speditamente danno g, f, indi ϱ.

Col mezzo dei valori precedenti facilmente riduconsi a numeri per ogni valore di t i coefficienti di dt nelle equazioni (5), (6), (7), (8), (9), (11) dei §§ 580–581; ma per facilitarne ulteriormente il calcolo numerico è opportuno formare ancora un'altra tavoletta dei logaritmi delle funzioni comuni ad alcune di esse. Ponendo per brevità

$D = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}$; $F = \frac{x'y - y'x}{r}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right)$; $G = \frac{x'}{r'^3} - \frac{x' - x}{\varrho^3}$;

$H = \frac{y'}{r'^3} - \frac{y' - y}{\varrho^3}$; ritenendo $e = \text{sen}\,\varphi$ le citate equazioni divengono

$$dp = -\frac{m'z'y}{\cos\varphi\sqrt{a}} D\,dt; \quad dq = -\frac{m'z'x}{\cos\varphi\sqrt{a}} D\,dt \quad \ldots (5)'$$

$$d\varphi = -m'\sqrt{a}\,H\,dt + m'\sqrt{a}\,F\cos u\,dt \quad \ldots\ldots (6)'$$

$$d\pi = m'\sqrt{a}\cot\varphi\,G\,dt + \frac{m'\sqrt{a}}{\text{sen}\,\varphi} F\,\text{sen}\,u\,dt \quad \ldots\ldots (7)'$$

$$dn = -3\,m'G\frac{\text{sen}\,u}{r}dt + 3\,m'\cos\varphi\,H\frac{\cos u}{r}dt \quad \ldots (9)'$$

$$da = -\tfrac{2}{3}a^{3/2}\frac{dn}{R''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)'$$

$$dg = -\frac{r^2}{a^2\cos^2\varphi}d\pi + \left(\frac{r}{a\cos^2\varphi} + 1\right)\cos\varphi\,\text{sen}\,u\,d\varphi \quad . (11)'$$

al sollecito calcolo delle quali giova calcolare i valori di D, F, G, H e disporli nella seguente tabella

	per Giove				per Saturno			
Val. di t	log D	log F	log G	log H	log D	log F	log G	log H
0	7,60617+	7,48336−	7,56996−	8,11126+	6,50243−	7,36192+	6,82607−	7,54765−
1	7,58894+	7,80311−	7,51720−	8,08778+	6,78032−	7,57415+	7,25285−	7,54407−
2	7,56348+	7,96430−	7,41447−	8,06967+	6,95665−	7,62469+	7,48430−	7,49969−
3	7,52917+	8,04782−	7,21525−	8,05956+	7,06595−	7,47972+	7,62839−	7,37603−
4	7,46790+	8,05854−	6,63749−	8,06183+	7,11428−	6,47567+	7,70757−	7,05461−
5	7,36949+	8,00771−	6,96473+	8,07990+	7,10140−	7,43120+	7,72754−	6,32634+
6	7,23401+	7,87431−	7,36286+	8,11428+	7,03019−	7,65696+	7,69461−	7,16197+
7	6,94596+	7,58070−	7,55461+	8,16137+	6,90417−	7,67569+	7,61384−	7,37291+
8	5,97313−	6,59140+	7,66210+	8,21775+	6,71684−	7,56996+	7,48855−	7,46740+
9	7,08743−	7,68255+	7,71950+	8,27761+	6,42651−	7,32675+	7,31175−	7,51388+
10	7,40088−	7,97011+	7,74052+	8,33786+	5,74036−	6,66652+	7,04532−	7,53744+

586. Ultimati così i precedenti calcoli preparatorj, si passerà dietro la scorta delle superiori equazioni e tavolette al calcolo delle variazioni degli elementi, ed essendo gl'intervalli di tempo $= 52^g$, riguarderemo $dt = 52$; per ridurre a secondi tutti i coefficienti moltiplicheremo le equazioni per $na^{3/2}$; ossia per il suo valore costante $R''k$, di cui il logaritmo è $= 3,55001$ (§ 323); per Giove si farà $m' = \frac{1}{1066,09}$; per Saturno $m' = \frac{1}{3512,08}$ (valori presi dal quadro ri-

ferito al § 312). In tal guisa le equazioni (5)′, (6)′ ec. saranno riducibili a numeri per ogni valore di t. Consideriamo a bel principio le equazioni (5)′; esse daranno

	per Giove				per Saturno	
t	dp	Diff. I.	Diff. II.	dq	dp	dq
0	— 2″,3292	+ 0″,5444	+ 0″,1486	+ 1″,2983	— 0″,0884	+ 0″,0493
1	— 1 ,7848	+ 0 ,6930		+ 1 ,7920	— 0 ,1265	+ 0 ,1270
2	— 1 ,0918			+ 2 ,0973	— 0 ,1171	+ 0 ,2249
3	— 0 ,3461			+ 2 ,1614	— 0 ,0493	+ 0 ,3079
4	+ 0 ,3247			+ 1 ,9050	+ 0 ,0571	+ 0 ,3348
5	+ 0 ,7648			+ 1 ,4418	+ 0 ,1538	+ 0 ,2886
6	+ 0 ,8638			+ 0 ,8518	+ 0 ,1990	+ 0 ,1962
7	+ 0 ,5748			+ 0 ,3412	+ 0 ,1862	+ 0 ,1018
8	— 0 ,0708	— 0 ,9195	— 0 ,1627	— 0 ,0180	+ 0 ,1360	+ 0 ,0345
9	— 0 ,9903	— 1 ,0822		— 0 ,0221	+ 0 ,0731	+ 0 ,0016
10	— 2 ,0725			+ 0 ,3810	+ 0 ,0150	— 0 ,0028

Da questi valori parziali dedurremo i valori di p e di q dipendenti tanto dall'azione di Giove che di Saturno, operando, come ora indicheremo, per il valore di p dipendente da Giove. Si rappresentino per $y^{(0)}, y^{(1)} \ldots y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}$ i valori di dp corrispondenti a $t = 0, = 1 \ldots = 8, = 9, = 10$; se dalla somma algebrica dei numeri della seconda colonna si tolga la semisomma algebrica del primo e dell'ultimo si formerà evidentemente il valore di $\frac{1}{2}y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} \ldots y^{(9)} + \frac{1}{2}y^{(10)}$, che costituisce la prima e principale parte del valore di $\int \beta\, dt$ § 584, che nel nostro caso diverrà $= -3'',9566$. In seguito si prendano le differenze prime e seconde dei primi ed ultimi termini, come vedesi praticato nella terza e quarta colonna. Sarà $\Delta y^{(0)} = +0'',5444$; $\Delta^2 y^{(0)} = +0'',1486$; $\Delta y^{(9)} = -1'',0822$; $\Delta^2 y^{(8)} = -0'',1627$. Questi sostituiti nella citata espressione di $\int \beta\, dt$ daranno

per l'azione di Giove . . . . . $p = -3'',8216$
Parimente si avrà per l'azione di Saturno . $p = +0\ ,4751$

Perciò sarà il valore completo di p . . . . $= -3\ ,3465$.

Trattando allo stesso modo i valori parziali di dq, si otterrà per l'azione di Giove $q = +11'',3885$; e per l'azione di Saturno $q = +1'',6550$; perciò il valore completo di $q = +13'',0435$.

Si chiami ora I l'inclinazione dell'orbita variata sull'orbita primitiva di Pallade, ed Ω la longitudine del nodo ascendente rapporto al perielio del 1828; sarà (osservando che I è un piccolissimo angolo), dietro i ragionamenti del § 580, $I = \sqrt{(p^2 + q^2)} = 13'',466$;

tang $\Omega = \frac{p}{q}$ = tang — 14° 23′ 23″, ove determinasi l'arco nel quarto quadrante affinchè sia I positivo.

Determinato Ω rapporto al perielio, sarà la longitudine corrispondente nell'orbita rapporto all'equinozio $= \pi + \Omega = 106° 35' 25'',7$, che porremo $= \Omega'$.

587. Resta ora che rintracciamo la posizione del nodo ascendente dell'orbita variata sull'ecclittica, e la sua inclinazione a questo ultimo piano. A tale oggetto consideriamo la figura (60 a), e supponiamo che sia ΥE l'ecclittica del 1828; $\Upsilon' M$ l'orbita primitiva di Pallade; $\Upsilon'' M$ l'orbita variata, essendo in M il nodo ascendente della seconda sulla prima ora determinato. Sarà $M\Upsilon' = \Omega'$; $N\Upsilon = \omega$; $MN = \Omega' - \omega$, che indicheremo con N; l'angolo in $M = I$, in $N = i$, ed in $N' = 180° - (i + \delta i)$; NN' sarà la variazione del nodo dopo la prima epoca, che rappresenteremo per $\delta\omega$, essendo I, δi, $\delta\omega$ piccolissime quantità. Il triangolo $NN'M$ darà
$\cos(i + \delta i) = \cos i - I \operatorname{sen} i \cos N$, la quale riducesi a

$$\delta i = I \cos N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Inoltre dallo stesso triangolo si ha

$$\delta\omega = \frac{I \operatorname{sen} N}{\operatorname{sen} i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Queste due equazioni tradotte a numeri nel nostro caso danno $\delta i = + 5'',46$; $\delta\omega = - 21'',68$.

Ora era $i = 34° 35' 50'',5$; $\omega = 172° 39' 6'',1$; quindi rapporto all'ecclittica della prima epoca avremo l'inclinazione dell'orbita variata $= 34° 35' 56'',0$; e la longitudine del nodo ascendente $= 172° 38' 44'',42$.

Conviene ora ridurre questi elementi all'ecclittica mobile ed all'equinozio medio del 24 Aprile 1830. Si riprendano perciò i ragionamenti e le formule del § 388, e fingasi nel luogo ove cade il nodo della nuova orbita sull'ecclittica una stella di latitudine $b = 0$, e di longitudine $l = \omega$; la sua longitudine alla fine del tempo t per la prima delle equazioni (4) sarà divenuta $= l' = l + \psi' - \psi$; cioè basterà aggiungere all'ottenuta longitudine del nodo la precessione degli equinozii $\psi' - \psi$ per l'intervallo di tempo $t' - t$, che per 520 giorni è $= 71'',54$.

Per trovare la variazione dell'inclinazione si consideri nella nuova orbita di Pallade un punto situato alla distanza di 90° dal nodo; la sua latitudine sull'ecclittica primitiva sia b; e sull'ecclittica mobile $= b'$; sarà la longitudine di quel punto $= 90 + \omega$, e però $\Lambda = 90° + \omega - \Pi$. La seconda delle equazioni (4) darà la cercata variazione dell'inclinazione

$$= b' - b = -(\pi' - \pi) \cos(\omega - \Pi) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Qui sarà $\omega = 172° \; 40'$; $\Pi = 171° \; 36'$; $\pi' - \pi = t \; 0'',488_{92}$ $= \frac{520}{365,25} \; 0'',488_{92}$; dietro ciò si troverà $b' - b = -0'',7$; e perciò l'inclinazione dell'orbita variata di Pallade sarà $= 34° \; 35' \; 55'',3$; e la longitudine del nodo rapporto all'equinozio medio $= 172 \; 39 \; 56,0$.

588. Ottenuta così la posizione del piano dell'orbita variata di Pallade, per trovare le variazioni subìte dagli altri elementi si calcoleranno per ogni valore di t i valori parziali di $d\varphi$, $d\pi$, dn, $t\,dn$, dg dietro le equazioni del § 585, e si avranno i numeri della seguente tavoletta, intorno alla quale vuolsi avvertire che si sono fatti i calcoli con quattro cifre decimali, e si è poi rigettata l'ultima.

t	$d\varphi$ da ♃	$d\varphi$ da ♄	$d\pi$ da ♃	$d\pi$ da ♄	dn da ♃	dn da ♄	$t\,dn$ da ♃	$t\,dn$ da ♄	dg da ♃	dg da ♄
0	—4",295	+0",440	— 1",539	—0",861	+1",194	—0",185	+ 0",000	—0",000	—4",857	+1",241
1	—5,013	+0,572	+ 0,616	—1,413	+1,801	—0,269	+ 1,801	—0,269	—5,670	+1,537
2	—5,850	+0,616	+ 1,037	—1,624	+2,331	—0,292	+ 4,661	—0,584	—4,450	+1,402
3	—6,497	+0,470	— 0,242	—1,617	+2,676	—0,211	+ 8,027	—0,633	—1,265	+1,060
4	—6,590	+0,125	— 2,282	—1,766	+2,750	—0,032	+11,082	—0,126	+2,871	+1,017
5	—6,181	—0,237	— 3,471	—2,229	+2,529	+0,161	+12,645	+0,806	+6,249	+1,534
6	—5,490	—0,447	— 2,584	—2,692	+2,058	+0,287	+12,350	+1,603	+7,543	+2,264
7	—4,888	—0,475	+ 0,682	—2,735	+1,416	+0,311	+ 9,915	+2,180	+6,353	+2,662
8	—4,705	—0,407	+ 5,691	—2,261	+0,700	+0,259	+ 5,682	+2,074	+3,255	+2,805
9	—5,094	—0,334	+11,533	—1,435	—0,039	+0,171	— 0,347	+1,538	—0,883	+1,933
10	—6,097	—0,304	+17,369	—0,555	—0,785	+0,077	— 7,833	+0,766	—5,502	+1,138

Operando come abbiamo prescritto per ottenere $\int dp$ al § 586 avremo

1.° $\int d\varphi$ per l'azione di Giove . . . . . $= -55'',497$
per l'azione di Saturno . . . . . $= -0,037$
angolo di eccentricità per il principio $= 14° \; 3' \; 59'',10$

angolo di eccentricità φ per il fine . $= 14 \; 3 \; 3,57$.

2.° $\int d\pi$ per l'azione di Giove . . . $+ 18'',661$
per l'azione di Saturno . . . $- 18,637$

variazione totale del perielio $\int d\pi = + \; 0,024 = \delta\pi$.

Questo sarà lo spostamento del nuovo perielio rapporto alla primitiva sua posizione. Per dedurne la sua longitudine rapporto all'ecclittica si osservi che il nodo si avanzò nell'ecclittica di una quantità $\delta\omega = -21'',68$, che projettata nel piano dell'orbita primitiva diverrà $= \delta\omega \cos i$; la linea dei nodi in questo piano si sarà pertanto per l'effetto delle perturbazioni avanzata di $\delta\omega \cos i$, ed il perielio da essa

Digitized by Google

allontanato di $\delta\pi - \delta\omega \cos i$. Essendo pertanto la longitudine del nodo divenuta $= \omega + d\omega$, sarà quella del perielio

$$= \pi + d\omega + \delta\pi - d\omega \cos i = \pi + \delta\pi + 2\,\delta\omega \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i,$$

ed a questa aggiungendo la precessione avremo la nuova longitudine del perielio rapporto all' equinozio medio nel modo seguente

longitudine primitiva del perielio .	$\pi =$	120° 58′ 48″,7
	$\delta\pi =$	+ 0 ,02
	$2\,\delta\omega \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i =$	— 3 ,83
	precessione =	+ 1 11 ,54
	longit. del perielio =	120° 59′ 56″,43

3.° $\int dn$ per l' azione di Giove . . = + 16″,545
per l' azione di Saturno . . = + 0 ,330

$\int dn = + 16\,,875 = \delta n$.

Qui δn non rappresenta già l' incremento del moto diurno alla fine del tempo t, ma bensì l' incremento del moto medio nell' intervallo di 52 giorni, numero preso a bel principio per unità del tempo. Siccome però da un intervallo all' altro variano notabilmente i valori parziali di dn, così dividendo per 52 la quantità precedente non si otterrà con tutta precisione l' incremento del moto diurno alla fine del tempo t; sarà pertanto migliore consiglio ricavare da δn la variazione δa dell' asse maggiore, e dal nuovo asse maggiore dedurre poscia il moto diurno siderale. Troveremo così per l' equazione (8)′ § 585 $\delta a = -0{,}0006970$; ed essendo il primitivo valore di $a = 2{,}7715690$, sarà il nuovo semiasse $= 2{,}7708720$, a cui corrisponde il moto medio siderale 769″,2752.

4.° $\int t\,dn$ per l' azione di Giove . . . = + 62″,689
$t \int dn = 10 \int dn$ . . + 165 ,446

quindi sarà $t \int dn - \int t\,dn = \int dt \int dn =$ + 102 ,757

$\int t\,dn$ per l' azione di Saturno . . . = + 7″,025
$t \int dn = 10 \int dn$ . . + 3 ,305

$\int dt \int dn$ . . = — 3 ,720

perciò il valore totale di $\int dt \int dn$. = + 99 ,037

5.° Si troverà per ultimo $\int dg$ per l' azione di Giove = + 8″,975
per l' azione di Saturno = + 17 ,503

$\int dg =$ 26 ,478

Si formerà poi dietro l'equazione (12) § 582 l'anomalia media alla fine del tempo t nel modo seguente

anomalia media nel principio del tempo t . .	$= 321^\circ\ 17'\ 40''$
$N\,t = 768'',9854.520$.	$= 111\ \ 4\ 32,4$
$\int dt \int dn + \int dg$ . .	$= +\ \ 2\ \ 5,5$
anomalia media il 24 Aprile 1830, 0^h in Gottinga	$= 72\ 24\ 17,9$

Aggiungendogli la trovata longitudine del perielio si avrà la longitudine media corrispondente. Dietro ciò risulteranno i seguenti elementi di Pallade per il calcolo delle posizioni geocentriche intorno all'opposizione del 1830, almeno supponendo trascurabile l'azione di Marte, la quale a fronte della sua piccolissima massa può per la sua vicinanza rendersi sensibile in alcune circostanze.

24 Aprile 1830; 0^h tempo medio in Gottinga

longitudine media di Pallade	$= 193^\circ\ 24'\ 14'',3$
longitudine del perielio	$= 120\ 59\ 56,4$
longitudine del nodo ascendente. . .	$= 172\ 39\ 56,0$
inclinazione all'eclittica	$= 34\ 35\ 55,3$

eccentricità $= \text{sen}\,\varphi = \text{sen}\ 14^\circ\ 3'\ 3'',57$; $\log e = 9,3852224$;
moto diurno siderale $= 769'',2752$
$a = 2,7708720$; $\log a = 0,4426165$.

589. *Scolio*. I metodi precedenti con piccolissime modificazioni si applicano eziandio al calcolo delle perturbazioni delle comete; in queste circostanze torna talvolta più comodo sostituire a dt il suo valore dato per l'anomalia media, come hanno praticato i signori Clairaut, Damoiseaux ed altri che si sono occupati di questi importanti argomenti. Se fra il pianeta perturbatore ed il corpo perturbato siavi un grande avvicinamento, in allora variano con molta rapidità i valori dei coefficienti differenziali, ed è necessario diminuire gl'intervalli dei tempi per giungere a risultamenti esatti; ma in compenso si può di molto alleggerire con l'ajuto di particolari teoremi la fatica del calcolo nelle parti superiori dell'orbita, dove per la grande distanza l'effetto delle forze perturbatrici è piccolissimo. La discussione però di questi casi speciali ci guiderebbe troppo in lungo, e per essi ci vediamo obbligati di rimandare alla Meccanica celeste del signor La-Place, e ad un'opera interessantissima del signor di Ponté-Coulant intitolata: *Theorie analytique du systeme du mond*. Paris 1829. vol. II. in 8.°), nella quale sono con somma eleganza dimostrati i punti principali della teoria del moto dei corpi celesti, la di cui lettura vuol essere caldamente raccomandata.

TAV. I. *MOTO delle COMETE nella Parabola* (§ 329)

Giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
0. 0	0° 0′ 0″0	501.8	0.700	6° 58′ 7″1	57″5	0.750	7° 48′ 50″2	64″5
0. 1	0 8 21.8	501.8	701	6 59 4.6	57.7	751	49 54.7	64.6
0. 2	0 16 43.6	501.8	702	7 0 2.3	57.8	752	50 59.3	64.7
0. 3	0 25 5.4	501.8	703	7 1 0.1	57.9	753	52 4.0	64.9
0. 4	0 33 27.2	501.7	704	1 58.0	58.1	754	53 8.9	65.0
0. 5	0 41 48.9	501.8	705	2 56.1	58.2	755	54 13.9	65.2
0. 6	0 50 10.7	501.7	0.706	7 3 54.3	58.4	0.756	7 55 19.1	65.3
0. 7	0 58 32.4	501.7	707	4 52.7	58.4	757	56 24.4	65.5
0. 8	1 6 54.1	501.7	708	5 51.1	58.6	758	57 29.9	65.6
0. 9	1 15 15.8	501.6	709	6 49.7	58.8	759	58 35.5	65.8
1. 0	1 23 37.4	501.6	710	7 48.5	58.8	760	7 59 41.3	65.9
1. 1	1 31 59.0	501.6	0.711	7 8 47.3	59.0	0.761	8 0 47.2	66.1
1. 2	1 40 20.6	501.6	712	9 46.3	59.2	762	1 53.3	66.2
1. 3	1 48 42.2	501.5	713	10 45.5	59.3	763	2 59.5	66.4
1. 4	1 57 3.7	501.5	714	11 44.8	59.4	764	4 5.9	66.5
1. 5	2 5 25.2	501.4	715	12 44.2	59.5	765	5 12.4	66.7
1. 6	2 13 46.6	501.4	0.716	7 13 43.7	59.7	0.766	8 6 19.1	66.8
1. 7	2 22 8.0	501.4	717	14 43.4	59.8	767	7 25.9	66.9
1. 8	2 30 29.4	501.3	718	15 43.2	60.0	768	8 32.8	67.1
1. 9	2 38 50.7	501.2	719	16 43.2	60.0	769	9 39.9	67.3
2. 0	2 47 11.9	501.2	720	17 43.2	60.2	770	10 47.2	67.4
2. 1	2 55 33.1	501.1	0.721	7 18 43.4	60.3	0.771	8 11 54.6	67.6
2. 2	3 3 54.2	501.0	722	19 43.7	60.5	772	13 2.2	67.8
2. 3	3 12 15.2	501.0	723	20 44.2	60.6	773	14 10.0	67.8
2. 4	3 20 36.2	500.9	724	21 44.8	60.8	774	15 17.8	68.1
2. 5	3 28 57.1	500.8	725	22 45.6	60.9	775	16 25.9	68.1
2. 6	3 37 17.9	500.7	0.726	7 23 46.5	61.0	0.776	8 17 34.0	68.4
2. 7	3 45 38.6	500.7	727	24 47.5	61.2	777	18 42.4	68.5
2. 8	3 53 59.3	500.6	728	25 48.7	61.3	778	19 50.9	68.6
2. 9	4 2 19.9	500.5	729	26 50.0	61.5	779	20 59.5	68.8
3. 0	4 10 40.4	500.4	730	27 51.5	61.6	780	22 8.3	69.0
3. 1	4 19 0.8	500.3	0.731	7 28 53.1	61.7	0.781	8 23 17.3	69.1
3. 2	4 27 21.1	500.2	732	29 54.8	61.9	782	24 26.4	69.3
3. 3	4 35 41.3	500.1	733	30 56.7	62.0	783	25 35.7	69.4
3. 4	4 44 1.4	500.1	734	31 58.7	62.2	784	26 45.1	69.6
3. 5	4 52 21.5	499.9	735	33 0.9	62.3	785	27 54.7	69.7
3. 6	5 0 41.4	499.8	0.736	7 34 3.2	62.4	0.786	8 29 4.4	69.9
3. 7	5 9 1.2	499.7	737	35 5.6	62.6	787	30 14.3	70.1
3. 8	5 17 20.9	499.7	738	36 8.2	62.7	788	31 24.4	70.2
3. 9	5 25 40.6	499.5	739	37 10.9	62.9	789	32 34.6	70.3
4. 0	5 34 0.1	499.4	740	38 13.8	63.0	790	33 44.9	70.6
4. 1	5 42 19.5	499.2	0.741	7 39 16.8	63.1	0.791	8 34 55.5	70.7
4. 2	5 50 38.7	499.1	742	40 19.9	63.3	792	36 6.2	70.8
4. 3	5 58 57.8	499.0	743	41 23.2	63.4	793	37 17.0	71.0
4. 4	6 7 16.8	498.9	744	42 26.6	63.6	794	38 28.0	71.2
4. 5	6 15 35.7	498.7	745	43 30.2	63.7	795	39 39.2	71.3
4. 6	6 23 54.4	498.6	0.746	7 44 33.9	63.9	0.796	8 40 50.5	71.5
4. 7	6 32 13.0	498.5	747	45 37.8	64.0	797	42 2.0	71.6
4. 8	6 40 31.5	498.3	748	46 41.8	64.1	798	43 13.6	71.9
4. 9	6 48 49.8	498.2	749	47 45.9	64.3	799	44 25.5	71.9
5. 0	6 57 8.0		0.750	7 48 50.2		0.800	8 45 37.4	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
0.800	8° 45′ 37″4	72″2	0.850	9° 49′ 10″1	80″7	0.900	11° 0′ 13″5	90″2
801	46 49.6	72.3	851	50 30.8	80.9	901	1 43.7	90.4
802	48 1.9	72.4	852	51 51.7	81.0	902	3 14.1	90.6
803	49 14.3	72.6	853	53 12.7	81.3	903	4 44.7	90.8
804	50 26.9	72.8	854	54 34.0	81.4	904	6 15.5	91.0
805	51 39.7	73.0	855	55 55.4	81.6	905	7 46.5	91.2
0.806	8 52 52.7	73.1	0.856	9 57 17.0	81.7	0.906	11 9 17.7	91.4
807	54 5.8	73.3	857	9 58 38.7	82.0	907	10 49.1	91.6
808	55 19.1	73.4	858	10 0 0.7	82.2	908	12 20.7	91.8
809	56 32.5	73.6	859	1 22.9	82.3	909	13 52.5	92.1
810	57 46.1	73.8	860	2 45.2	82.5	910	15 24.6	92.2
0.811	8 58 59.9	73.9	0.861	10 4 7.7	82.7	0.911	11 16 56.8	92.4
812	9 0 13.8	74.1	862	5 30.4	82.9	912	18 29.2	92.7
813	1 27.9	74.3	863	6 53.3	83.1	913	20 1.9	92.8
814	2 42.2	74.5	864	8 16.4	83.2	914	21 34.7	93.0
815	3 56.7	74.6	865	9 39.6	83.5	915	23 7.7	93.3
0.816	9 5 11.3	74.7	0.866	10 11 3.1	83.6	0.916	11 24 41.0	93.4
817	6 26.0	75.0	867	12 26.7	83.8	917	26 14.4	93.7
818	7 41.0	75.1	868	13 50.5	84.0	918	27 48.1	93.9
819	8 56.1	75.3	869	15 14.5	84.2	919	29 22.0	94.0
820	10 11.4	75.4	870	16 38.7	84.4	920	30 56.0	94.3
0.821	9 11 26.8	75.6	0.871	10 18 3.1	84.5	0.921	11 32 30.3	94.5
822	12 42.4	75.8	872	19 27.6	84.8	922	34 4.8	94.7
823	13 58.2	76.0	873	20 52.4	84.9	923	35 39.5	94.9
824	15 14.2	76.1	874	22 17.3	85.2	924	37 14.4	95.1
825	16 30.3	76.3	875	23 42.5	85.3	925	38 49.5	95.3
0.826	9 17 46.6	76.5	0.876	10 25 7.8	85.5	0.926	11 40 24.8	95.6
827	19 3.1	76.6	877	26 33.3	85.7	927	42 0.4	95.7
828	20 19.7	76.9	878	27 59.0	85.9	928	43 36.1	96.0
829	21 36.6	76.9	879	29 24.9	86.1	929	45 12.1	96.2
830	22 53.5	77.2	880	30 51.0	86.3	930	46 48.3	96.3
0.831	9 24 10.7	77.3	0.881	10 32 17.3	86.4	0.931	11 48 24.6	96.6
832	25 28.0	77.5	882	33 43.7	86.7	932	50 1.2	96.9
833	26 45.5	77.7	883	35 10.4	86.8	933	51 38.1	97.0
834	28 3.2	77.9	884	36 37.2	87.1	934	53 15.1	97.2
835	29 21.1	78.0	885	38 4.3	87.2	935	54 52.3	97.5
0.836	9 30 39.1	78.2	0.886	10 39 31.5	87.5	0.936	11 56 29.8	97.7
837	31 57.3	78.4	887	40 59.0	87.6	937	58 7.5	97.8
838	33 15.7	78.6	888	42 26.6	87.8	938	11 59 45.3	98.2
839	34 34.3	78.7	889	43 54.4	88.0	939	12 1 23.5	98.3
840	35 53.0	78.9	890	45 22.4	88.3	940	3 1.8	98.5
0.841	9 37 11.9	79.1	0.891	10 46 50.7	88.4	0.941	12 4 40.3	98.7
842	38 31.0	79.3	892	48 19.1	88.6	942	6 19.0	99.0
843	39 50.3	79.4	893	49 47.7	88.8	943	7 58.0	99.2
844	41 9.7	79.6	894	51 16.5	89.0	944	9 37.2	99.4
845	42 29.3	79.8	895	52 45.5	89.2	945	11 16.6	99.7
0.846	9 43 49.1	80.0	0.896	10 54 14.7	89.4	0.946	12 12 56.3	99.8
847	45 9.1	80.2	897	55 44.1	89.6	947	14 36.1	100.1
848	46 29.3	80.3	898	57 13.7	89.8	948	16 16.2	100.2
849	47 49.6	80.5	899	10 58 43.5	90.0	949	17 56.4	100.6
0.850	9 49 10.1		0.900	11 0 13.5		0.950	12 19 37.0	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
0.950	12° 19′ 37″.0	100″.7	1.000	13° 48′ 13″.1	112″.3	1.050	15° 26′ 59″.1	125″.1
951	21 17.7	100.9	001	50 5.7	112.6	051	29 4.2	125.4
952	22 58.6	101.2	002	51 58.3	112.9	052	31 9.6	125.7
953	24 39.8	101.4	003	53 51.2	113.1	053	33 15.3	125.9
954	26 21.2	101.6	004	55 44.3	113.3	054	35 21.2	126.2
955	28 2.8		005	57 37.6		055	37 27.4	
0.956	12 29 44.7	101.9	1.006	13 59 31.2	113.6	1.056	15 39 33.9	126.5
957	31 26.7	102.0	007	14 1 25.0	113.8	057	41 40.7	126.8
958	33 9.0	102.3	008	3 19.1	114.1	058	43 47.7	127.0
959	34 51.5	102.5	009	5 13.4	114.3	059	45 55.0	127.3
960	36 34.3	102.8	010	7 7.9	114.5	060	48 2.6	127.6
0.961	12 38 17.2	102.9	1.011	14 9 2.7	114.8	1.061	15 50 10.4	127.8
962	40 0.4	103.2	012	10 57.8	115.1	062	52 18.5	128.1
963	41 43.8	103.4	013	12 53.1	115.3	063	54 26.9	128.4
964	43 27.5	103.7	014	14 48.6	115.5	064	56 35.5	128.6
965	45 11.3	103.8	015	16 44.4	115.8	065	15 58 44.4	128.9
0.966	12 46 55.4	104.1	1.016	14 18 40.5	116.1	1.066	16 0 53.6	129.2
967	48 39.8	104.4	017	20 36.8	116.3	067	3 3.0	129.4
968	50 24.3	104.5	018	22 33.4	116.6	068	5 12.8	129.8
969	52 9.1	104.8	019	24 30.2	116.8	069	7 22.8	130.0
970	53 54.1	105.0	020	26 27.3	117.1	070	9 33.1	130.3
0.971	12 55 39.3	105.2	1.021	14 28 24.6	117.3	1.071	16 11 43.7	130.6
972	57 24.8	105.5	022	30 22.2	117.6	072	13 54.6	130.9
973	12 59 10.5	105.7	023	32 20.0	117.8	073	16 5.7	131.1
974	13 0 56.4	105.9	024	34 18.1	118.1	074	18 17.1	131.4
975	2 42.6	106.2	025	36 16.5	118.4	075	20 28.8	131.7
0.976	13 4 29.0	106.4	1.026	14 38 15.1	118.6	1.076	16 22 40.8	132.0
977	6 15.6	106.6	027	40 13.9	118.8	077	24 53.1	132.3
978	8 2.5	106.9	028	42 13.0	119.1	078	27 5.6	132.5
979	9 49.6	107.1	029	44 12.4	119.4	079	29 18.5	132.9
980	11 36.9	107.3	030	46 12.0	119.6	080	31 31.6	133.1
0.981	13 13 24.5	107.6	1.031	14 48 11.9	119.9	1.081	16 33 44.9	133.3
982	15 12.3	107.8	032	50 12.0	120.1	082	35 58.6	133.7
983	17 0.3	108.0	033	52 12.4	120.4	083	38 12.5	133.9
984	18 48.6	108.3	034	54 13.1	120.7	084	40 26.7	134.2
985	20 37.1	108.5	035	56 14.0	120.9	085	42 41.2	134.5
0.986	13 22 25.9	108.8	1.036	14 58 15.2	121.2	1.086	16 44 55.9	134.7
987	24 14.8	108.9	037	15 0 16.7	121.5	087	47 11.1	135.2
988	26 4.1	109.3	038	2 18.4	121.7	088	49 26.5	135.4
989	27 53.5	109.4	039	4 20.4	122.0	089	51 42.1	135.6
990	29 43.2	109.7	040	6 22.6	122.2	090	53 58.0	135.9
0.991	13 31 33.2	110.0	1.041	15 8 25.1	122.5	1.091	16 56 14.3	136.3
992	33 23.3	110.1	042	10 27.8	122.7	092	16 58 30.8	136.5
993	35 13.7	110.4	043	12 30.7	122.9	093	17 0 47.6	136.8
994	37 4.4	110.7	044	14 34.0	123.3	094	3 4.6	137.0
995	38 55.3	110.9	045	16 37.5	123.5	095	5 22.0	137.4
0.996	13 40 46.4	111.1	1.046	15 18 41.3	123.8	1.096	17 7 39.7	137.7
997	42 37.8	111.4	047	20 45.4	124.1	097	9 57.7	138.0
998	44 29.4	111.6	048	22 49.7	124.3	098	12 15.9	138.2
0.999	46 21.3	111.9	049	24 54.3	124.6	099	14 34.4	138.5
1.000	13 48 13.4	112.1	1.050	15 26 59.1	124.8	1.100	17 16 53.2	138.8

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.100	17° 16′ 53″.2	139″.1	1.150	19° 18′ 55″.9	154″.3	1.200	21° 34′ 8″.0	170″.7
101	19 12.5	139.4	151	21 30.2	154.6	201	36 58.7	171.0
102	21 51.7	139.7	152	24 4.8	155.0	202	39 49.7	171.4
103	23 51.4	140.0	153	26 39.8	155.2	203	42 41.1	171.7
104	26 11.4	140.3	154	29 15.0	155.6	204	45 32.8	172.0
105	28 51.7	140.6	155	31 50.6	155.9	205	48 24.8	172.4
1.106	17 30 52.3	140.8	1.156	19 34 26.5	156.2	1.206	21 51 17.2	172.8
107	33 13.1	141.2	157	37 2.7	156.5	207	54 10.0	173.1
108	35 34.3	141.5	158	39 39.2	156.8	208	57 5.1	173.5
109	37 55.8	141.8	159	42 16.0	157.2	209	21 59 56.6	173.8
110	40 17.6	142.0	160	44 53.2	157.6	210	22 2 50.4	174.1
1.111	17 42 39.6	142.3	1.161	19 47 30.8	157.9	1.211	22 5 44.5	174.5
112	45 1.9	142.7	162	50 8.7	158.2	212	8 39.0	174.8
113	47 24.6	142.9	163	52 46.9	158.4	213	11 33.8	175.2
114	49 47.5	143.3	164	55 25.3	158.8	214	14 29.0	175.5
115	52 10.8	143.5	165	19 58 4.1	159.1	215	17 24.5	175.8
1.116	17 54 34.3	143.8	1.166	20 0 43.2	159.4	1.216	22 20 20.3	176.2
117	56 58.1	144.2	167	3 22.6	159.7	217	23 16.5	176.5
118	17 59 22.3	144.4	168	6 2.3	160.1	218	26 13.0	176.9
119	18 1 46.7	144.8	169	8 42.4	160.4	219	29 9.9	177.2
120	4 11.5	145.0	170	11 22.8	160.7	220	32 7.1	177.6
1.121	18 6 36.5	145.4	1.171	20 14 3.5	161.0	1.221	22 35 4.7	177.9
122	9 1.9	145.6	172	16 44.5	161.4	222	38 2.6	178.3
123	11 27.5	146.0	173	19 25.9	161.7	223	41 0.9	178.6
124	13 53.5	146.2	174	22 7.6	162.0	224	43 59.5	179.0
125	16 19.7	146.6	175	24 49.6	162.4	225	46 58.5	179.3
1.126	18 18 46.3	146.8	1.176	20 27 32.0	162.7	1.226	22 49 57.8	179.6
127	21 13.1	147.2	177	30 14.7	163.0	227	52 57.4	180.0
128	23 40.3	147.5	178	32 57.7	163.3	228	55 57.4	180.4
129	26 7.8	147.7	179	35 41.0	163.7	229	22 58 57.8	180.7
130	28 35.5	148.1	180	38 24.7	164.0	230	23 1 58.5	181.1
1.131	18 31 3.6	148.4	1.181	20 41 8.7	164.3	1.231	23 4 59.6	181.4
132	33 32.0	148.7	182	43 53.0	164.6	232	8 1.0	181.7
133	36 0.7	149.0	183	46 37.6	165.0	233	11 2.7	182.1
134	38 29.7	149.3	184	49 22.6	165.3	234	14 4.8	182.5
135	40 59.0	149.6	185	52 7.9	165.7	235	17 7.3	182.8
1.136	18 43 28.6	149.9	1.186	20 54 53.6	166.0	1.236	23 20 10.1	183.2
137	45 58.5	150.3	187	20 57 39.6	166.3	237	23 13.3	183.5
138	48 28.8	150.5	188	21 0 25.9	166.7	238	26 16.8	183.9
139	50 59.3	150.9	189	3 12.6	167.0	239	29 20.7	184.2
140	53 30.2	151.2	190	5 59.6	167.3	240	32 24.9	184.6
1.141	18 56 1.4	151.4	1.191	21 8 46.9	167.7	1.241	23 35 29.5	185.0
142	18 58 32.8	151.8	192	11 34.6	168.0	242	38 34.5	185.3
143	19 1 4.6	152.1	193	14 22.6	168.3	243	41 39.8	185.6
144	3 36.7	152.4	194	17 10.9	168.7	244	44 45.4	186.0
145	6 9.1	152.7	195	19 59.6	169.0	245	47 51.4	186.4
1.146	19 8 41.8	153.0	1.196	21 22 48.6	169.3	1.246	23 50 57.8	186.7
147	11 14.8	153.4	197	25 37.9	169.7	247	54 4.5	187.1
148	13 48.2	153.7	198	28 27.6	170.0	248	23 57 11.6	187.4
149	16 21.9	154.0	199	31 17.6	170.4	249	24 0 19.0	187.8
1.150	19 18 55.9		1.200	21 34 8.0		1.250	24 3 26.8	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.250	24° 37′ 26″8	188″2	1.300	26° 47′ 44″5	206″6	1.350	29° 47′ 43″3	225″8
251	6 35.0	188.5	301	51 11.1	207.0	351	51 29.1	226.2
252	9 43.5	188.9	302	54 38.1	207.4	352	55 15.3	226.5
253	12 52.4	189.2	303	26 58 5.5	207.8	353	29 59 1.8	227.0
254	16 1.6	189.6	304	27 1 33.3	208.1	354	30 2 48.8	227.3
255	19 11.2		305	5 1.4		355	6 36.1	
1.256	24 22 21.2	190.0	1.306	27 8 29.9	208.5	1.356	30 1 23.9	227.8
257	25 31.5	190.3	307	11 58.8	208.9	357	14 12.0	228.1
258	28 42.2	190.7	308	15 28.1	209.3	358	18 0.5	228.5
259	31 53.3	191.1	309	18 57.8	209.7	359	21 49.4	228.9
260	35 4.7	191.4	310	22 27.8	210.0	360	25 38.7	229.3
1.261	24 38 16.5	191.8	1.311	27 25 58.2	210.4	1.361	30 29 28.4	229.7
262	41 28.6	192.1	312	29 29.0	210.8	362	33 18.5	230.1
263	44 41.1	192.5	313	33 0.2	211.2	363	37 8.9	230.4
264	47 54.0	192.9	314	36 31.9	211.7	364	40 59.8	230.9
265	51 7.3	193.3	315	40 3.8	211.9	365	43 51.0	231.2
1.266	24 54 20.9	193.6	1.316	27 43 36.1	212.3	1.366	30 48 42.7	231.7
267	24 57 34.9	194.0	317	47 8.8	212.7	367	52 34.7	232.0
268	25 0 49.2	194.3	318	50 41.9	213.1	368	30 56 27.1	232.4
269	4 3.9	194.7	319	54 15.4	213.5	369	31 0 19.9	232.8
270	7 19.0	195.1	320	27 57 49.3	213.9	370	4 13.1	233.2
1.271	25 10 34.4	195.4	1.321	28 1 23.5	214.2	1.371	31 8 6.7	233.6
272	13 50.2	195.8	322	4 58.1	214.6	372	12 0.7	234.0
273	17 6.4	196.2	323	8 33.1	215.0	373	15 55.1	234.4
274	20 23.0	196.6	324	12 8.5	215.4	374	19 49.8	234.7
275	23 39.9	196.9	325	15 44.2	215.7	375	23 45.0	235.2
1.276	25 26 57.2	197.3	1.326	28 19 20.3	216.1	1.376	31 27 40.5	235.5
277	30 14.9	197.7	327	22 56.9	216.6	377	31 36.5	236.0
278	33 32.9	198.0	328	26 33.8	216.9	378	35 32.8	236.3
279	36 51.3	198.4	329	30 11.1	217.3	379	39 29.5	236.7
280	40 10.1	198.8	330	33 48.7	217.6	380	43 26.6	237.1
1.281	25 43 29.3	199.2	1.331	28 37 26.8	218.1	1.381	31 47 24.1	237.5
282	46 48.8	199.5	332	41 5.3	218.5	382	51 22.0	237.9
283	50 8.7	199.9	333	44 44.1	218.8	383	55 20.3	238.3
284	53 29.0	200.3	334	48 23.3	219.2	384	31 59 19.0	238.7
285	25 56 49.6	200.6	335	52 2.9	219.6	385	32 3 18.0	239.0
1.286	26 0 10.6	201.0	1.336	28 55 42.9	220.0	1.386	32 7 17.5	239.5
287	3 32.0	201.4	337	28 59 23.3	220.4	387	11 17.3	239.8
288	6 53.8	201.8	338	29 3 4.0	220.7	388	15 17.5	240.2
289	10 15.9	202.1	339	6 45.2	221.2	389	19 18.2	240.7
290	13 38.5	202.6	340	10 26.7	221.5	390	23 19.2	241.0
1.291	26 17 1.4	202.9	1.341	29 14 8.6	221.9	1.391	32 27 20.6	241.4
292	20 24.7	203.3	342	17 50.9	222.3	392	31 22.4	241.8
293	23 48.4	203.7	343	21 33.6	222.7	393	35 24.6	242.2
294	27 12.4	204.0	344	25 16.7	223.1	394	39 27.2	242.6
295	30 36.8	204.4	345	29 0.2	223.5	395	43 30.1	242.9
1.296	26 34 1.6	204.8	1.346	29 32 44.0	223.8	1.396	32 47 33.5	243.4
297	37 26.7	205.1	347	36 28.3	224.3	397	51 37.3	243.8
298	40 52.3	205.6	348	40 12.9	224.6	398	55 41.4	244.1
299	44 18.2	205.9	349	43 57.9	225.0	399	32 59 46.0	244.6
1.300	26 47 44.5	206.3	1.350	29 47 43.3	225.4	1.400	33 3 50.9	244.9

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.400	33° 3′ 50″.9	245″.3	1.450	36° 36′ 15″.0	264″.8	1.500	40° 24′ 38″.6	283″.6
401	7 56.2	245.8	451	40 39.8	265.1	501	29 22.2	284.0
402	12 2.0	246.1	452	45 4.9	265.6	502	34 6.2	284.3
403	16 8.1	246.5	453	49 30.5	265.9	503	38 50.5	284.7
404	20 14.6	246.9	454	53 56.4	266.3	504	43 35.2	285.0
405	24 21.5		455	36 58 22.7		505	48 20.2	
1.406	33 28 28.7	247.2	1.456	37 2 49.4	266.7	1.506	40 53 5.6	285.4
407	32 36.4	247.7	457	7 16.5	267.1	507	40 57 51.4	285.8
408	36 44.5	248.1	458	11 43.9	267.4	508	41 2 37.6	286.2
409	40 51.9	248.4	459	16 11.8	267.9	509	7 24.1	286.5
410	45 1.8	248.9	460	20 40.0	268.2	510	12 10.9	286.8
1.411	33 49 11.0	249.2	1.461	37 25 8.6	268.6	1.511	41 16 58.2	287.2
412	53 20.7	249.7	462	29 37.6	269.0	512	21 45.7	287.6
413	33 57 30.7	250.0	463	34 7.0	269.4	513	26 33.6	287.9
414	34 1 41.1	250.4	464	38 36.7	269.7	514	31 21.9	288.3
415	5 51.9	250.8	465	43 6.9	270.2	515	36 10.6	288.7
1.416	34 10 3.1	251.2	1.466	37 47 37.4	270.5	1.516	41 40 59.6	289.0
417	14 14.7	251.6	467	52 8.3	270.9	517	45 49.0	289.4
418	18 26.6	251.9	468	37 56 39.6	271.3	518	50 38.7	289.7
419	22 39.0	252.4	469	38 1 11.3	271.7	519	41 55 28.8	290.1
420	26 51.8	252.8	470	5 43.3	272.0	520	42 0 19.2	290.4
1.421	34 31 4.9	253.1	1.471	38 10 15.7	272.4	1.521	42 5 10.0	290.8
422	35 18.3	253.6	472	14 48.5	272.8	522	10 1.1	291.2
423	39 32.4	253.9	473	19 21.7	273.2	523	14 52.6	291.5
424	43 46.7	254.3	474	23 55.3	273.6	524	19 44.4	291.8
425	48 1.4	254.7	475	28 29.2	273.9	525	24 36.6	292.2
1.426	34 52 16.5	255.1	1.476	38 33 3.5	274.3	1.526	42 29 29.2	292.6
427	34 56 32.0	255.5	477	37 38.2	274.7	527	34 22.1	292.9
428	35 0 47.8	255.8	478	42 13.2	275.0	528	39 15.3	293.2
429	5 4.1	256.3	479	46 48.7	275.5	529	44 8.9	293.6
430	9 20.7	256.6	480	51 24.5	275.8	530	49 2.9	294.0
1.431	35 13 37.7	257.0	1.481	38 56 0.6	276.1	1.531	42 55 57.2	294.3
432	17 55.2	257.3	482	39 0 37.2	276.6	532	42 58 51.9	294.7
433	22 13.0	257.8	483	5 14.1	276.9	533	43 3 46.9	295.0
434	26 31.2	258.2	484	9 51.4	277.3	534	8 42.3	295.4
435	30 49.7	258.5	485	14 29.1	277.7	535	13 38.0	295.7
1.436	35 35 8.7	259.0	1.486	39 19 7.1	278.0	1.536	43 18 34.0	296.0
437	39 28.1	259.4	487	23 45.5	278.4	537	23 30.4	296.4
438	43 47.8	259.7	488	28 24.3	278.8	538	28 27.1	296.7
439	48 8.0	260.2	489	33 3.5	279.2	539	33 24.2	297.1
440	52 28.5	260.5	490	37 43.0	279.5	540	38 21.7	297.5
1.441	35 56 49.4	260.9	1.491	39 42 22.9	279.9	1.541	43 43 19.5	297.8
442	36 1 10.7	261.3	492	47 3.2	280.3	542	48 17.3	298.0
443	5 32.4	261.7	493	51 43.8	280.6	543	53 15.8	298.3
444	9 54.4	262.0	494	39 56 24.8	281.0	544	43 58 14.5	298.7
445	14 16.9	262.5	495	40 1 6.2	281.4	545	44 3 13.6	299.1
1.446	36 18 39.8	262.9	1.496	40 5 48.0	281.8	1.546	44 8 13.0	299.4
447	23 3.0	263.2	497	10 30.1	282.1	547	13 12.7	299.7
448	27 26.6	263.6	498	15 12.6	282.5	548	18 12.8	300.1
449	31 50.6	264.0	499	19 55.4	282.8	549	23 13.2	300.4
1.450	36 36 15.0	264.4	1.500	40 24 38.6	283.2	1.550	44 28 14.1	300.9

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.550	44° 28′ 14″.1	301″.1
551	33 15.2	301.4
552	38 16.6	301.8
553	43 18.4	302.1
554	48 20.5	302.4
555	53 22.9	302.8
1.556	44 58 25.7	303.1
557	45 3 28.8	303.4
558	8 32.2	303.8
559	13 36.0	304.2
560	18 40.2	304.4
1.561	45 23 44.6	304.8
562	28 49.4	305.1
563	33 54.5	305.4
564	38 59.9	305.7
565	44 5.6	306.1
1.566	45 49 11.7	306.3
567	54 18.0	306.7
568	45 59 24.7	307.0
569	46 4 31.7	307.3
570	9 39.0	307.6
1.571	46 14 46.6	308.0
572	19 54.6	308.3
573	25 2.9	308.6
574	30 11.5	308.8
575	35 20.3	309.2
1.576	46 40 29.3	309.3
577	45 39.0	309.8
578	50 48.8	310.2
579	46 55 59.0	310.4
580	47 1 9.4	310.7
1.581	47 6 20.1	311.1
582	11 31.2	311.4
583	16 42.6	311.7
584	21 54.3	312.0
585	27 6.3	312.3
1.586	47 32 18.6	312.6
587	37 31.2	312.9
588	42 44.1	313.1
589	47 57.2	313.5
590	53 10.7	313.8
1.591	47 58 24.5	314.1
592	48 3 38.6	314.3
593	8 52.9	314.7
594	14 7.6	315.0
595	19 22.6	315.3
1.596	48 24 37.9	315.5
597	29 53.4	315.9
598	35 9.3	316.1
599	40 25.4	316.5
1.600	48 45 41.9	

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.600	48° 45′ 41″.9	316″.7
601	50 58.6	317.0
602	48 56 15.6	317.3
603	49 1 32.9	317.3
604	6 50.4	317.9
605	12 8.3	318.2
1.606	49 17 26.5	318.4
607	22 44.9	318.7
608	28 3.6	319.0
609	33 22.6	319.2
610	38 41.8	319.6
1.611	49 44 1.4	319.8
612	49 21.2	320.1
613	49 54 41.3	320.4
614	50 0 1.7	320.6
615	5 22.3	320.9
1.616	50 10 43.2	321.2
617	16 4.4	321.5
618	21 25.9	321.7
619	26 47.6	322.0
620	32 9.6	322.2
1.621	50 37 31.8	322.5
622	42 54.3	322.8
623	48 17.1	323.1
624	53 40.2	323.3
625	50 59 3.5	323.6
1.626	51 4 27.1	323.8
627	9 50.9	324.1
628	15 15.0	324.4
629	20 39.4	324.6
630	26 4.0	324.9
1.631	51 31 28.9	325.1
632	36 54.0	325.4
633	42 19.4	325.6
634	47 45.0	325.9
635	53 10.9	326.1
1.636	51 58 37.0	326.4
637	52 4 3.4	326.6
638	9 30.0	326.9
639	14 56.9	327.1
640	20 24.0	327.5
1.641	52 25 51.3	327.6
642	31 18.9	327.8
643	36 46.7	328.1
644	42 14.8	328.3
645	47 43.1	328.5
1.646	52 53 11.6	328.8
647	52 58 40.4	329.0
648	53 4 9.4	329.3
649	9 38.7	329.5
1.650	53 15 8.2	

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.650	53° 15′ 8″.2	329″.7
651	20 37.9	330.0
652	26 7.9	330.2
653	31 38.1	330.4
654	37 8.5	330.6
655	42 39.1	330.8
1.656	53 48 9.9	331.1
657	53 41.0	331.3
658	53 59 12.3	331.6
659	54 4 43.9	331.7
660	10 15.6	331.9
1.661	54 15 47.5	332.2
662	21 19.7	332.4
663	26 52.1	332.6
664	32 24.7	332.8
665	37 57.5	333.0
1.666	54 43 30.5	333.2
667	49 3.7	333.4
668	54 54 37.1	333.7
669	55 0 10.8	333.9
670	5 44.7	334.1
1.671	55 11 18.8	334.2
672	16 53.0	334.5
673	22 27.3	334.7
674	28 2.2	334.9
675	33 37.1	335.1
1.676	55 39 12.2	335.2
677	44 47.4	335.5
678	50 22.9	335.7
679	55 55 58.6	335.8
680	56 1 34.4	336.0
1.681	56 7 10.4	336.3
682	12 46.7	336.4
683	18 23.1	336.6
684	23 59.7	336.8
685	29 36.5	337.0
1.686	56 35 13.5	337.1
687	40 50.6	337.3
688	46 27.9	337.5
689	52 5.4	337.8
690	56 57 43.2	337.9
1.691	57 3 21.1	338.0
692	8 59.1	338.2
693	14 37.3	338.4
694	20 15.7	338.6
695	25 54.3	338.7
1.696	57 31 33.0	338.9
697	37 11.9	339.0
698	42 50.9	339.2
699	48 30.1	339.4
1.700	57 54 9.5	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.700	57°54′ 9″5	339″7	1.750	62°39′ 58″6	345″9	1.800	67°29′ 32″9	348″5
701	57 59 49.2	339.8	751	43 44.5	346.0	801	35 21.4	348.5
702	58 5 29.0	339.9	752	51 30.5	346.1	802	41 9.9	348.5
703	11 8.9	340.1	753	62 57 16.6	346.2	803	46 58.4	348.6
704	16 49.0	340.2	754	63 5 2.8	346.2	804	52 47.0	348.6
705	22 29.2	340.4	755	8 49.0	346.3	805	67 58 35.6	348.5
1.706	58 28 9.6	340.5	1.756	63 14 35.3	346.4	1.806	68 4 24.1	348.6
707	33 50.1	340.7	757	20 21.7	346.5	807	10 12.7	348.6
708	39 30.8	340.8	758	26 8.2	346.6	808	16 1.3	348.6
709	45 11.6	340.9	759	31 54.8	346.6	809	21 49.9	348.6
710	50 52.5	341.1	760	37 41.4	346.7	810	27 38.5	348.6
1.711	58 56 33.6	341.3	1.761	63 43 28.1	346.8	1.811	68 33 27.1	348.6
712	59 2 14.9	341.4	762	49 14.9	346.9	812	39 15.7	348.5
713	7 56.3	341.6	763	63 55 1.8	346.9	813	45 4.2	348.6
714	13 37.9	341.8	764	64 0 48.7	347.0	814	50 52.8	348.6
715	19 19.7	341.9	765	6 35.7	347.1	815	68 56 41.4	348.5
1.716	59 25 1.6	342.0	1.766	64 12 22.8	347.1	1.816	69 2 29.9	348.5
717	30 43.6	342.1	767	18 9.9	347.2	817	8 18.4	348.6
718	36 25.7	342.3	768	23 57.1	347.3	818	14 7.0	348.5
719	42 8.0	342.4	769	29 44.4	347.4	819	19 55.5	348.5
720	47 50 4	342.5	770	35 31.8	347.4	820	25 44.0	348.5
1.721	59 53 32.9	342.7	1.771	64 41 19.2	347.5	1.821	69 31 32.5	348.5
722	59 59 15.6	342.8	772	47 6.7	347.5	822	37 21.0	348.5
723	60 4 58.4	342.9	773	52 54.2	347.5	823	43 9.5	348.5
724	10 41.3	343.1	774	64 58 41.7	347.6	824	48 58.0	348.5
725	16 24.4	343.2	775	65 4 29.3	347.6	825	69 54 46.5	348.4
1.726	60 22 7.6	343.3	1.776	65 10 16.9	347.7	1.826	70 0 34.9	348.4
727	27 50.9	343.4	777	16 4.6	347.8	827	6 23.3	348.4
728	33 34.3	343.5	778	21 52.4	347.8	828	12 11.7	348.3
729	39 17.8	343.7	779	27 40.2	347.9	829	18 0.0	348.3
730	45 1.5	343.8	780	33 28.1	347.9	830	23 48.3	348.3
1.731	60 50 45.3	343.9	1.781	65 39 16.0	347.9	1.831	70 29 36.6	348.3
732	60 56 29.2	344.0	782	45 3.9	348.0	832	35 24.9	348.2
733	61 2 13.2	344.2	783	50 51.9	348.0	833	41 13.1	348.2
734	7 57.4	344.3	784	65 56 39.9	348.1	834	47 1.3	348.2
735	13 41.7	344.4	785	66 2 28.0	348.1	835	52 49.5	348.1
1.736	61 19 26.1	344.5	1.786	66 8 16.1	348.2	1.836	70 58 37.6	348.1
737	25 10.6	344.6	787	14 4.3	348.2	837	71 4 25.7	348.1
738	30 55.2	344.7	788	19 52.5	348.2	838	10 13.8	348.0
739	36 39.9	344.9	789	25 40.7	348.3	839	16 1.8	348.0
740	42 24.8	345.0	790	31 29.0	348.3	840	21 49.8	348.0
1.741	61 48 9.8	345.1	1.791	66 37 17.3	348.3	1.841	71 27 37.8	347.9
742	53 54.9	345.2	792	43 5.6	348.3	842	33 25.7	347.9
743	61 59 40.1	345.2	793	48 53.9	348.4	843	39 13.6	347.8
744	62 5 25.3	345.3	794	66 54 42.3	348.4	844	45 1.4	347.7
745	11 10.6	345.4	795	67 0 30.7	348.5	845	50 49.1	347.7
1.746	62 16 56.0	345.5	1.796	67 6 19.2	348.5	1.846	71 56 36.8	347.7
747	22 41.5	345.6	797	12 7.7	348.4	847	72 2 24.5	347.6
748	28 27.1	345.7	798	17 56.1	348.4	848	8 12.1	347.6
749	34 12.8	345.8	799	23 44.5	348.4	849	13 59.7	347.5
1.750	62 39 58.6		1.800	67 29 32.9		1.850	72 19 47.2	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
1.850	72° 19′ 47″.2	347″.5	1.900	77° 7′ 43″.8	343″.0	1.950	81° 50′ 42″.8	335″.6
851	25 34.7	347.4	901	13 26.8	342.9	951	81 56 18.4	335.4
852	31 22.1	347.3	902	19 9.7	342.8	952	82 1 53.8	335.2
853	37 9.4	347.3	903	24 52.5	342.7	953	7 29.0	335.1
854	42 56.7	347.2	904	30 35.2	342.6	954	13 4.1	334.9
855	48 43.9	347.1	905	36 17.8	342.4	955	18 39.0	334.7
1.856	72 54 31.0	347.0	1.906	77 42 0.2	342.3	1.956	82 24 13.7	334.5
857	73 0 18.0	347.0	907	47 42.5	342.1	957	29 48.2	334.3
858	6 5.0	347.0	908	53 24.6	342.0	958	35 22.5	334.1
859	11 52.0	346.9	909	77 59 6.6	341.9	959	40 56.6	333.9
860	17 38.9	346.8	910	78 4 48.5	341.7	960	46 30.5	333.8
1.861	73 23 25.7	346.8	1.911	78 10 30.2	341.5	1.961	82 52 4.3	333.6
862	29 12.5	346.7	912	16 11.7	341.4	962	82 57 37.9	333.4
863	34 59.2	346.6	913	21 53.6	341.3	963	83 3 11.3	333.2
864	40 45.8	346.5	914	27 34.4	341.1	964	8 44.5	333.0
865	46 32.3	346.4	915	33 15.5	341.0	965	14 17.5	332.8
1.866	73 52 18.7	346.4	1.916	78 38 56.5	340.9	1.966	83 19 50.3	332.7
867	73 58 5.1	346.3	917	44 37.4	340.8	967	25 23.0	332.5
868	74 3 51.4	346.2	918	50 18.2	340.7	968	30 55.5	332.3
869	9 37.6	346.1	919	78 55 58.9	340.5	969	36 27.8	332.1
870	15 23.7	346.0	920	79 1 39.4	340.4	970	41 59.9	331.8
1.871	74 21 9.7	345.9	1.921	79 7 19.8	340.2	1.971	83 47 31.7	331.7
872	26 55.6	345.9	922	13 0.0	340.0	972	53 3.4	331.5
873	32 41.5	345.8	923	18 40.0	339.9	973	83 58 34.9	331.3
874	38 27.3	345.7	924	24 19.9	339.7	974	84 4 6.2	331.1
875	44 13.0	345.6	925	29 59.6	339.6	975	9 37.3	330.9
1.876	74 49 58.6	345.5	1.926	79 35 39.2	339.5	1.976	84 15 8.2	330.7
877	74 55 44.1	345.5	927	41 18.7	339.3	977	20 38.9	330.5
878	75 1 29.6	345.4	928	46 58.0	339.2	978	26 9.4	330.4
879	7 15.0	345.3	929	52 37.2	339.0	979	31 39.8	330.1
880	13 0.3	345.2	930	79 58 16.2	338.9	980	37 9.9	329.9
1.881	75 18 45.5	345.1	1.931	80 3 55.1	338.7	1.981	84 42 39.8	329.7
882	24 30.6	344.9	932	9 33.8	338.5	982	48 9.5	329.5
883	30 15.5	344.9	933	15 12.3	338.4	983	53 39.0	329.3
884	36 0.4	344.8	934	20 50.7	338.2	984	84 59 8.3	329.1
885	41 45.2	344.7	935	26 28.9	338.0	985	85 4 37.4	328.9
1.886	75 47 29.9	344.5	1.936	80 32 6.9	337.9	1.986	85 10 6.3	328.7
887	53 14.4	344.5	937	37 44.8	337.7	987	15 35.0	328.5
888	75 58 58.9	344.4	938	43 22.5	337.6	988	21 3.5	328.3
889	76 4 43.3	344.2	939	49 0.1	337.5	989	26 31.8	328.1
890	10 27.5	344.1	940	80 54 37.6	337.3	990	31 59.9	327.8
1.891	76 16 11.6	344.0	1.941	81 0 14.9	337.1	1.991	85 37 27.7	327.7
892	21 55.6	343.9	942	5 52.0	336.9	992	42 55.4	327.4
893	27 39.5	343.8	943	11 28.9	336.8	993	48 22.8	327.2
894	33 23.3	343.7	944	17 5.7	336.6	994	53 50.0	327.0
895	39 7.0	343.6	945	22 42.3	336.5	995	85 59 17.0	326.8
1.896	76 44 50.6	343.5	1.946	81 28 18.8	336.3	1.996	86 4 43.8	326.6
897	50 34.1	343.4	947	33 55.1	336.1	997	10 10.4	326.4
898	76 56 17.5	343.2	948	39 31.2	335.9	998	15 36.8	326.1
899	77 2 0.7	343.1	949	45 7.1	335.7	999	21 2.9	325.9
1.900	77 7 43.8		1.950	81 50 42.8		2.000	86 26 28.8	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.000	86° 26′ 28″8	325″7	2.050	90° 53′ 14″4	314″0	2.100	95° 9′ 41″1	301″0
001	31 54.5	325.5	051	90 58 28.4	313.7	101	14 42.1	300.8
002	37 20.0	325.3	052	91 3 42.1	313.5	102	19 42.9	300.5
003	42 45.3	325.1	053	8 55.6	313.3	103	24 43.4	300.2
004	48 10.4	324.8	054	14 8.9	313.1	104	29 43.6	299 9
005	53 35 2	324.6	055	19 22.0	312.8	105	34 43.5	299.7
2.006	86 58 59.8	324 4	2.056	91 24 34.8	312 5	2.106	95 39 43.2	299 4
007	87 4 24.2	324.2	057	29 47.3	312.3	107	44 42.6	299.1
008	9 48.4	323.9	058	34 59 6	312.0	108	49 41.7	298.9
009	15 12.3	323.7	059	40 11.6	311.8	109	54 40.6	298.6
010	20 36.0	323.5	060	45 23.4	311.5	110	95 59 39.2	298.3
2.011	87 25 59.5	323.3	2.061	91 50 34.9	311.2	2.111	96 4 37.5	298.1
012	31 22.8	323.1	062	91 55 46.1	311.0	112	9 35.6	297.8
013	36 45.9	322.8	063	92 0 57.1	310 7	113	14 33.4	297.5
014	42 8.7	322.6	064	6 7.8	310.5	114	19 30.9	297.2
015	47 31.3	322.4	065	11 18.3	310.2	115	24 28.1	297.0
2.016	87 52 53.7	322.1	2.066	92 16 28.5	310.0	2.116	96 29 25.1	296.7
017	87 58 15.8	321.9	067	21 38.5	309.7	117	34 21.8	296.4
018	88 3 37.7	321.7	068	26 48.2	309.5	118	39 18.2	296.1
019	8 59.4	321.5	069	31 57.7	309.2	119	44 14.3	295.9
020	14 20.9	321.2	070	37 6.9	308.9	120	49 10.2	295.6
2.021	88 19 42.1	321.0	2.071	92 42 15.8	308.7	2.121	96 54 5.8	295.3
022	25 3.1	320.8	072	47 24.5	308.4	122	96 59 1.1	295.0
023	30 23.9	320.5	073	52 32.9	308.2	123	97 3 56.1	294.8
024	35 44.4	320.3	074	92 57 41.1	307.9	124	8 50.9	294.5
025	41 4.7	320.1	075	93 2 49 0	307 7	125	13 45.4	294.2
2.026	88 46 24.8	319.8	2.076	93 7 56.7	307.4	2.126	97 18 39.6	293.9
027	51 44.6	319.6	077	13 4.1	307.1	127	23 33.5	293.7
028	88 57 4.2	319 4	078	18 11.2	306.8	128	28 27.2	293.4
029	89 2 23.6	319.1	079	23 18.0	306.5	129	33 20 6	293.1
030	7 42.7	318.9	080	28 24.5	306.3	130	38 13.7	292.8
2.031	89 13 1.6	318.6	2.081	93 33 30.8	306.1	2.131	97 43 6.5	292.6
032	18 20.2	318.4	082	38 36.9	305.8	132	47 59.1	292.2
033	23 38.6	318.1	083	43 42.7	305.6	133	52 51.3	292.0
034	28 56.7	317.9	084	48 48.3	305.3	134	97 57 43.3	291.7
035	34 14.6	317.7	085	53 53.6	305.0	135	98 2 35.0	291.5
2.036	89 39 32.3	317.5	2.086	93 58 58.6	304.8	2 136	98 7 26.5	291.1
037	44 49.8	317.2	087	94 4 3.4	304.5	137	12 17.6	290.9
038	50 7.0	316.9	088	9 7.9	304.2	138	17 8.5	290.6
039	89 55 23.9	316.7	089	14 12.1	304.0	139	21 59.1	290.3
040	90 0 40.6	316.5	090	19 16.1	303.7	140	26 49 4	290.1
2.041	90 5 57.1	316 2	2.091	94 24 19.8	303.4	2.141	98 31 39.5	289.8
042	11 13.3	316.0	092	29 23.2	303.2	142	36 29.3	289.5
043	16 29 3	315.8	093	34 26.4	302.9	143	41 18.8	289.2
044	21 45.1	315.5	094	39 29.3	302.7	144	46 8.0	288.9
045	27 0.6	315.2	095	44 32.0	302.4	145	50 56.9	288.6
2.046	90 32 15.8	315.0	2.096	94 49 34.4	302.1	2.146	98 55 45.5	288.4
047	37 30.8	314.8	097	54 36.5	301.8	147	99 0 33.9	288.1
048	42 45.6	314.5	098	94 59 38.3	301.5	148	5 22.0	287.8
049	48 0.1	314.3	099	95 4 39.8	301.3	149	10 9.8	287.5
2.050	90 53 14.4		2.100	95 9 41.1		2.150	99 14 57.3	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.150	99° 14′ 57″3	287″3	2.200	103° 8′ 34″9	273″1	2.250	106° 50′ 25″2	259″0
151	19 44.6	286.9	201	13 8.0	272.9	251	54 44.2	258.7
152	24 31.5	286.7	202	17 40.9	272.6	252	106 59 2.9	258.5
153	29 18.2	286.5	203	22 13.5	272.3	253	107 3 21.4	258.2
154	34 4.7	286.1	204	26 45.8	272.0	254	7 39.6	257.8
155	38 50.8	285.8	205	31 17.8	271.7	255	11 57.4	257.6
2.156	99 43 36.6	285.6	2.206	103 35 49.5	271.4	2.256	107 16 15.0	257.4
157	48 22.2	285.3	207	40 20.9	271.2	257	20 32.4	257.0
158	53 7.5	285.0	208	44 52.1	270.9	258	24 49.4	256.8
159	99 57 52.5	284.7	209	49 23.0	270.6	259	29 6.2	256.5
160	100 2 37.2	284.5	210	53 53.6	270.3	260	33 22.7	256.2
2.161	100 7 21.7	284.2	2.211	103 58 23.9	270.0	2.261	107 37 38.9	255.9
162	12 5.9	283.9	212	104 2 53.9	269.7	262	41 54.8	255.7
163	16 49.8	283.6	213	7 23.6	269.5	263	46 10.5	255.4
164	21 33.4	283.3	214	11 53.1	269.2	264	50 25.9	255.1
165	26 16.7	283.0	215	16 22.3	268.9	265	54 41.0	254.8
2.166	100 30 59.7	282.8	2.216	104 20 51.2	268.6	2.266	107 58 55.8	254.5
167	35 42.5	282.5	217	25 19.8	268.3	267	108 3 10.3	254.3
168	40 25.0	282.2	218	29 48.1	268.0	268	7 24.6	253.9
169	45 7.2	281.9	219	34 16.1	267.8	269	11 38.5	253.7
170	49 49.1	281.6	220	38 43.9	267.4	270	15 52.2	253.4
2.171	100 54 30.7	281.3	2.221	104 43 11.3	267.2	2.271	108 20 5.6	253.1
172	100 59 12.0	281.1	222	47 38.5	266.9	272	24 18.7	252.9
173	101 3 53.1	280.8	223	52 5.4	266.7	273	28 31.6	252.6
174	8 33.9	280.5	224	104 56 32.1	266.3	274	32 44.2	252.3
175	13 14.4	280.2	225	105 0 58.4	266.1	275	36 56.5	252.0
2.176	101 17 54.6	280.0	2.226	105 5 24.5	265.7	2.276	108 41 8.5	251.8
177	22 34.6	279.6	227	9 50.2	265.5	277	45 20.3	251.4
178	27 14.2	279.4	228	14 15.7	265.2	278	49 31.7	251.2
179	31 53.6	279.1	229	18 40.9	265.0	279	53 42.9	250.9
180	36 32.7	278.8	230	23 5.9	264.6	280	108 57 53.8	250.6
2.181	101 41 11.5	278.5	2.231	105 27 30.5	264.4	2.281	109 2 4.4	250.4
182	45 50.0	278.2	232	31 54.9	264.1	282	6 14.8	250.1
183	50 28.2	278.0	233	36 19.0	263.8	283	10 24.9	249.8
184	55 6.2	277.7	234	40 42.8	263.5	284	14 34.7	249.5
185	101 59 43.9	277.4	235	45 6.3	263.2	285	18 44.2	249.3
2.186	102 4 21.3	277.1	2.236	105 49 29.5	263.0	2.286	109 22 53.5	248.9
187	8 58.4	276.8	237	53 52.5	262.6	287	27 2.4	248.7
188	13 35.2	276.5	238	105 58 15.1	262.4	288	31 11.1	248.5
189	18 11.7	276.3	239	106 2 37.5	262.1	189	35 19.6	248.1
190	22 48.0	276.0	240	6 59.6	261.9	290	39 27.7	247.9
2.191	102 27 24.0	275.6	2.241	106 11 21.5	261.5	2.291	109 43 35.6	247.6
192	31 59.6	275.4	242	15 43.0	261.3	292	47 43.2	247.4
193	36 35.0	275.1	243	20 4.3	261.0	293	51 50.6	247.0
194	41 10.1	274.9	244	24 25.3	260.7	294	109 55 57.6	246.8
195	45 45.0	274.6	245	28 46.0	260.4	295	110 0 4.4	246.6
2.196	102 50 19.6	274.3	2.246	106 33 6.4	260.1	2.296	110 4 11.0	246.3
197	54 53.8	274.0	247	37 26.5	259.8	297	8 17.2	246.0
198	102 59 27.8	273.7	248	41 46.3	259.6	298	12 23.2	245.7
199	103 4 1.5	273.4	249	46 5.9	259.3	299	16 28.9	245.5
2.200	103 8 34.9		2.250	106 50 25.2		2.300	110 20 34.4	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.300	110° 20′ 34″.4	245″.1	2.350	113° 39′ 20″.1	231″.7	2.400	116° 47′ 7″.7	218″.8
301	24 39.5	244.9	351	43 11.8	231.5	401	50 46.5	218.7
302	28 44.4	244.6	352	47 3.3	231.2	402	54 25.2	218.5
303	32 49.0	244.3	353	50 54.5	230.9	403	116 58 3.5	218.1
304	36 53.3	244.1	354	54 45.4	230.7	404	117 1 41.6	217.9
305	40 57.4	243.7	355	113 58 36.1	230.4	405	5 19.5	217.7
2.306	110 45 1.1	243.5	2.356	114 2 26.5	230.1	2.406	117 8 57.2	217.5
307	49 4.6	243.3	357	6 16.6	229.9	407	12 34.5	217.1
308	53 7.9	242.9	358	10 6.5	229.6	408	16 11.6	216.9
309	110 57 10.8	242.7	359	13 56.1	229.4	409	19 48.5	216.7
310	111 1 13.5	242.4	360	17 45.5	229.1	410	23 25.2	216.3
2.311	111 5 15.9	242.2	2.361	114 21 34.6	228.8	2.411	117 27 1.5	216.2
312	9 18.1	241.8	362	25 23.4	228.5	412	30 37.7	215.9
313	13 19.9	241.6	363	29 11.9	228.3	413	34 13.6	215.5
314	17 21.5	241.4	364	33 0.2	228.1	414	37 49.1	215.3
315	21 22.9	241.0	365	36 48.3	227.8	415	41 24.4	215.1
2.316	111 25 23.9	240.8	2.366	114 40 36.1	227.5	2.416	117 44 59.5	214.8
317	29 24.7	240.5	367	44 23.6	227.3	417	48 34.3	214.6
318	33 25.2	240.3	368	48 10.9	227.0	418	52 8.9	214.4
319	37 25.5	240.0	369	51 57.9	226.7	419	55 43.3	214.0
320	41 25.5	239.7	370	55 44.6	226.5	420	117 59 17.3	213.9
2.321	111 45 25.2	239.4	2.371	114 59 31.1	226.2	2.421	118 2 51.2	213.6
322	49 24.6	239.2	372	115 3 17.3	226.0	422	6 24.8	213.3
323	53 23.8	238.9	373	7 3.3	225.7	423	9 58.1	213.1
324	111 57 22.7	238.6	374	10 49.0	225.4	424	13 31.2	212.8
325	112 1 21.3	238.4	375	14 34.4	225.2	425	17 4.0	212.7
2.326	112 5 19.7	238.1	2.376	115 18 19.6	225.0	2.426	118 20 36.7	212.4
327	9 17.8	237.8	377	22 4.6	224.7	427	24 9.1	212.1
328	13 15.6	237.5	378	25 49.3	224.4	428	27 41.2	211.9
329	17 13.1	237.3	379	29 33.7	224.2	429	31 13.1	211.7
330	21 10.4	237.0	380	33 17.9	223.9	430	34 44.8	211.4
2.331	112 25 7.4	236.8	2.381	115 37 1.8	223.7	2.431	118 38 16.2	211.2
332	29 4.2	236.5	382	40 45.5	223.4	432	41 47.4	210.9
333	33 0.7	236.2	383	44 28.9	223.1	433	45 18.3	210.7
334	36 56.9	235.9	384	48 12.0	222.9	434	48 49.0	210.5
335	40 52.8	235.7	385	51 54.9	222.7	435	52 19.5	210.2
2.336	112 44 48.5	235.4	2.386	115 55 37.6	222.4	2.436	118 55 49.7	210.0
337	48 45.9	235.2	387	115 59 20.0	222.1	437	118 59 19.7	209.7
338	52 39.1	234.9	388	116 3 2.1	221.8	438	119 2 49.4	209.5
339	112 56 34.0	234.6	389	6 43.9	221.6	439	6 18.9	209.2
340	113 0 28.6	234.4	390	10 25.3	221.4	440	9 48.1	209.0
2.341	113 4 23.0	234.0	2.391	116 14 6.9	221.1	2.441	119 13 17.1	208.8
342	8 17.0	233.8	392	17 48.0	220.8	442	16 45.9	208.5
343	12 10.8	233.6	393	21 28.8	220.6	443	20 14.4	208.3
344	16 4.4	233.3	394	25 9.4	220.3	444	23 42.7	208.0
345	19 57.7	233.0	395	28 49.7	220.1	445	27 10.7	207.8
2.346	113 23 50.7	232.7	2.396	116 32 29.8	219.8	2.446	119 30 38.5	207.6
347	27 43.4	232.5	397	36 9.6	219.6	447	34 6.1	207.3
348	31 35.9	232.2	398	39 49.2	219.3	448	37 33.4	207.1
349	35 28.1	232.0	399	43 28.5	219.2	449	41 0.5	206.8
2.350	113 39 20.1		2.400	116 47 7.7		2.450	119 44 27.3	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.450	119° 44′ 27″.3	206″.6	2.500	122° 31′ 52″.0	195″.1	2.550	126° 9′ 50″.0	184″.2
451	47 53.9	206.4	501	35 7.1	194.9	651	13 0.2	184.0
452	51 20.3	206.1	502	38 22.0	194.6	652	16 4.2	183.8
453	54 46.4	205.9	503	41 36.6	194.4	653	19 8.0	183.5
454	119 58 12.3	205.7	504	44 51.0	194.2	654	22 11.5	183.4
455	120 1 33.0	205.4	505	48 5.2	194.0	655	25 14.9	183.1
2.456	120 5 3.4	205.2	2.506	122 51 19.2	193.8	2.556	125 28 18.0	183.0
457	8 28.6	204.9	507	54 33.0	193.6	557	31 21.0	182.7
458	11 53.5	204.7	508	122 57 46.6	193.3	558	34 23.7	182.5
459	15 18.2	204.5	509	123 0 59.9	193.1	559	37 26.2	182.3
460	18 42.7	204.3	510	4 13.0	192.8	560	40 28.5	182.1
2.461	120 22 7.0	204.0	2.511	123 7 25.8	192.6	2.561	125 43 30.6	181.9
462	25 31.0	203.8	512	10 38.4	192.3	562	46 32.5	181.7
463	28 54.8	203.5	513	13 50.7	192.2	563	49 34.2	181.5
464	32 18.3	203.3	514	17 2.9	191.9	564	52 35.7	181.3
465	35 41.6	203.1	515	20 14.8	191.7	565	55 37.0	181.1
2.466	120 39 4.7	202.8	2.516	123 23 26.5	191.5	2.566	125 58 38.1	180.8
467	42 27.5	202.6	517	26 38.0	191.2	567	126 1 38.9	180.7
468	45 50.1	202.4	518	29 49.2	191.1	568	4 39.6	180.5
469	49 12.5	202.2	519	33 0.3	190.8	569	7 40.1	180.2
470	52 34.7	201.9	520	36 11.1	190.6	570	10 40.3	180.1
2.471	120 55 56.6	201.7	2.521	123 39 21.7	190.4	2.571	126 13 40.4	179.8
472	120 59 18.3	201.4	522	42 32.1	190.2	572	16 40.2	179.6
473	121 2 39.7	201.2	523	45 42.3	190.0	573	19 39.8	179.5
474	6 0.9	201.0	524	48 52.3	189.7	574	22 39.3	179.2
475	9 21.9	200.8	525	52 2.0	189.5	575	25 38.5	179.0
2.476	121 12 42.7	200.5	2.526	123 55 11.5	189.3	2.576	126 28 37.5	178.8
477	16 3.2	200.3	527	123 58 20.8	189.1	577	31 36.3	178.7
478	19 23.5	200.1	528	124 1 29.9	188.9	578	34 35.0	178.4
479	22 43.6	199.8	529	4 38.8	188.7	579	37 33.4	178.2
480	26 3.4	199.6	530	7 47.5	188.4	580	40 31.6	178.0
2.481	121 29 23.0	199.4	2.531	124 10 55.9	188.3	2.581	126 43 29.6	177.8
482	32 42.4	199.1	532	14 4.2	188.0	582	46 27.4	177.6
483	36 1.5	198.9	533	17 12.2	187.8	583	49 25.0	177.4
484	39 20.4	198.7	534	20 20.0	187.6	584	52 22.4	177.2
485	42 39.1	198.5	535	23 27.6	187.4	585	55 19.6	177.0
2.486	121 45 57.6	198.2	2.536	124 26 35.0	187.2	2.586	126 58 16.6	176.8
487	49 15.8	198.0	537	29 42.2	186.9	587	127 1 13.4	176.6
488	52 33.8	197.8	538	32 49.1	186.8	588	4 10.0	176.4
489	55 51.6	197.5	539	35 55.9	186.5	589	7 6.4	176.2
490	121 59 9.1	197.3	540	39 2.4	186.3	590	10 2.6	176.0
2.491	122 2 26.4	197.1	2.541	124 42 8.7	186.1	2.591	127 12 58.6	175.8
492	5 43.5	196.9	542	45 14.8	185.9	592	15 54.4	175.6
493	9 0.4	196.6	543	48 20.7	185.7	593	18 50.0	175.4
494	12 17.0	196.4	544	51 26.4	185.4	594	21 45.4	175.1
495	15 33.4	196.2	545	54 31.8	185.3	595	24 40.5	175.0
2.496	122 18 49.6	195.9	2.546	124 57 37.1	185.0	2.596	127 27 35.5	174.8
497	22 5.5	195.8	547	125 0 42.1	184.9	597	30 30.3	174.6
498	25 21.3	195.5	548	3 47.0	184.6	598	33 24.9	174.4
499	28 36.8	195.2	549	6 51.6	184.4	599	36 19.3	174.2
2.500	122 31 52.0		2.550	125 9 56.0		2.600	127 39 13.5	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.600	127° 39′ 13″.5	174″.0	2.650	130° 0′ 18″.1	164″.5	2.700	132° 13′ 41″.6	155″.6
601	42 7.5	173.8	651	3 2.6	164.2	701	16 17.2	155.4
602	45 1.3	173.6	652	5 46.8	164.1	702	18 52.6	155.2
603	47 54.9	173.4	653	8 30.9	163.9	703	21 27.8	155.1
604	50 48.3	173.3	654	11 14.8	163.8	704	24 2.9	154.9
605	53 41.6	173.0	655	13 58.6	163.5	705	26 37.8	154.7
2.606	127 56 34.6	172.8	2.656	130 16 42.1	163.4	2.706	132 29 12.5	154.6
607	127 59 27.4	172.7	657	19 25.5	163.2	707	31 47.1	154.4
608	128 2 20.1	172.4	658	22 8.7	163.0	708	34 21.5	154.2
609	5 12.5	172.2	659	24 51.7	162.8	709	36 56.7	154.0
610	8 4.7	172.1	660	27 34.5	162.7	710	39 29.7	153.9
2.611	128 10 56.8	171.9	2.661	130 30 17.2	162.4	2.711	132 42 3.6	153.7
612	13 48.7	171.6	662	32 59.6	162.3	712	44 37.3	153.5
613	16 40.3	171.5	663	35 41.9	162.1	713	47 10.8	153.4
614	19 31.8	171.3	664	38 24.0	162.0	714	49 44.2	153.2
615	22 23.1	171.1	665	41 6.0	161.7	715	52 17.4	153.1
2.616	128 25 14.2	170.9	2.666	130 43 47.7	161.6	2.716	132 54 50.5	152.8
617	28 5.1	170.7	667	46 29.3	161.4	717	57 23.3	152.7
618	30 55.8	170.5	668	49 10.7	161.3	718	132 59 56.0	152.5
619	33 46.3	170.4	669	51 52.0	161.0	719	133 2 28.5	152.4
620	36 36.7	170.2	670	54 33.0	160.8	720	5 0.9	152.2
2.621	128 39 26.9	169.9	2.671	130 57 13.8	160.7	2.721	133 7 33.1	152.0
622	42 16.8	169.7	672	130 59 54.5	160.5	722	10 5.1	151.8
623	45 6.5	169.5	673	131 2 35.0	160.3	723	12 36.9	151.7
624	47 56.0	169.4	674	5 15.3	160.2	724	15 8.6	151.5
625	50 45.4	169.1	675	7 55.5	160.0	725	17 40.1	151.3
2.626	128 53 34.5	169.0	2.676	131 10 35.5	159.8	2.726	133 20 11.4	151.2
627	56 23.5	168.8	677	13 15.3	159.6	727	22 42.6	151.0
628	128 59 12.3	168.6	678	15 54.9	159.4	728	25 13.6	150.8
629	129 2 0.9	168.4	679	18 34.3	159.3	729	27 44.4	150.7
630	4 49.3	168.2	680	21 13.6	159.0	730	30 15.1	150.5
2.631	129 7 37.5	168.0	2.681	131 23 52.6	158.9	2.731	133 32 45.6	150.4
632	10 25.5	167.8	682	26 31.5	158.7	732	35 16.0	150.2
633	13 13.3	167.7	683	29 10.2	158.6	733	37 46.2	150.0
634	16 1.0	167.4	684	31 48.8	158.3	734	40 16.2	149.9
635	18 48.4	167.3	685	34 27.1	158.2	735	42 46.1	149.7
2.636	129 21 35.7	167.1	2.686	131 37 5.3	158.1	2.736	133 45 15.8	149.5
637	24 22.8	166.9	687	39 43.4	157.8	737	47 45.3	149.4
638	27 9.7	166.7	688	42 21.2	157.6	738	50 14.7	149.2
639	29 56.4	166.6	689	44 58.8	157.5	739	52 43.9	149.0
640	32 43.0	166.3	690	47 36.3	157.3	740	55 12.9	148.9
2.641	129 35 29.3	166.2	2.691	131 50 13.6	157.2	2.741	133 57 41.8	148.8
642	38 15.5	165.9	692	52 50.8	156.9	742	134 0 10.6	148.6
643	41 1.4	165.8	693	55 27.7	156.8	743	2 39.2	148.4
644	43 47.2	165.6	694	131 58 4.5	156.6	744	5 7.6	148.2
645	46 32.8	165.5	695	132 0 41.1	156.5	745	7 35.8	148.1
2.646	129 49 18.3	165.2	2.696	132 3 17.6	156.2	2.746	134 10 3.9	147.9
647	52 3.5	165.1	697	5 53.8	156.1	747	12 31.8	147.8
648	54 48.6	164.8	698	8 29.9	155.9	748	14 59.6	147.6
649	129 57 33.4	164.7	699	11 5.8	155.8	749	17 27.2	147.5
2.650	130 0 18.1		2.700	132 13 41.6		2.750	134 19 54.7	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.750	134° 19′ 54″7	147″3	2.800	136° 19′ 25″8	139″5	2.850	138° 12′ 41″8	132′3
751	22 22.0	147.1	801	21 45.3	139.4	851	14 54.1	132.1
752	24 49.1	146.9	802	24 4.7	139.2	852	17 6.2	132.0
753	27 16.0	148.8	803	28 23.9	139.0	853	19 18.2	131.8
754	29 42.8	146.6	804	28 42.9	138.9	854	21 30.0	131.7
755	32 9.4	148.5	805	31 1.8	138.8	855	23 41.7	131.6
2.756	134 34 35.9	146.3	2.806	136 33 20.8	138.8	2.856	138 25 53.3	131.4
757	37 2.2	146.2	807	35 39.2	138.5	857	28 4.7	131.3
758	39 28.4	146.0	808	37 57.7	138.3	858	30 16.0	131.2
759	41 54.4	145.8	809	40 16.0	138.2	859	32 27.2	131.0
760	44 20.2	145.7	810	42 34.2	138.0	860	34 38.2	130.9
2.761	134 48 45.9	145.5	2.811	136 44 52.2	137.9	2.861	138 36 49.1	130.7
762	49 11.4	145.4	812	47 10.1	137.7	862	38 59.8	130.6
763	51 36.8	145.2	813	49 27.8	137.6	863	41 10.4	130.5
764	54 2.0	145.0	814	51 45.4	137.4	864	43 20.9	130.3
765	56 27.0	144.9	815	54 2.8	137.3	865	45 31.2	130.2
2.766	134 58 51.9	144.7	2.816	138 56 20.1	137.1	2.866	138 47 41.4	130.0
767	135 1 18.6	144.6	817	136 58 37.2	137.0	867	49 51.4	129.9
768	3 41.2	144.4	818	137 0 54.2	136.9	868	52 1.3	129.8
769	6 5.6	144.2	819	3 11.1	136.7	869	54 11.1	129.7
770	8 29.8	144.1	820	5 27.8	136.8	870	56 20.8	129.5
2.771	135 10 53.9	144.0	2.821	137 7 44.4	136.4	2.871	138 58 30.3	129.3
772	13 17.9	143.8	822	10 0.8	136.2	872	139 0 39.6	129.3
773	15 41.7	143.8	823	12 17.0	136.1	873	2 48.9	129.1
774	18 5.5	143.5	824	14 33.1	136.0	874	4 58.0	128.9
775	20 28.8	143.3	825	16 49.1	135.8	875	7 6.9	128.8
2.776	135 22 52.1	143.1	2.826	137 19 4.9	135.7	2.876	139 9 15.7	128.7
777	25 15.2	143.0	827	21 20.6	135.6	877	11 24.4	128.6
778	27 38.2	142.9	828	23 36.2	135.4	878	13 33.0	128.4
779	30 1.1	142.7	829	25 51.6	135.2	879	15 41.4	128.3
780	32 23.8	142.5	830	28 8.8	135.1	880	17 49.7	128.1
2.781	135 34 46.3	142.4	2.831	137 30 21.9	135.0	2.881	139 19 57.8	128.0
782	37 8.7	142.2	832	32 36.9	134.8	882	22 5.8	127.9
783	39 30.9	142.1	833	34 51.7	134.7	883	24 13.7	127.8
784	41 53.0	141.9	834	37 6.4	134.5	884	26 21.5	127.6
785	44 14.9	141.8	835	39 20.9	134.4	885	28 29.1	127.5
2.786	135 48 36.7	141.6	2.836	137 41 35.3	134.3	2.886	139 30 36.6	127.3
787	48 58.3	141.5	837	43 49.6	134.1	887	32 43.9	127.2
788	51 19.8	141.4	838	48 3.7	133.9	888	34 51.1	127.1
789	53 41.2	141.1	839	48 17.8	133.8	889	38 58.2	126.9
790	56 2.3	141.0	840	50 31.4	133.7	890	39 5.1	128.8
2.791	135 58 23.3	140.9	2.841	137 52 45.1	133.6	2.891	139 41 11.9	128.7
792	136 0 44.2	140.7	842	54 58.7	133.4	892	43 18.6	128.6
793	3 4.9	140.6	843	57 12.1	133.2	893	45 25.2	126.4
794	5 25.5	140.4	844	137 59 25.3	133.1	894	47 31.8	126.3
795	7 45.9	140.3	845	138 1 38.4	133.0	895	49 37.9	128.1
2.796	136 10 6.2	140.1	2.846	138 3 51.4	132.8	2.896	139 51 44.0	128.0
797	12 26.3	140.0	847	6 4.2	132.7	897	53 50.0	125.9
798	14 46.3	139.8	848	8 16.9	132.5	898	55 55.9	125.8
799	17 8.1	139.7	849	10 29.4	132.4	899	139 58 1.7	125.6
2.800	136 19 25.8		2.850	138 12 41.8		2.900	140 0 7.3	

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
2.900	140° 0′ 7″3	125″5	2.950	141° 42′ 5″4	119″2	3.00	143° 18′ 57″3	1127″4
901	2 12.8	125.4	951	44 4.6	119.0	01	143 37 44.7	1116.1
902	4 18.2	125.2	952	46 3.6	118.9	02	143 56 20.8	1104.8
903	6 23.4	125.1	953	48 2.5	118.8	03	144 14 45.6	1093.8
904	8 28.3	125.0	954	50 1.3	118.7	04	144 32 59.4	1083.1
905	10 33.5		955	52 0.0		05	144 51 2.5	
2.906	140 12 38.3	124.8	2.956	141 53 58.6	118.6	3.06	143 8 54.8	1072.3
907	14 43.0	124.7	957	55 57.0	118.4	07	145 26 36.5	1061.7
908	16 47.6	124.6	958	57 55.3	118.3	08	145 44 7.7	1051.2
909	18 52.0	124.4	959	141 59 53.5	118.2	09	146 1 28.6	1040.9
910	20 56.4	124.4	960	142 1 51.6	118.1	10	146 18 39.3	1030.7
2.911	140 25 0.6	124.2	2.961	142 3 49.6	118.0	3.11	146 35 39.9	1020.6
912	23 4.6	124.0	962	5 47.4	117.8	12	146 52 30.5	1010.6
913	27 8.6	124.0	963	7 45.1	117.7	13	147 9 11.3	1000.8
914	29 12.4	123.8	964	9 42.7	117.6	14	147 25 42.5	991.2
915	31 16.1	123.7	965	11 40.2	117.5	15	147 42 4.1	981.6
2.916	140 33 19.6	123.5	2.966	142 13 37.5	117.3	3.16	147 58 16.2	972.1
917	33 23.1	123.5	967	15 34.8	117.3	17	148 14 19.0	962.8
918	37 26.4	123.3	968	17 31.9	117.1	18	148 30 12.5	953.5
919	39 29.6	123.2	969	19 28.9	117.0	19	148 45 56.9	944.4
920	41 32.6	123.0	970	21 25.7	116.8	20	149 1 32.3	935.4
2.921	140 43 33.5	122.9	2.971	142 23 22.5	116.8	3.21	149 16 58.9	926.6
922	45 38.3	122.8	972	23 19.1	116.6	22	149 32 16.6	917.7
923	47 41.0	122.7	973	27 15.6	116.5	23	149 47 23.7	909.1
924	49 43.3	122.5	974	29 12.0	116.4	24	150 2 26.2	900.5
925	51 45.9	122.4	975	31 8.3	116.3	25	150 17 18.2	892.0
2.926	140 55 48.2	122.3	2.976	142 33 4.4	116.1	3.26	150 32 1.9	883.7
927	55 50.3	122.1	977	35 0.4	116.0	27	150 46 37.3	875.4
928	57 52.4	122.1	978	36 56.4	116.0	28	151 1 4.3	867.2
929	140 59 54.3	121.9	979	38 52.2	115.8	29	151 15 23.5	859.0
930	141 1 56.0	121.7	980	40 47.8	115.6	30	151 29 34.7	851.2
2.931	141 3 57.7	121.5	2.981	142 42 43.4	115.4	3.31	151 43 38.0	845.3
932	5 59.2	121.4	982	44 38.8	115.4	32	151 57 33.5	835.5
933	8 0.6	121.3	983	46 34.2	115.2	33	152 11 21.1	827.6
934	10 1.9	121.1	984	48 29.4	115.1	34	152 25 1.3	820.2
935	12 3.0	121.1	985	50 24.5	114.9	35	152 38 34.0	812.7
2.936	141 14 4.1	120.9	2.986	142 52 19.4	114.9	3.36	152 51 59.1	805.1
937	16 5.0	120.7	987	54 14.3	114.8	37	153 5 16.9	797.8
938	18 5.7	120.7	988	56 9.1	114.6	38	153 18 27.5	790.6
939	20 6.4	120.5	989	58 3.7	114.5	39	153 31 30.8	783.5
940	22 6.9	120.4	990	142 59 58.2	114.4	40	153 44 27.1	776.3
2.941	141 24 7.3	120.3	2.991	143 1 52.6	114.3	3.41	153 57 16.3	769.2
942	26 7.6	120.2	992	3 46.9	114.2	42	154 9 58.5	762.2
943	28 7.8	120.0	993	5 41.1	114.1	43	154 22 33.9	755.4
944	30 7.8	119.9	994	7 35.2	113.9	44	154 33 2.6	748.7
945	32 7.7	119.8	995	9 29.1	113.9	45	154 47 24.4	741.8
2.946	141 34 7.5	119.6	2.996	143 11 23.0	113.7	3.46	154 59 39.6	735.2
947	36 7.1	119.6	997	13 16.7	113.6	47	155 11 48.4	728.8
948	38 6.7	119.4	998	15 10.3	113.3	48	155 23 50.5	722.1
949	40 6.1	119.3	999	17 3.8	113.5	49	155 35 46.2	715.7
2.950	141 42 5.4		3.000	143 18 57.3		3.50	155 47 35.6	709.4

Seguito della TAV. I.

Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.	Logar. dei giorni	Anom. vera	Diff.
3.50	155° 47′ 35″6	703″1	3.70	159° 23′ 27″1	590″1	3.90	162° 25′ 11″0	498″4
51	155 59 18 7	696.8	71	159 33 17.5	585.[illegible]	91	162 33 29.4	494 2
52	156 10 55.5	690.7	72	159 43 2 8	580.[illegible]	92	162 41 43.6	490 2
53	156 22 26.2	684.6	73	159 52 43.2	575.[illegible]	93	162 49 53 8	486 2
54	156 33 50.8	678.6	74	160 2 18.6	570.5	94	162 58 0.0	482 0
55	156 45 9.4	672.7	75	160 11 49 1	565.6	95	163 6 2.0	478.1
3.56	156 56 22.1	666.7	3.76	160 21 14.7	560.9	3.96	163 14 0.1	474.1
57	157 7 28.8	660.9	77	160 30 35.6	556.1	97	163 21 54.2	470.3
58	157 18 29 7	655.1	78	160 39 51.7	551.3	98	163 29 44.5	466.3
59	157 29 24 8	649.5	79	160 49 3.0	546.[illegible]	99	163 37 30.8	462.6
60	157 40 14 3	643.7	80	160 58 9.7	542.2	4.00	163 45 15 4	
3.61	157 50 58.0	638.2	3.81	161 7 11.9	537.6	5.00	172 32 9.2	
62	158 1 36.2	632.6	82	161 16 9 5	533.0			
63	158 12 8.8	627.2	83	161 25 2.5	528.6			
64	158 22 36.0	621.7	84	161 33 51.1	524.1			
65	158 32 57.7	616.4	85	161 42 35.2	519 8			
3.66	158 43 14.1	611.1	3.86	161 51 15.0	515 4			
67	158 53 25.2	605 8	87	161 59 50.4	511.1			
68	159 3 31.0	600.6	88	162 8 21.5	506.8			
69	159 13 31.6	595.5	89	162 16 48.3	502.7			
70	159 23 27.1		90	162 25 11.0				

Uso della Tavola precedente.

Questa Tavola è stata calcolata dal signor Burkardt, e trovasi per intero riferita nella *Connaiss. des tems* per l'anno 1818. Essa fondasi sull'equazione (1) del § 329, la quale si può scrivere eziandio sotto la forma $q^{-3/2}\, t = (\text{tang}^3 \tfrac{1}{2} v + 3 \text{ tang} \tfrac{1}{2} v) : 3\, k \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Quindi per ogni valore di v si potrà calcolare il logar. di $q^{-3/2}\, t$, e viceversa dato questo logaritmo si ha l'anomalia vera v. L'argomento sotto il titolo di *logar. dei giorni* è il logar. di $q^{-3/2}\, t$, che formasi togliendo in ogni caso particolare $\frac{3}{2} \log q$ da $\log t$; t essendo il tempo dato in giorni dopo il passaggio della cometa per il perielio. Gli esempj seguenti renderanno abbastanza palese il suo uso, e comodo nel calcolo della posizione di una cometa nella parabola.

Esempio I. Domandasi l'anomalia vera in una parabola, in cui sia $\frac{3}{2} \log \textit{dist. per.}\ q = 9{,}6484750$, supponendo $t = 49^g{,}252824$.

Sarà . . . . $\log t = 1{,}6924311$

$\frac{3}{2} \log q = 9{,}6484750$

argom. o $\log q^{-3/2}\, t = 2{,}0439561$

Nella tavola in faccia a $2,0440000$ si ha $v = 90^\circ\ 21'\ 45'',1$;

differenza $= \quad 439$

Per trovare la parte proporzionale si dirà
$10000 : 315'',8 :: 439 : x = 13'',9$, che si toglierà da $90^\circ\ 21'\ 45'',1$ per essere il logaritmo dato minore di quello della Tavola. Sarà così la cercata anomalia $= 90^\circ\ 21'\ 31'',2$.

Esempio II. Si domanda per la stessa cometa il numero dei giorni corrispondenti a $v = 31^\circ\ 25'\ 0'',0$. La Tavola dimostra che a
$31\ \ 23\ \ 45\ ,0$ corrisponde $\log q^{-3/2} t = 1,375$.

differ. $\quad 1\ \ 15\ ,0 = 75'',0$.

Per avere la parte proporzionale si dirà
$235'',5 : 10000 :: 75'',0 : x = 3185$. Quindi all' anomalia $31^\circ\ 25'$ corrisponderà

$$\log q^{-3/2} t = 1,3753185$$
si aggiunga $\frac{3}{2} \log q = 9,6484750$

si avrà . . . . $\log t = 1,0237935$; però $t = 10^{s},56315$.

Esempio III. Si domanda per la stessa cometa l' anomalia vera che ha luogo un giorno e mezzo avanti o dopo il passaggio per il perielio. In questo caso si operi così:

$$\log 1,5 = 0,1760913$$
$$\frac{3}{2} \log q = 9,6484750$$
$$\log q^{-3/2} t = 0,5276163$$

Quindi $q^{-3/2} t = 3,369894$. Al numero 3,3 nella Tavola corrisponde $v = 4^\circ\ 35'\ 41'',3$. Per avere la parte proporzionale si dirà
$0^{s},1 : 500'',1 :: 0,069894 : x$. Donde deducesi $x = 349'',5 = 5'\ 49'',5$; però $v = 4^\circ\ 41'\ 30'',8$.

TAV. II. *Riduzione della* PARABOLA *all' Ellisse od all' Iperbola* (§§ 334 - 338)

Ano. nella par.	log *A*	Differ. per 10′	log *B*	Differ. per 10′	Ano. nella par.	log *A*	Differ. per 10′	log *B*	Differ. per 10′
0°	— ∞		— ∞		50°	4.38317—		3.82417—	
1	2.95425—	+5011.2	2.05194—	+5023.2	51	4.37781	— 89.5	3.82538	+ 20.2
2	3.25492	2927.5	2.35535	2946.0	52	4.37164	102.8	3.82548	+ 1.7
3	3.43057	2072.0	2.53009	2100.2	53	4.36462	117.0	3.82445	— 17.2
4	3.55489	1601.8	2.65610	1640.0	54	4.35670	132.0	3.82220	57.5
5	3.65100	1306.8	2.75450	1351.8	55	4.34783	147.8	3.81865	59.5
6	3.72941	1093.3	2.83561	1152.0	56	4.33795	164.7	3.81365	85.0
7	3.79501	944.1	2.90473	1006.7	57	4.32698	182.8	3.80713	108.7
8	3.85166	827.3	2.96313	898.3	58	4.31486	202.0	3.79897	136.0
9	3.90130	734.3	3.01903	812.3	59	4.30147	223.2	3.78897	166.7
10	3.94536	658.7	3.06777	743.8	60	4.28672	245.8	3.77695	200.3
11	3.98488	595.5	3.11240	687.3	61	4.27046	271.0	3.76267	238.0
12	4.02061	541.8	3.15364	640.2	62	4.25253	298.5	3.74581	281.0
13	4.05312	495.7	3.19205	600.0	63	4.23276	259.5	3.72602	329.8
14	4.05286	455.7	3.22805	565.5	64	4.21090	364.3	3.70282	386.7
15	4.11020	420.2	3.26198	535.2	65	4.18668	403.7	3.67561	453.5
16	4.13541	388.5	3.29409	508.2	66	4.15975	448.8	3.64354	534.5
17	4.15872	360.2	3.32458	484.5	67	4.12966	501.5	3.60555	633.2
18	4.18033	334.5	3.35365	462.8	68	4.09583	563.8	3.56007	755.0
19	4.20040	311.0	3.38142	443.0	69	4.05752	638.5	3.50471	922.7
20	4.21906	289.3	3.40800	424.7	70	4.01369	730.5	3.43579	1148.7
21	4.23642	269.5	3.43348	407.7	71	3.96291	846.3	3.34705	1479.0
22	4.25259	251.0	3.45794	392.0	72	3.90308	997.2	3.22612	2015.5
23	4.26765	233.5	3.48146	376.8	73	3.83091	1202.8	3.04351	3043.5
24	4.28166	217.5	3.50407	362.3	74	3.74095	1499.3	2.68954—	—5899.5
25	4.29471	201.8	3.52581	348.5	75	3.62293	1967.0	2.21860+	. . .
26	4.30682	187.5	3.54672	335.3	76	3.45382	2818.5	2.93417	. . .
27	4.31807	173.3	3.56684	322.5	77	3.16758	—4770.4	3.20257	. . .
28	4.32847	160.3	3.58619	310.0	78	0.87018—	. . .	3.37492	+2872.5
29	4.33809	147.3	3.60479	297.5	79	3.10902+	. . .	3.50380	2148.0
30	4.34693	135.2	3.62264	285.3	80	3.47717	. . .	3.60770	1731.7
31	4.35504	123.2	3.63976	273.5	81	3.65979	+3043.7	3.69535	1460.5
32	4.36243	111.5	3.65617	261.7	82	3.79099	2186.7	3.77154	1270.1
33	4.36912	100.3	3.67187	249.7	83	3.89401	1717.0	3.83928	1129.0
34	4.37514	89.2	3.68685	238.0	84	3.97918	1419.5	3.90042	1019.0
35	4.38049	78.3	3.70113	226.5	85	4.05202	1214.0	3.95630	931.5
36	4.38519	67.7	3.71472	214.3	86	4.11582	1063.3	4.00782	858.7
37	4.38925	56.8	3.72758	202.2	87	4.17271	948.2	4.05580	799.7
38	4.39266	46.5	3.73971	189.8	88	4.22412	856.8	4.10078	749.7
39	4.39545	35.8	3.75110	177.3	89	4.27112	783.3	4.14314	706.0
40	4.39760	25.3	3.76174	165.2	90	4.31443	721.8	4.18325	668.5
41	4.39912	14.8	3.77165	152.5	91	4.35466	670.5	4.22129	634.0
42	4.40001	+ 4.2	3.78080	139.8	92	4.39225	626.5	4.25765	606.0
43	4.40026	— 6.7	3.78919	126.7	93	4.42758	588.8	4.29244	579.8
44	4.39986	17.5	3.79679	112.8	94	4.46091	555.5	4.32585	556.8
45	4.39881	28.7	3.80356	98.8	95	4.49251	526.7	4.35799	535.7
46	4.39709	40.2	3.80949	84.2	96	4.52255	500.7	4.38892	515.5
47	4.39468	51.7	3.81454	69.3	97	4.55121	477.7	4.41887	499.2
48	4.39158	63.8	3.81870	54.0	98	4.57863	457.0	4.44786	483.2
49	4.38775	— 76.3	3.82194	+ 37.2	99	4.60493	438.3	4.47599	468.8
50	4.38317—		3.82417—		100	4.63021 +	+ 421.5	4.50333 +	+ 455.7

Seguito della TAV. II.

Ano. nella par.	log *A*	Differ. per 10′	log *B*	Differ. per 10′	Ano. nella par.	log *A*	Differ. per 10′	log *B*	Differ. per 10′
100°	4.63021 +	+ 406.0	4.50333 +	+ 443.2	140°	5.30566 +	+ 247.7	5.38106 +	+ 417.5
101	4.65457	391.8	4.52992	432.2	141	5.32052	249.8	5.40611	428.2
102	4.67808	378.8	4.55585	421.8	142	5.33551	252.5	5.43180	440.2
103	4.70081	367.0	4.58116	412.5	143	5.35066	255.5	5.45821	453.0
104	4.72283	356.2	4.60591	403.5	144	5.36599	258.7	5.48539	467.0
105	4.74420	346.0	4.63012	395.2	145	5.38151	262.3	5.51341	482.5
106	4.76496	336.5	4.65583	388.0	146	5.39725	266.5	5.54236	499.0
107	4.78515	328.0	4.67711	381.3	147	5.41324	271.0	5.57230	516.8
108	4.80483	320.0	4.69999	374.8	148	5.42950	276.0	5.60331	536.0
109	4.82403	312.5	4.72248	369.2	149	5.44606	281.7	5.63547	557.7
110	4.84278	305.5	4.74463	364.0	150	5.46296	287.7	5.66895	580.3
111	4.86111	299.0	4.76647	359.2	151	5.48022	294.3	5.70375	605.8
112	4.87905	293.2	4.78802	354.7	152	5.49788	301.8	5.74010	632.7
113	4.89664	287.5	4.80930	351.0	153	5.51599	309.8	5.77806	662.5
114	4.91389	282.3	4.83036	347.5	154	5.53458	318.8	5.81781	694.5
115	4.93083	277.7	4.85121	344.7	155	5.55371	328.8	5.85948	730.7
116	4.94749	273.0	4.87189	342.2	156	5.57344	339.7	5.90332	769.0
117	4.96387	269.0	4.89242	339.8	157	5.59382	351.7	5.94946	811.7
118	4.98001	265.2	4.91281	337.8	158	5.61492	365.2	5.99816	858.2
119	4.99592	261.7	4.93308	336.8	159	5.63683	380.0	6.04965	908.5
120	5.01162	258.5	4.95329	335.8	160	5.65963	396.5	6.10416	963.3
121	5.02713	255.5	4.97344	335.2	161	5.68342	415.2	6.16232	1030.3
122	5.04246	253.0	4.99355	335.3	162	5.70833	436.0	6.22414	1100.3
123	5.05764	250.5	5.01367	335.3	163	5.73449	459.8	6.29016	1182.5
124	5.07267	248.3	5.03379	336.0	164	5.76208	486.7	6.36111	1271.0
125	5.08757	246.5	5.05395	337.3	165	5.79128	517.5	6.43737	1373.2
126	5.10236	244.8	5.07419	338.7	166	5.82233	553.2	6.51976	1489.7
127	5.11705	243.3	5.09451	340.8	167	5.85552	594.8	6.60914	1625.5
128	5.13165	242.3	5.11496	343.3	168	5.89121	644.0	6.70666	1783.0
129	5.14619	241.3	5.13556	346.3	169	5.92985	702.7	6.81364	1971.0
130	5.16067	240.7	5.15634	350.0	170	5.97201	774.5	6.93190	2196.8
131	5.17511	240.2	5.17734	353.5	171	6.01847	862.8	7.06371	2474.8
132	5.18952	240.0	5.19855	358.2	172	6.07024	975.5	7.21220	2825.5
133	5.20392	240.2	5.22004	363.0	173	6.12877	1123.7	7.38173	3282.3
134	5.21833	240.3	5.24182	368.8	174	6.19619	1326.5	7.57867	3903.5
135	5.23275	240.8	5.26395	375.7	175	6.27577	1620.5	7.81288	4799.5
136	5.24720	241.7	5.28649	382.0	176	6.37300	2086.5	8.10085	6210.8
137	5.26170	242.8	5.30941	389.5	177	6.49819	2954.5	8.47350	8778.7
138	5.27627	244.0	5.33278	397.7	178	6.67546	5002.3	9.00022 +	
139	5.29091	+ 245.8	5.35664	+ 407.0	179	6.97560 +	. . . .	. . . .	
140	5.30566 +		5.38106 +		180	∞			

Uso della precedente Tavola.

Questa Tavola è estratta da quella calcolata dal sig. Bessel citata al § 334, nella quale si sono trascurate le ultime due cifre decimali nel log *A*, e sonosi scritte le differenze per 10′ in luogo delle differenze intere. Qualora occorra di avere riguardo alle differenze seconde nel calcolo di log *A* e di log *B*, si procederà nel modo seguente. Sia

Digitized by Google

n il numero dei minuti di una data anomalia vera sopra gl' interi gradi; Δ' la differenza prima per 10′ presa nella tavola; Δ'' la differenza seconda presa ad occhio nella tavola stessa; sarà la correzione cercata di $\log A$ o di $\log B = \frac{n}{10}\Delta' - \frac{n}{10}\,\frac{60-n}{120}\Delta''$.

Esempio. Domandasi l' anomalia ellittica corrispondente all' anomalia parabolica $v = 50°\ 20'\ 18''$ nella cometa di Halley pell' apparizione del 1759. Si avrà (Vol. I. pag. 297) $e = 0,96754386$, perciò $\alpha = 0,03245614$, $n = 20'\ 18'' = 20',3$. La tavola darà per $v = 50°$

$\log A = 4,38317 -$, $\Delta' = -89,3$, $\Delta'' = -13,5$
$\log B = 3,82417 -$, $\Delta' = +20,2$, $\Delta'' = -18,5$

Quindi si disporrà il calcolo come segue

$\log A = 4,38317 -$	$\log B = 3,82417 -$
$\frac{n}{10}\Delta' = -181$	$+41$
$\frac{n}{10}\,\frac{60-n}{120}\Delta'' = +9$	$+12$
$\log A = 4,38145 -$	$\log B = 3,82470 -$
$\log \alpha = 8,51130 +$	$\log \alpha' = 7,02260 +$
$\log A\alpha = 2,89275 -$	$\log B\alpha' = 0,84730 -$

Quindi anomalia parab. cerc. $= 50°\ 20'\ 18'' + A\alpha + B\alpha' = 50°\ 7'\ 9'',79$.

Se si volesse far passaggio da un' orbita parabolica ad un' orbita iperbolica si dovrebbe considerare α negativo (§ 338); quando occorra di ricercare l' anomalia parabolica corrispondente ad una data anomalia ellittica od iperbolica si principierà dal considerare quest' ultima come parabolica per calcolare la differenza $\pm A\alpha + B\alpha'$; questa applicata con contrario segno alla data anomalia darà prossimamente la cercata anomalia parabolica, da cui poi si otterrà con maggiore esattezza la differenza $\pm A\alpha + B\alpha'$, e si ripeterà la stessa operazione finchè dalla ottenuta anomalia parabolica si passi nella data anomalia ellittica od iperbolica.

Per ultimo si vuole osservare che fra i 70° ed 80° di anomalia, i valori di $\log A$ e di $\log B$ cangiando di segno, variano troppo fortemente da un grado all' altro, e più esatte riescono le interpolazioni cercando i numeri corrispondenti in questo tratto ai dati logaritmi, lo che potrà ciascheduno comodamente fare da se, non avendo stimato opportuno d' interrompere con questo leggero cangiamento l' uniformità della tavola. Del resto sentiamo con piacere essere stata dal signor Isnardi genovese calcolata una tavola di molta estensione simile alla precedente, che speriamo possa presto divenire di pubblico diritto, e nella quale inutile rendesi l' uso delle differenze seconde.

TAV. III. *Per la Risoluzione dell' Equazione* (15) (pag. 78)

h	log yy	h	log yy	h	log yy	h	log yy
0.0000	0.0000000	0.0050	0.0047832	0.0100	0.0094839	0.0150	0.0141052
01	0965	51	8780	01	5770	51	1968
02	1930	52	0.0049728	02	6702	52	2884
03	2894	53	0.0050675	03	7633	53	3800
04	3858	54	1622	04	8564	54	4716
05	4821	55	2569	05	0.0099495	55	5631
06	5784	56	3515	06	0.0100425	56	6546
07	6747	57	4462	07	1356	57	7460
08	7710	58	5407	08	2285	58	8375
09	8672	59	6353	09	3215	59	0.0149288
10	0.0009634	60	7298	10	4144	60	0.0150202
11	0.0010595	61	8243	11	5073	61	1115
12	1557	62	0.0059187	12	6001	62	2028
13	2517	63	0.0060131	13	6929	63	2941
14	3478	64	1075	14	7857	64	3854
15	4438	65	2019	15	8785	65	4766
16	5398	66	2962	16	0.0109712	66	5678
17	6357	67	3905	17	0.0110639	67	6589
18	7316	68	4847	18	1565	68	7500
19	8275	69	5790	19	2491	69	8411
20	0.0019234	70	6732	20	3417	70	0.0159322
21	0.0020192	71	7673	21	4343	71	0.0160232
22	1150	72	8614	22	5268	72	1142
23	2107	73	0.0069555	23	6193	73	2052
24	3064	74	0.0070496	24	7118	74	2961
25	4021	75	1436	25	8043	75	3870
26	4977	76	2376	26	8967	76	4779
27	5933	77	3316	27	0.0119890	77	5688
28	6889	78	4255	28	0.0120814	78	6596
29	7845	79	5194	29	1737	79	7504
30	8800	80	6133	30	2660	80	8412
31	0.0029755	81	7071	31	3582	81	0.0169319
32	0.0030709	82	8009	32	4505	82	0.0170226
33	1663	83	8947	33	5427	83	1133
34	2617	84	0.0079884	34	6348	84	2039
35	3570	85	0.0080821	35	7269	85	2945
36	4523	86	1758	36	8190	86	3851
37	5476	87	2694	37	0.0129111	87	4757
38	6428	88	3630	38	0.0130032	88	5662
39	7381	89	4566	39	0952	89	6567
40	8332	90	5502	40	1871	90	7471
41	0.0039284	91	6437	41	2791	91	8376
42	0.0040235	92	7372	42	3710	92	0.0179280
43	1186	93	8306	43	4629	93	0.0180183
44	2136	94	0.0089240	44	5547	94	1087
45	3086	95	0.0090174	45	6466	95	1990
46	4036	96	1108	46	7383	96	2893
47	4985	97	2041	47	8301	97	3796
48	5934	98	2974	48	0.0139218	98	4698
49	6883	0.0099	3906	49	0.0140135	0.0199	5600
0.0050	0.0047832	0.0100	0.0094839	0.0150	0.0141052	0.0200	0.0186501

Seguito della TAV. III.

h	log y y	h	log y y	h	log y y	h	log y y
0.0200	0.0186501	0.0250	0.0251215	0.0300	0.0275218	0.0350	0.0318536
01	7403	51	2102	01	6091	51	0.0319396
02	8304	52	2988	02	6964	52	0.0320255
03	0.0189205	53	3875	03	7836	53	1114
04	0.0190105	54	4761	04	8708	54	1973
05	1005	55	5647	05	0.0279580	55	2831
06	1905	56	6532	06	0.0280452	56	3689
07	2805	57	7417	07	1323	57	4547
08	3704	58	8302	08	2194	58	5405
09	4603	59	0.0239187	09	3065	59	6262
10	5502	60	0.0240071	10	3936	60	7120
11	4601	61	0956	11	4806	61	7976
12	7299	62	1839	12	5676	62	8833
13	8197	63	2723	13	6546	63	0.0329689
14	9094	64	3606	14	7415	64	0.0330546
15	0.0199992	65	4489	15	8284	65	1401
16	0.0200889	66	5372	16	0.0289153	66	2257
17	1785	67	6254	17	0.0290022	67	3112
18	2682	68	7136	18	0890	68	3967
19	3578	69	8018	19	1758	69	4822
20	4474	70	8900	20	2626	70	5677
21	5369	71	0.0249781	21	3494	71	6531
22	6264	72	0.0250662	22	4361	72	7385
23	7159	73	1543	23	5228	73	8239
24	8054	74	2423	24	6095	74	9092
25	8948	75	3304	25	6961	75	0.0339946
26	0.0209843	76	4183	26	7827	76	0.0340799
27	0.0210736	77	5063	27	8693	77	1651
28	1630	78	5942	28	0.0299559	78	2504
29	2523	79	6822	29	0.0300424	79	3356
30	3416	80	7700	30	1290	80	4208
31	4309	81	8579	31	2154	81	5059
32	5201	82	0.0259457	32	3019	82	5911
33	6093	83	0.0260335	33	3883	83	6762
34	6985	84	1213	34	4747	84	7613
35	7876	85	2090	35	5611	85	8464
36	8768	86	2967	36	6475	86	0.0349314
37	0.0219659	87	3844	37	7338	87	0.0350164
38	0.0220549	88	4721	38	8201	88	1014
39	1440	89	5597	39	9064	89	1864
40	2330	90	6473	40	0.0309926	90	2713
41	3220	91	7349	41	0.0310788	91	3562
42	4109	92	8224	42	1650	92	4411
43	4998	93	9099	43	2512	93	5259
44	5887	94	0.0269974	44	3373	94	6108
45	6776	95	0.0270849	45	4234	95	6956
46	7664	96	1723	46	5095	96	7804
47	8552	97	2597	47	5956	97	8651
48	0.0229440	98	3471	48	6816	98	0.0359499
49	0.0230328	99	4345	49	7676	0.0399	0.0360346
0.0250	0.0231216	0.0300	0.0275218	0.0350	0.0318536	0.0400	0.0361192

Seguito della TAV. III.

h	log y y	h	log y y	h	log y y	h	log y y
0.040	0.0361192	0.090	0.0755725	0.140	0.1102783	0.190	0.1413412
41	69636	91	63087	41	09523	91	19309
42	78075	92	70430	42	15849	92	25194
43	86478	93	77754	43	22360	93	31088
44	0.0394856	94	85060	44	28857	94	36931
45	0.0403209	95	92348	45	35340	95	42782
46	11537	96	0.0799617	46	41809	96	48622
47	19841	97	0.0806868	47	48264	97	54450
48	28121	98	14101	48	54704	98	60268
49	36376	0.099	21316	49	61131	0.199	66074
50	44607	0.100	28513	50	67544	0.200	71869
51	52814	0.101	35693	51	73943	0.201	77653
52	60998	02	42854	52	80329	02	83427
53	69157	03	49999	53	86701	03	89189
54	77294	04	57125	54	93059	04	0.1494940
55	85407	05	64235	55	0.1199404	05	0.1500681
56	0.0493496	06	71327	56	0.1205735	06	06411
57	0.0501563	07	78401	57	12055	07	12130
58	09607	08	85459	58	18357	08	17838
59	17628	09	92500	59	24649	09	23535
60	25626	10	0.0899523	60	30927	10	29222
61	33602	11	0.0906530	61	37192	11	34899
62	41556	12	13520	62	43444	12	40564
63	49488	13	20494	63	49682	13	46220
64	57397	14	27451	64	55908	14	51865
65	65285	15	34391	65	62121	15	57499
66	75150	16	41315	66	68321	16	63123
67	80994	17	48223	67	74508	17	68737
68	88817	18	55114	68	80683	18	74340
69	0.0596618	19	61990	69	86845	19	79933
70	0.0604398	20	68849	70	92994	20	85516
71	12157	21	75692	71	0.1299131	21	91089
72	19895	22	82520	72	0.1305255	22	0.1596652
73	27612	23	89331	73	11367	23	0.1602204
74	35308	24	0.0996127	74	17466	24	07747
75	42984	25	0.1002907	75	23553	25	13279
76	50639	26	09672	76	29628	26	18802
77	58274	27	16421	77	35690	27	24315
78	65888	28	23154	78	41740	28	29817
79	73483	29	29873	79	47778	29	35310
80	81057	30	36576	80	53804	30	40793
81	88612	31	43264	81	59818	31	46267
82	0.0696146	32	49936	82	65821	32	51730
83	0.0703661	33	56594	83	71811	33	57184
84	11157	34	63237	84	77789	34	62628
85	18633	35	69865	85	83755	35	68063
86	26090	36	76478	86	89710	36	73488
87	33527	37	83076	87	0.1395653	37	78903
88	40945	38	89660	88	0.1401585	38	84309
89	48345	39	0.1096229	89	07504	39	89705
0.090	0.0755725	0.140	0.1102783	0.190	0.1413412	0.240	0.1695092

Digitized by Google

Seguito della TAV. III.

h	log *y y*	*h*	log *y y*	*h*	log *y y*	*h*	log *y y*
0.240	0.1695092	0.290	0.1955145	0.340	0.2191505	0.390	0.2413171
41	0.1700470	91	58049	41	0.2196093	91	17451
42	05838	92	63035	42	0.2200675	92	21725
43	11197	93	67968	43	05250	93	25994
44	16547	94	72894	44	09818	94	30257
45	21887	95	77811	45	14380	95	34514
46	27218	96	82721	46	18935	96	38766
47	32540	97	87624	47	23483	97	43012
48	37853	98	92518	48	28026	98	47252
49	43156	0.299	0.1997406	49	32561	0.399	51487
50	48451	0.300	0.2202285	50	37091	0.400	55716
51	53736	0.301	07157	51	41613	0.401	59940
52	59015	02	22021	52	46130	02	64158
53	64280	03	16878	53	50640	03	68371
54	69538	04	21727	54	55143	04	72578
55	74788	05	26569	55	59640	05	76779
56	80029	06	31403	56	64131	06	80975
57	85261	07	36230	57	68615	07	85166
58	90483	08	41050	58	73094	08	89351
59	0.1795698	09	45862	59	77565	09	93531
60	0.1800903	10	50667	60	82031	10	0.2497705
61	06100	11	55464	61	86490	11	0.2501874
62	11288	12	60254	62	90943	12	06038
63	16467	13	65037	63	95390	13	10196
64	21638	14	69813	64	0.2299831	14	14349
65	26800	15	74581	65	0.2304265	15	18496
66	31953	16	79342	66	08694	16	22638
67	37098	17	84096	67	13116	17	26775
68	42235	18	88843	68	17532	18	30906
69	47363	19	93582	69	21942	19	35032
70	52483	20	0.2098315	70	26346	20	39153
71	57594	21	0.2103040	71	30743	21	43269
72	62696	22	07759	72	35135	22	47379
73	67791	23	12470	73	39521	23	51485
74	72877	24	17174	74	43900	24	55584
75	77955	25	21871	75	48274	25	59679
76	83024	26	26562	76	52642	26	63769
77	88085	27	31245	77	57005	27	67853
78	93138	28	35921	78	61359	28	71932
79	0.1898183	29	40591	79	65709	29	76006
80	0.1903220	30	45253	80	70053	30	80075
81	08249	31	49909	81	74391	31	84139
82	13269	32	54558	82	78723	32	88198
83	18281	33	59200	83	83050	33	92252
84	23286	34	63835	84	87370	34	0.2596300
85	28282	35	68464	85	91685	35	0.2600344
86	33271	36	73085	86	0.2595993	36	04382
87	38251	37	77700	87	0.2400296	37	08415
88	43224	38	82308	88	04594	38	12444
89	48188	39	86910	89	08885	39	16467
0.290	0.1953145	0.340	0.2191505	0.390	0.2413171	0.440	0.2620486

Seguito della TAV. III.

h	log y y	h	log y y	h	log y y	h	log y y
0.440	0.2620486	0.480	0.2777272	0.520	0.2926864	0.560	0.3069938
41	24499	81	81096	21	30518	61	75437
42	28507	82	84916	22	34168	62	76931
43	32511	83	88732	23	37813	63	80422
44	36509	84	92543	24	41455	64	83910
45	40503	85	0.2796349	25	45092	65	87394
46	44492	86	0.2800152	26	48726	66	90874
47	48475	87	03949	27	52355	67	94350
48	52454	88	07743	28	55981	68	0.3097823
49	56428	89	11532	29	59602	69	0.3101292
50	60397	90	15316	30	63220	70	04758
51	64362	91	19096	31	66833	71	08220
52	68321	92	22872	32	70443	72	11678
53	72276	93	26644	33	74049	73	15133
54	76226	94	30411	34	77650	74	18584
55	80171	95	34173	35	81248	75	22031
56	84111	96	37932	36	84842	76	25475
57	88046	97	41686	37	88432	77	28915
58	91977	98	45436	38	92018	78	32352
59	95903	0.499	49181	39	95600	79	35785
60	0.2699824	0.500	52923	40	0.2999178	80	39215
61	0.2703741	0.501	56660	41	0.3002752	81	42641
62	07652	02	60392	42	06323	82	46064
63	11559	03	64121	43	09888	83	49483
64	15462	04	67845	44	13452	84	52898
65	19360	05	71565	45	17011	85	56310
66	23253	06	75281	46	20566	86	59719
67	27141	07	78992	47	24117	87	63124
68	31025	08	82700	48	27664	88	66525
69	34904	09	86403	49	31208	89	69923
70	38778	10	90102	50	34748	90	73318
71	42648	11	93797	51	38284	91	76709
72	46513	12	0.2897487	52	41816	92	80096
73	50374	13	0.2901174	53	45344	93	83481
74	54230	14	04856	54	48869	94	86861
75	58082	15	08535	55	52390	95	90239
76	61929	16	12209	56	55907	96	93612
77	65771	17	15879	57	59420	97	0.3196983
78	69609	18	19545	58	62930	98	0.3200350
79	73443	19	23207	59	66436	99	03714
0.480	0.2777272	0.520	0.2926864	0.560	0.3069938	0.600	0.3207074

Digitized by Google

TAV. IV. *Che dà il Rapporto fra* x *e* ξ (pag. 78 - 79)

x	ξ	x	ξ	x	ξ	x	ξ
0.000	0.0000000	0.050	0.0001471	0.100	0.0006066	0.150	0.0014087
01	001	51	1552	01	6192	51	4285
02	002	52	1593	02	6319	52	4484
03	005	53	1656	03	6448	53	4684
04	009	54	1720	04	6578	54	4886
05	014	55	1785	05	6709	55	5090
06	021	56	1852	06	6842	56	5295
07	028	57	1920	07	6976	57	5502
08	037	58	1989	08	7111	58	5710
09	047	59	2060	09	7248	59	5920
10	057	60	2131	10	7386	60	6131
11	070	61	2204	11	7526	61	6344
12	083	62	2278	12	7667	62	6559
13	097	63	2354	13	7809	63	6775
14	113	64	2431	14	7953	64	6992
15	130	65	2509	15	8098	65	7211
16	148	66	2588	16	8245	66	7432
17	167	67	2669	17	8393	67	7654
18	187	68	2751	18	8542	68	7878
19	209	69	2834	19	8693	69	8103
20	231	70	2918	20	8845	70	8330
21	255	71	3004	21	8999	71	8558
22	280	72	3091	22	9154	72	8788
23	306	73	3180	23	9311	73	9020
24	334	74	3269	24	9469	74	9253
25	362	75	3360	25	9628	75	9487
26	392	76	3453	26	9789	76	9724
27	423	77	3546	27	0.0009951	77	0.0019961
28	455	78	3641	28	0.0010115	78	0.0020201
29	489	79	3738	29	0280	79	0442
30	523	80	3835	30	0447	80	0685
31	559	81	3934	31	0615	81	0929
32	596	82	4034	32	0784	82	1175
33	634	83	4136	33	0955	83	1422
34	674	84	4239	34	1128	84	1671
35	714	85	4343	35	1301	85	1922
36	756	86	4448	36	1477	86	2174
37	799	87	4555	37	1654	87	2428
38	844	88	4663	38	1832	88	2683
39	889	89	4773	39	2012	89	2941
40	936	90	4884	40	2193	90	3199
41	984	91	4996	41	2376	91	3460
42	0.0001033	92	5109	42	2560	92	3722
43	1084	93	5224	43	2745	93	3985
44	1135	94	5341	44	2933	94	4251
45	1188	95	5458	45	3121	95	4518
46	1242	96	5577	46	3311	96	4786
47	1298	97	5697	47	3503	97	5056
48	1354	98	5819	48	3696	98	5328
49	1412	0.099	5942	49	3791	99	5602
0.050	0.0001471	0.100	0.0006066	0.150	0.0014087	0.200	0.0025877

Seguito della TAV. IV.

x	ξ	x	ξ	x	ξ	x	ξ
0.200	0.0025877	0.225	0.0033308	0.250	0.0041835	0.275	0.0051517
01	6154	26	3627	51	2199	76	1930
02	6433	27	3949	52	2566	77	2344
03	6713	28	4272	53	2934	78	2760
04	6995	29	4597	54	3305	79	3188
05	7278	30	4924	55	3677	80	3598
06	7564	31	5252	56	4051	81	4020
07	7851	32	5582	57	4427	82	4444
08	8139	33	5914	58	4804	83	4870
09	8429	34	6248	59	5184	84	5298
10	8722	35	6584	60	5566	85	5728
11	9015	36	6921	61	5949	86	6160
12	9311	37	7260	62	6334	87	6594
13	9608	38	7601	63	6721	88	7030
14	0.0029907	39	7944	64	7111	89	7468
15	0.0030207	40	8289	65	7502	90	7908
16	0509	41	8635	66	7894	91	8350
17	0814	42	8983	67	8289	92	8795
18	1119	43	9333	68	8686	93	9241
19	1427	44	0.0039685	69	9085	94	0.0059689
20	1736	45	0.0040039	70	9485	95	0.0060139
21	2047	46	0394	71	0.0049888	96	0591
22	2359	47	0752	72	0.0050292	97	1045
23	2674	48	1111	73	0699	98	1502
24	2990	49	1472	74	1107	99	1960
0.225	0.0033308	0.250	0.0041835	0.275	0.0051517	0.300	0.0062421

FINE DELL' OPERA.

Digitized by Google

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE NEL SECONDO VOLUME

Cap. I. *Teoria dei pianeti secondarj o satelliti di Giove* pag. 3
Fenomeni generali del moto dei satelliti . . . » 4
Ecclissi dei satelliti di Giove . . . . . » 6
Uso degli ecclissi dei satelliti di Giove nel determinare la longitudine geografica dei diversi luoghi. Loro diametri . . . . . » 26
Satelliti di Saturno ed Urano. . . . . . » 27
Cap. II. *Del passaggio dei pianeti inferiori sul disco del Sole* . . . . . » 29
Dei periodi che riconducono i passaggi dei pianeti inferiori sul disco del Sole . . . . . » 43
Cap. III. *Delle forze centrali. Teorica del moto dei pianeti e delle comete intorno al Sole* . . . . . » 47
Leggi del moto parabolico ed iperbolico, ossia teorica del moto delle comete intorno al Sole . » 61
Cap. IV. *Ricerche intorno al modo di determinare l' orbita di un nuovo pianeta, o di una cometa, con osservazioni geocentriche* . . . . . » 72
Di alcune relazioni esistenti fra più posizioni di un pianeta e della terra nello spazio, sopra le quali appoggiasi la determinazione prima delle loro orbite . . . . . » 82
Metodo per determinare l' orbita di una nuova cometa . . . . . » 100
Metodi per correggere con tre o più osservazioni molto fra loro distanti gli elementi dell' orbita parabolica di una cometa . . . . . » 113
Del calcolo dell' orbita ellittica delle comete dietro le osservazioni fatte dal centro della terra . » 114

Digitized by Google

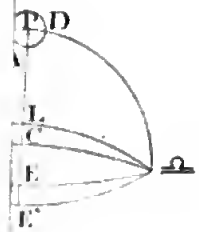
Cap. V. *Delle stelle fisse, e dei varj loro movimenti apparenti* . . . . . » 121
Movimenti apparenti delle stelle fisse dipendenti dalla precessione degli equinozj . . . . . » 127
Movimenti periodici delle stelle fisse . . . . » 132
I. Dell' aberrazione della luce. . . . . » ivi
Dell' aberrazione dei pianeti e delle comete. . » 139
II. Dell' annua paralasse delle stelle fisse . . » 143
III. Movimenti delle stelle dipendenti dalla nutazione dell' asse terrestre . . . . . » 146
Cap. VI. *Teorica delle rifrazioni astronomiche* . . . . » 152
Della disposizione delle tavole di rifrazione, e del modo di osservare le rifrazioni astronomiche . » 163
Dei cambiamenti prodotti dalle rifrazioni nel sito e figura degli astri, e dei crepuscoli . . . . » 166
Cap. VII. *Della figura della terra*. . . . . » 169
I. Della misura di un arco di meridiano . . . » ivi
II. Breve notizia dei risultamenti ottenuti nelle diverse misure intraprese per determinare la figura della terra. . . . . » 180
III. Della figura sferoidica della terra . . . » 183
IV. Di alcune proprietà della linea brevissima, ossia della linea geodesica, considerando la terra come un' ellissoide . . . . . » 190
Cap. VIII. *Principj generali di geografia, e della costruzione delle carte sì celesti, che geografiche* . . . » 195
Distanze dei luoghi nella superficie terrestre . » 198
Della superficie dei paesi, dei quali conoscesi l' estensione in longitudine ed in latitudine . . » 199
Principj per la costruzione delle carte geografiche e celesti . . . . . » 200
Principj della projezione ortografica . . . . » 201
Principj della projezione stereografica. . . . » 205
Delle carte speciali . . . . . » 216
Costruzione delle carte coi meridiani rettilinei convergenti in un punto, e con i paralelli pure rettilinei, e fra loro paralelli . . . . . » 217
Costruzione delle carte di Flamsteed . . . . » 220
Costruzione delle carte di de l' Isle . . . . » 221
Carte di sviluppo conico, e carte di Bonne. . » 222
Cap. IX. *Applicazione dell' Astronomia alla Nautica* . . » 225
Metodo per istimare il viaggio di un vascello in longitudine ed in latitudine. . . . . » ivi

Descrizione dell'ottante di Hadley; sue verificazioni » 229
Esposizione dei metodi che si praticano in mare per determinare il tempo vero del vascello, e la sua latitudine . . . . . » 234
Dei metodi che si praticano in mare per determinare la longitudine geografica del vascello . » 241
Cap. X. *Regole per la costruzione degli orologi solari* . » 245
Costruzione degli orologi solari in un piano orizzontale . . . . . » 246
Costruzione degli orologi solari sopra muri verticali » 248
Cap. XI. *Del calendario, e dei principali precetti per il confronto delle diverse epoche cronologiche* . . » 252
Del ciclo solare, e delle lettere dominicali . . » 255
Dell' aureo numero, e delle epatte ecclesiastiche » 258
Dell' indizione romana, e del periodo giuliano . » 263
Del computo cronologico delle altre nazioni, ed in particolare dei Turchi e degli Ebrei . . . » 265
Tavola per la riduzione delle epoche cronologiche » 274
Appendice *riguardante la teoria delle perturbazioni planetarie; Esposizione del metodo per calcolarne l' effetto colle meccaniche quadrature* . . . . . » 275
Delle variazioni secolari degli elementi del moto ellittico . . . . . » 308
Delle perturbazioni delle comete, e dei pianeti di orbite molto eccentriche . . . . . » 315
Tav. I. *Moto delle comete nella parabola* (§ 329) . . » 337
Tav. II. *Riduzione della parabola all' ellisse od all' iperbola* (§§ 334-338) . . . . . » 355
Tav. III. *Per la risoluzione dell' equazione* (15) (*pag.* 78) » 358
Tav. IV. *Che dà il rapporto fra* x *e* ξ (*pag.* 78-79) . . » 363

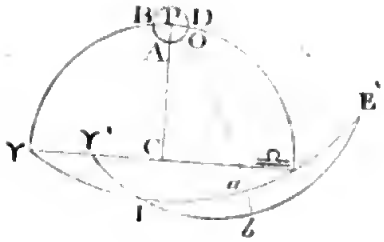
1.4.61
Vol. II

Digitized by Google

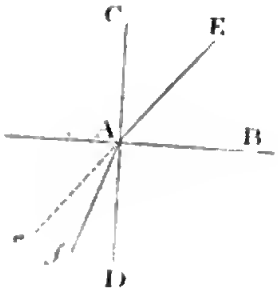
15

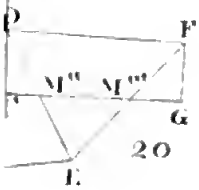


16



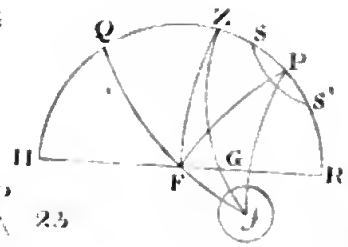
17

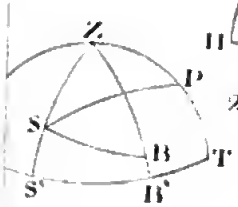




20

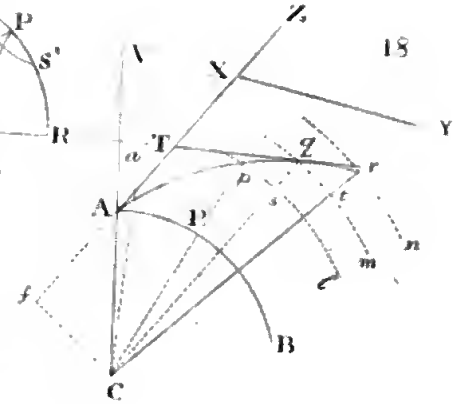
19



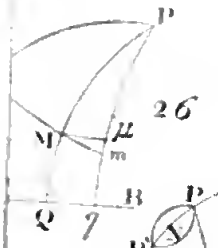


23

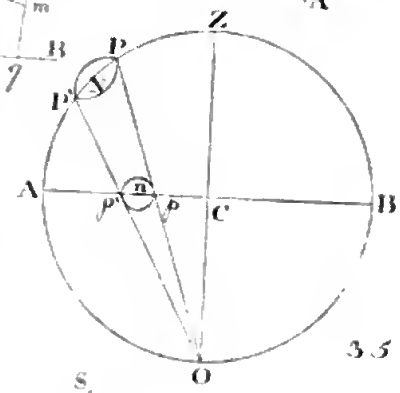
24



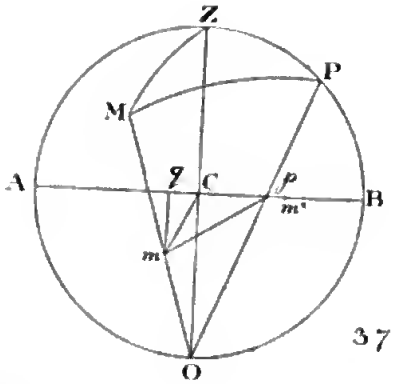
18



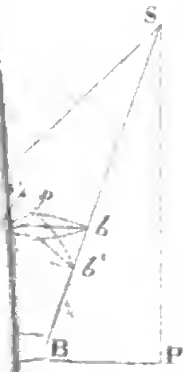
26

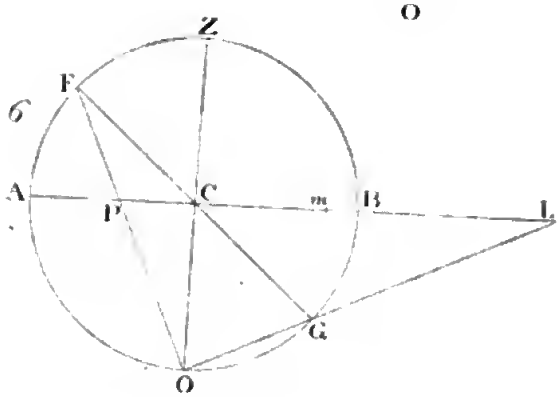


35



37



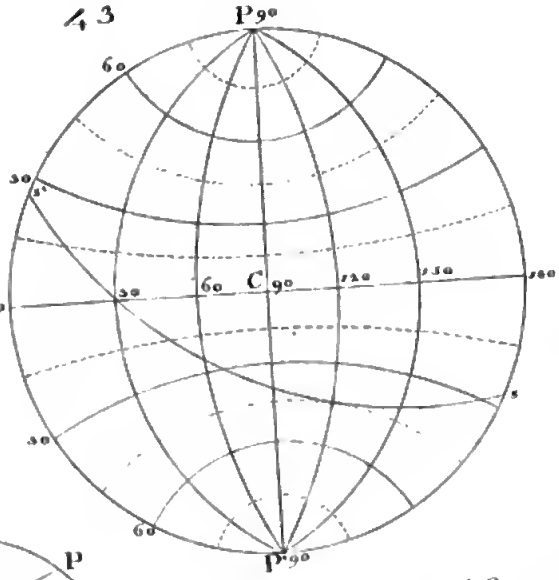


36

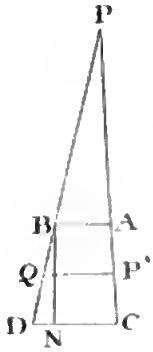
Digitized by Google

Vol. II. Tav. II

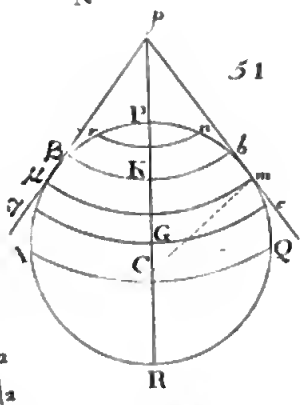
43



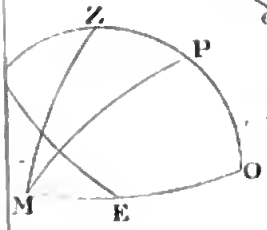
48



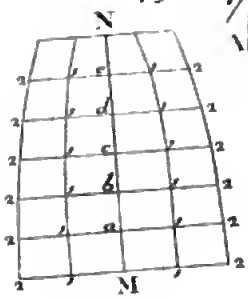
51



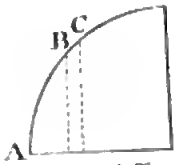
44



49



45



47

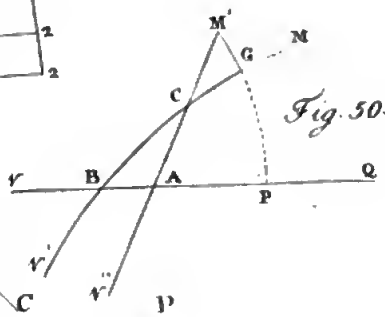
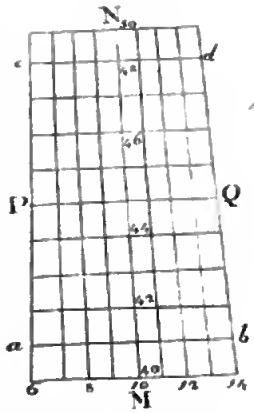
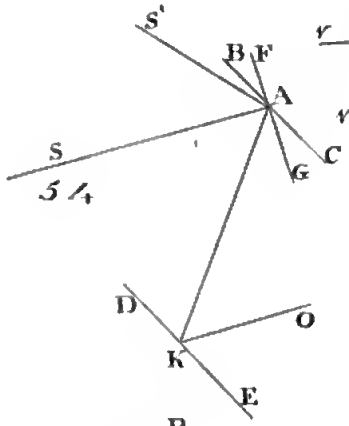


Fig. 50.a)

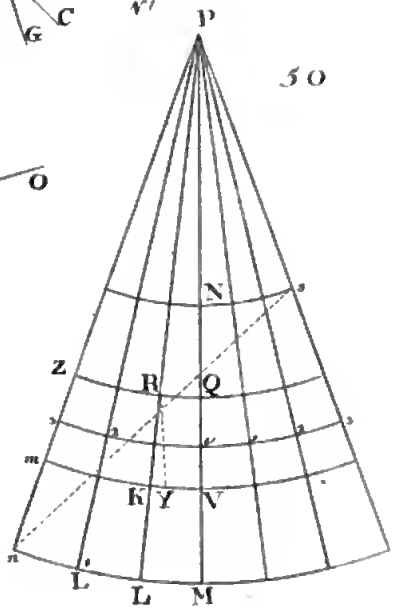
46



54

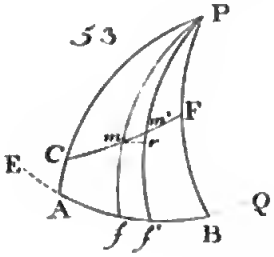


50



52

53



1.4.61 1830
Vol. II

00563764

Digitized by Google

ALLEGRI
LABORAT
RESTAURO
LIBRI
PARMA